

EINE NEUE SCHMETTERLINGS- KURVE

Ana Sliepčević

*Faculty of Civil Engineering, University of Zagreb, 10 000 Zagreb,
Kačićeva 26, Croatia*

Received: November 2004

MSC 2000: 51 M 04

Keywords: Butterfly theorem, butterfly point, butterfly line and curve, pencil of conics.

Abstract: It is shown how a butterfly point can be constructed in any arbitrary direction for each butterfly figure, inscribed in any conic. It is proved that all such points associated to a given butterfly lie on a conic. This conic is also the curve of central points of the pencil of conics determined by the butterfly figure. Furthermore, it is proved that the set of all lines made of butterfly points, associated to a given butterfly figure inscribed in a circle, wraps a curve of the 4th order and 3rd class. Such a curve is constructed too.

1. Einleitung

Neuerdings beschäftigen sich zahlreiche Abhandlungen mit der elementargeometrischen Figur eines „überschlagenen Kreisvierecks“. Diese Figur abstrahiert einen „Schmetterling“, weshalb die mit ihr in Zusammenhang stehenden Aussagen „Schmetterlingsätze“ heißen. Die meisten von ihnen befassen sich mit einem spezifischen Punkt S (Schmetterlingspunkt), der eine spezielle Lage in Bezug auf eine in einen Kreis c , oder einen anderen festen Kegelschnitt c , eingeschriebenen Schmetterlingsfigur $(c, MNPQ)$ einnimmt (vgl. [4], [5]). In [4] wird eine Möglichkeit angegeben, wie man einen solchen Schmetterlingspunkt definieren und konstruieren kann. Dabei wurde bewiesen, dass die Gesamtheit dieser Schmetterlingspunkte zur Schmetterlingsfigur $(c, MNPQ)$ auf einer gleichseitigen Hyperbel (Schmetterlingskurve) durch den Kreis-

mittelpunkt O und die Diagonalepunkte von $MNPQ$ liegen. Weiterhin wurde gezeigt dass diese Kurve mit der Mittelpunktskurve des durch M, N, P, Q bestimmten Kegelschnitt-Büschels (KS -Büschels) $\{MNPQ\}$ koinzidiert.

2. Eine Verallgemeinerung

Um Verallgemeinerungen der obigen Sätze zu geben, ist zunächst die neue geometrische Bedeutung des Schmetterlingspunktes zu präzisieren: Der Schmetterlingspunkt S zu einem Fernpunkt T^∞ unendlich auf einer Geraden t bezüglich $(c, MNPQ)$ liegt auf einer bestimmten Geraden s als Berührungspunkt eines der zwei Kegelschnitte des durch die Punkte M, N, P, Q bestimmten Kegelschnittbüschels $\{MNPQ\}$ [4]. Der andere Berührungspunkt des zweiten Kegelschnittes ist der Fernpunkt von s . Man sieht, dass dieser Punkt $S \in s$ auch der Schmetterlingspunkt zu jedem Kegelschnitt des Büschels $\{MNPQ\}$ ist. Eine Gerade s mit dieser Eigenschaft heißt Schmetterlingsgerade. Da der andere Kegelschnitt aus dem KS -Büschel $\{MNPQ\}$, der die Schmetterlingsgerade s berührt, immer eine Hyperbel ist, ist die Gerade s eine ihrer Asymptoten. Diese Tatsache ermöglicht eine andere Definition und Konstruktion eines Schmetterlingspunktes wie folgt:

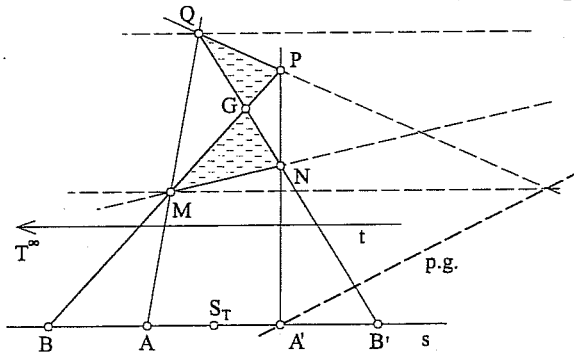


Fig. 1.

Seien $(c, MNPQ)$ und ein beliebiger Fernpunkt T^∞ gegeben (Fig. 1). Der Punkt T^∞ bestimmt zusammen mit den Eckpunkten M, N, P, Q des Vierecks eine einzige Hyperbel (oder Parabel) des KS -Büschels $\{MNPQ\}$, deren Asymptote s in T^∞ noch genau einen weiteren Kegelschnitt k aus $\{MNPQ\}$ berührt. Der Berührungspunkt von k mit s heißt Schmetterlingspunkt S_T zu T^∞ .

Man konstruiert die erwähnte Hyperbelasymptote s , z.B. linear mittels der Pascalschen Geraden p.g. nach dem Satz von Pascal. Sodann bestimmt man den Schmetterlingspunkt $S_T \in s$ als den 2. festen Punkt der Desargues-Involution auf s bezüglich des Kegelschnittbüschels $(MNPQ)$ (Fig. 1).

Man sieht, dass es ganz unwichtig ist ob das Viereck $MNPQ$ (Schmetterling) einem Kreis eingeschrieben ist. Jeder der vier Punkte M, N, P, Q , von denen keine drei kollinear sind, bestimmen nämlich ein KS-Büschel, und jedem Kegelschnitt dieses Büschels ist M, N, P, Q eingeschrieben. Für jede Asymptote jeder Hyperbel dieses Büschels existiert ein eigentlicher Schmetterlingspunkt, der in obigen Weise linear konstruiert werden kann. Im Fall, dass das KS-Büschel einen Kreis enthält, bilden die zu T^∞ gehörigen Punkte S_T bekanntlich eine gleichseitige Hyperbel [4]. Wegen der affinen bzw. projektiven Formulierung der Schmetterlingspunkt-konstruktion folgt daraus, dass auch im allgemeinen die Punkte S_T einen Kegelschnitt durchlaufen. Somit gilt der **Satz 1 (Verallgemeinerte Schmetterlingskurvensatz)**. *Durch ein beliebiges Viereck $MNPQ$ sei ein Kegelschnittbüschel gegeben. Die Schmetterlingspunkte aller Kegelschnitte dieses Büschels bilden einen Kegelschnitt; dieser kann sowohl eine Hyperbel, eine Ellipse oder eine Parabel sein.*

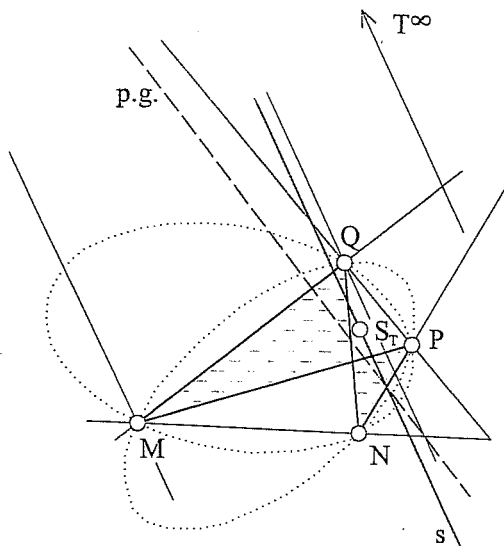


Fig. 2.

Beweis. Durch die Punkte M, N, P, Q ist ein allgemeines KS-Büschel gegeben. Einen Schmetterlingspunkt S_T zu einer beliebigen Richtung

T^∞ konstruiert man analog wie in der Figur 1 mittels der Pascalschen Geraden $p.g.$ (Fig. 2). Dieser Punkt hat die Schmetterlings-eigenschaft in Bezug auf jeden Kegelschnitt des gegebenen KS-Büschels. Es existiert nämlich immer die Möglichkeit, eine solche Affinität zu bestimmen, die dem gegebenen KS-Büschel ein KS-Büschel zuzuordnet, das einen Kreis enthält. Da dieses KS-Büschel eine gleichseitige Hyperbel als die Schmetterlingskurve enthält, besitzt das ihm zugeordnete KS-Büschel eine allgemeine Hyperbel als die Schmetterlingskurve. Die Fernpunkte dieser Schmetterlingshyperbel koinzidieren wieder wie in [4] mit den Fernpunkten der beiden Parabel des gegebenen KS-Büschels. \diamond

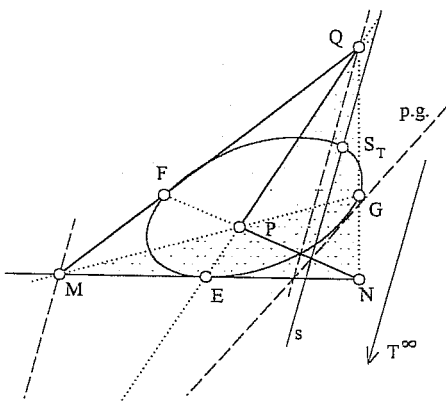


Fig. 3.

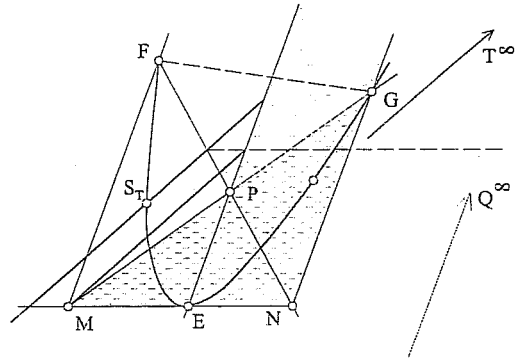


Fig. 4.

Wenn ein KS-Büschel keine Parabel enthält, existiert eine ihm zugeordnete Schmetterlingskurve ohne reellen Fernpunkte, sie ist eine Ellipse. Eine solche elliptische Schmetterlingskurve ist in Fig. 3 dargestellt. In diesem Fall gehen wir von ein KS-Büschel aus, das nur Hyperbeln enthält.

Wird das Grundviereck $MNPQ^\infty$ des KS-Büschels so vorgegeben, dass es eine einzige Parabel enthält, so ist die zugeordnete Schmetterlingskurve naturgemäß eine Parabel (Fig. 4). Mit dem gegebenem Viereck ist zwar ein „ungewöhnlicher“ Schmetterling mit einem unendlich großen Flügel gegeben. Es ist aber offensichtlich, dass ein Büschel dieser Art nur Hyperbeln und eine einzige Parabel, aber keine Ellipsen enthält.

In Fig. 5 ist eine zerfallende Schmetterlingskurve eines Hyperbelbüschels gezeichnet.

Man erkennt, dass in jedem Fall die Schmetterlingskurve durch die

Diagonalepunkte des Grundvierecks und durch die Halbierungspunkte der Viereckseiten läuft. Somit gilt der

Satz 2. Die Schmetterlingskurve eines beliebigen Vierecks $MNPQ$ koinzidiert mit der Mittelpunktskurve des durch $\{M, N, P, Q\}$ gegebenen KS-Büschels (Fig. 1).

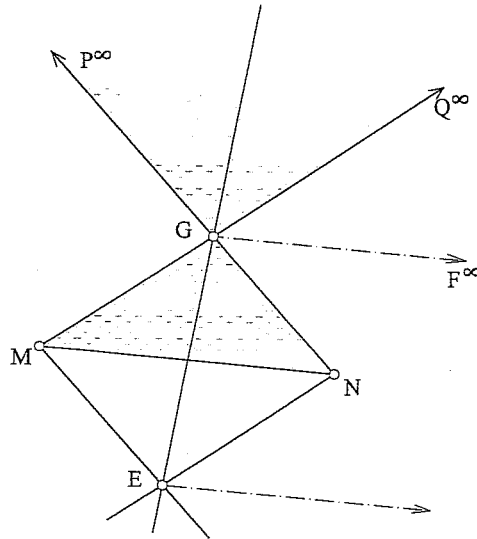


Fig. 5.

Es scheint uns noch interessant die Menge der zu den Punkten der Schmetterlingskurve k gehörigen Schmetterlingsgeraden zu untersuchen. Dies soll in folgenden für ein KS-Büschel erfolgen, das einen Kreis enthält.

3. Die Schmetterlingshüllkurve

Satz 3. Die Menge aller Schmetterlingsgeraden zu einer gegebenen Schmetterlingsfigur ($c, MNPQ$) umhüllt eine Kurve dritter Klasse und vierter Ordnung.

Beweis. Sei $\{MNPQ\}$ ein einen Kreis enthaltendes KS-Büschel und k die ihm zugeordnete Schmetterlingshyperbel (Fig. 7). Dann existieren unendlich viele Schmetterlingsgeraden zu dieser Schmetterlingsfigur, die eine ebene Kurve einhüllen. Im allgemeinen ist diese Hüllkurve das Erzeugnis einer Projektivität zwischen der Schmetterlingskurve k und der Ferngeraden u^∞ , d.h. eine Kurve dritter Klasse sein (vgl. [6]).

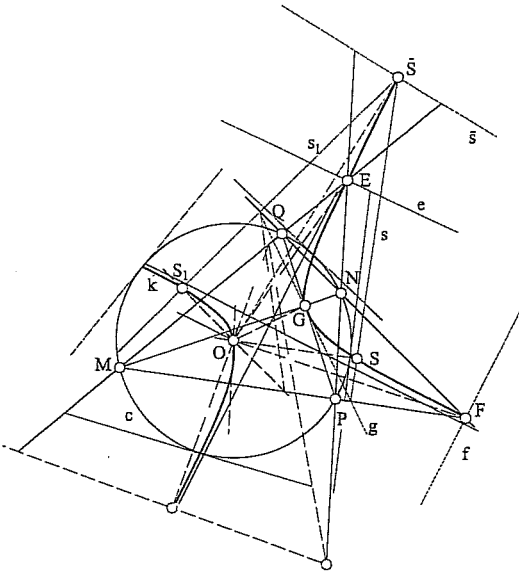


Fig. 6.

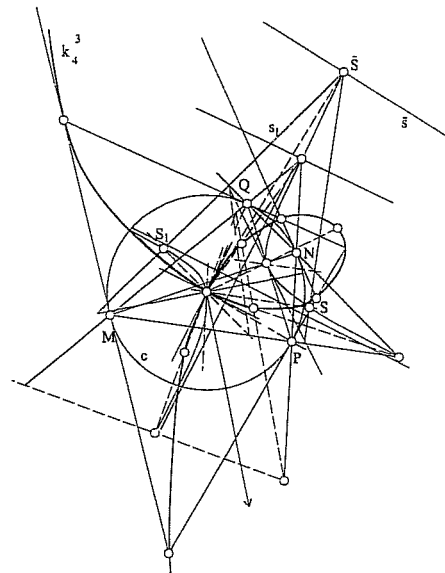


Fig. 7.

Da die Schmetterlingskurve k auch die Mittelpunktskurve des KS-Büschels ($MNPQ$) ist, so ist jeder Punkt von k , nicht nur ein Schmetterlingspunkt, sondern auch der Mittelpunkt einer der Kegelschnitten des KS-Büschels. Da weiters jede der Schmetterlingsgeraden s eine Asymptote einer der Hyperbeln des KS-Büschels ist [4], schneidet sie die Schmetterlingskurve k , außer im Schmetterlingspunkt S , noch in einem weiteren Punkt \bar{S} , der der Mittelpunkt der erwähnten Hyperbel ist (Fig. 6). Durch diesen Hyperbelmittenpunkt $\bar{S} \in k$ läuft auch die andere Asymptote, also eine weitere Schmetterlingsgerade s_1 , die die Schmetterlingskurve k in einem weiteren Punkt S_1 schneidet, der der Schmetterlingspunkt zur Gerade s_1 ist. Außer den Geraden s und s_1 , läuft durch den Punkt \bar{S} noch eine weitere Schmetterlingsgerade \bar{s} , wobei der Punkt \bar{S} die Schmetterlingseigenschaft besitzt.

Man erkennt, dass durch jeden Punkt $\bar{S} \in k$ drei Schmetterlingsgeraden laufen, d.h. drei Tangenten der gesuchten Schmetterlingshüllkurve. Somit ist diese Kurve von dritter Klasse. Da die Ferngerade eine Doppeltangente ist, muss diese Kurve von vierten Ordnung sein [6]. \diamond

Die Schmetterlingshüllkurve k_3^4 wird durch die folgenden Tangenten bestimmt: Die sechs Seiten des Grundvierecks $MNPQ$, die vier Tangenten des Kreises c in den Schnittpunkten $c \cap k$, die drei durch die Diagonalmittelpunkte E, F, G zu OE, OF, OG gelegten Normalen e, f, g und

die Doppeltangente u^∞ .

Um einige weiteren Eigenschaften dieser Kurve zu erfassen und sie zu konstruieren, betrachten wir ihre zum Kreis c polar-reziproke Kurve k_4^3 (Fig. 7). Den folgenden Satz ist nicht schwer zu beweisen.

Satz 4. Die zum Kreis c polar-reziproke Kurve der Schmetterlingsgeradenkurve k_3^4 ist eine Strophoide k_4^3 mit dem Doppelpunkt im Kreismittelpunkt O .

Beweis. Die zur Hüllkurve k_3^4 reziproke Kurve ist eine Kurve k_4^3 dritter Ordnung und vierter Klasse [6]. Da die Ferngerade u^∞ eine Doppeltangente von k_3^4 ist, ist der Kreismittelpunkt O ein Doppelpunkt der reziproken Kurve k_4^3 . Dabei sind die Kurventangenten in O orthogonal. Da zwei der drei den Punkt O enthaltenden Schmetterlingsgeraden die isotropen Geraden des Mittelpunkts O sind, liegen die absoluten Kreispunkte auf der Kurve k_4^3 . Somit ist die Kurve k_4^3 eine rationale zirkuläre Kubik mit orthogonalen Doppelpunktstangenten, also eine Strophoide (Fig. 7). Diese Strophoide kann man als Inversionsbild der gleichseitigen Hyperbel k bezüglich des Kreises c konstruieren.

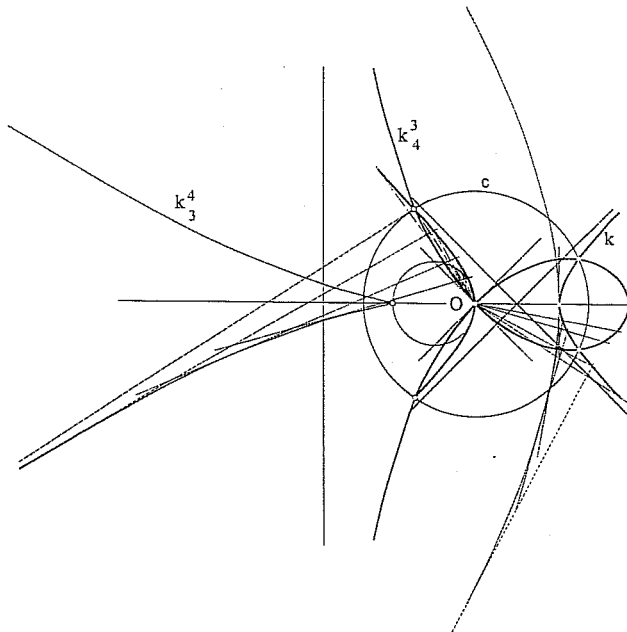


Fig. 8.

Aus dem Vorausstehenden erkennt man, dass die gesuchte Schmetterlingshüllkurve k_3^4 , als reziproke Kurve der Strophoide k_4^3 , die Ferngerade als Doppeltangente besitzt und drei Spitzen, die den drei Inflektionspunkten der Strophoide entsprechen. In Fig. 8 wurde eine

solche Hüllkurve als negative Fußpunktkurve der gleichseitigen Hyperbel k konstruiert. In diesem Fall liegt der Mittelpunkt O des Kreises c im Scheitelpunkt der Hyperbel, woraus man als Inversionsbild der Hyperbel k eine gerade Strophoide k_4^3 mit einem unendlich fernen und zwei imaginären Inflektionspunkten erhält. Damit wird die Schmetterlingshüllkurve k_3^4 eine symmetrische Quartik mit einem reellen und zwei imaginären Spitzpunkten (Fig. 8). \diamond

Zusammenfassung: In [4] wurde gezeigt, dass alle Schmetterlingspunkte, die zu einem speziellen Vierseit gehören, das einem Kreis eingeschrieben ist, auf einer gleichseitigen Hyperbel liegen. Diese Hyperbel wurde konstruiert. Es wurde gezeigt, dass diese Hyperbel mit der Mittelpunktskurve des zugrundeliegenden Kegelschnittbüschels übereinstimmt. Weiters wurde eine andere Konstruktion der Schmetterlingspunkte angegeben, die es gestattet, dem Begriff der Schmetterlingskurve auf andere Schmetterlingsfiguren zu übertragen, die einem Kegelschnitt einbeschrieben sind.

Es wird gezeigt, dass diese Punkte auf einem Kegelschnitt liegen, der gleichzeitig Mittelpunktskurve für das definierende Kegelschnittbüschel ist. Weiters wird ein Satz über Geraden in der Schmetterlingsfigur bewiesen. Die Menge aller Geraden, die zu den Schmetterlingspunkten einer Schmetterlingskonfiguration assoziiert sind, umhüllen eine Kurve 4. Ordnung und 3. Klasse. Diese Kurve wird konstruiert.

References

- [1] CESAREC, R.: Analitička geometrija, Školska knjiga, Zagreb, 1957.
- [2] EWES, H.: A survey of geometry, Allyn and Bacon, Boston, 1963, p. 171.
- [3] DINGELDEY, F.: Kegelschnitte und Kegelschnittssysteme, Encykl. Math. Wiss. III, 2., 1., pp. 1–160, B. G. Teubner, Leipzig 1903–1915.
- [4] SLIEPČEVIĆ, A.: A New Generalization of the Butterfly Theorem, *Journal for Geometry and Graphics*, Volume 6 (2002), No. 1, 61–68.
- [5] VOLENEC, V.: A Generalization of the Butterfly Theorem, *Math. Communications* 5 (2000), No. 2, 157–160.
- [6] WIELEITNER, H.: Spezielle Ebene Kurven, G. J. Göschensche Verlagshandlung, Leipzig, 1908.