

BERÜHRENDE SCHRAUBFLÄ- CHEN MIT SCHRAUBLINIEN- KANTEN

Gert Bär

Institut für Geometrie , TU Dresden, D-01062 Dresden, Germany

Herrn Professor Gy. Maurer zum 70. Geburtstag gewidmet

Received: October 1996

MSC 1991: 53 A 17

Keywords: Kinematics, line geometry, line complexes, screw motions, helicoids, line of contact, undercut.

Abstract: The problem is considered to determine a contacting helicoid to a given helicoid where the concerned screw axes are skew. Then, both helicoids contact along a surface stripe. Its surface axes and pitches are calculated. All axes form a Plücker-conoid. Afterwards, an algorithm which determines the dressed or undercutted helicoid generated by a helicoid underlying a screw motion is presented. The generating helicoid may have a helix edge. Such a helix edge generally causes a gap in the corresponding line of contact. With a solution of two given equations it is possible to avoid such a gap. Examples illustrate the results.

1. Voraussetzungen über das Schraubnormalennetz zweier Schraubungen

Im folgenden sollen zwei stetige Schraubungen σ bzw. σ^* mit dem Schraubparameter p bzw. h um zueinander windschiefe Achsen o bzw. o^* betrachtet werden, die den Achsabstand m und den Achswinkel ε besitzen. Wählt man als Schraubachse o bzw. o^* die x_3 -Achse bzw.

y_3 -Achse von zwei kartesischen Koordinatensystemen $KS(O; x_1, x_2, x_3)$ und $KS(O^*; y_1, y_2, y_3)$ mit den Ursprungspunkten in den Gemeinlotfußpunkten der Schraubachsen (vgl. Fig. 1),

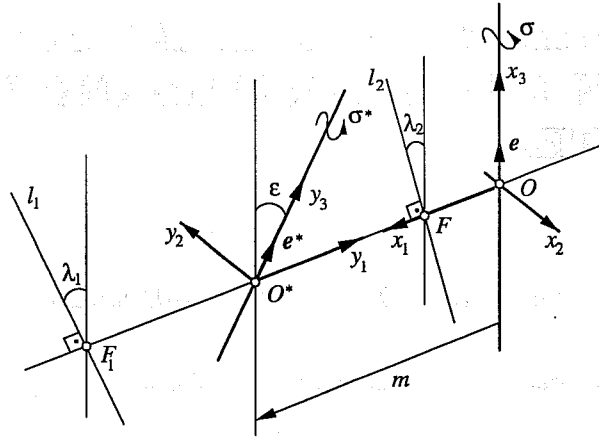


Fig. 1

dann besteht zwischen den Systemen die folgende Koordinatentransformation:

$$\mathbf{x} = \mathbf{m} + \mathbf{M}\mathbf{y},$$

wobei

$$(1.1) \quad \mathbf{m} = (m \ 0 \ 0)^T, \\ \mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -C & S \\ 0 & S & C \end{pmatrix}, \quad S = \sin \varepsilon, \quad C = \cos \varepsilon.$$

Zu den Schraubungen σ und σ^* gehören lineare Schraubnormalenkomplexe K und K^* , die sich in dem Geradennetz \mathcal{N} aller Schraubnormalen beider Komplexe, dem Schraubnormalennetz schneiden. Zur Bestimmung der Leitgeraden von \mathcal{N} sucht man bekanntlich in dem von K und K^* aufgespannten Komplexbüschel \mathcal{B} die Treffgeradenkomplexe [3], [4], [6]. Dies führt auf eine quadratische Gleichung mit der Diskriminante

$$(1.2) \quad D = (C(p+h) + Sm)^2 - 4ph.$$

Das Schraubnormalennetz entartet genau dann, wenn $p = h = Sm = 0$ gilt, d.h. beide Schraubungen in Drehungen entarten und die Drehachsen in einer Ebene liegen. Im folgenden betrachten wir nur die

praxisrelevanten Fälle, in denen das Netz \mathcal{N} elliptisch oder hyperbolisch ist, d.h. $S m \neq 0$ gilt. Berechnen wir die zugehörigen Leitgeraden l_i ($i = 1, 2$) in Plücker'schen Linienkoordinaten (c_i, \hat{c}_i) , dann folgt mit den Abkürzungen

$$e := S h - C m, \quad f := C h + S m$$

das in der Tabelle zusammengestellte Ergebnis:

Fall	$p \neq 0, h \neq 0$	$p = 0, h \neq 0$	$p \neq 0, h = 0$	$p = 0, h = 0$
D	$(f + C p)^2 - 4 p h$	f^2	$(C p + S m)^2$	$S m$
c_1	$\begin{pmatrix} 0 \\ \beta_1 S \\ \alpha_1 + \beta_1 C \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: \mathbf{a}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ S \\ C \end{pmatrix} =: \mathbf{b}$	\mathbf{a}
\hat{c}_1	$\begin{pmatrix} 0 \\ \beta_1 e \\ \alpha_1 p + \beta_1 f \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} =: \hat{\mathbf{a}}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -C m + S h \\ C h + S m \end{pmatrix} =: \hat{\mathbf{b}}$	$\hat{\mathbf{a}}$
c_2	$\begin{pmatrix} 0 \\ \beta_2 S \\ \alpha_2 + \beta_2 C \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ f S \\ f C - h \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -p S \\ m S \end{pmatrix}$	\mathbf{b}
\hat{c}_2	$\begin{pmatrix} 0 \\ \beta_2 e \\ \alpha_2 p + \beta_2 f \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ f e \\ f^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -p e \\ p(p - h) C \end{pmatrix}$	$\hat{\mathbf{b}}$
Nr.	(1.3)	(1.4)	(1.5)	

Im Fall $D > 0$ haben die Leitgeraden l_i mit den Schraubachsen o und o^* eine gemeinsame Normale, hier die x_1 -Achse. Man findet für den vorzeichenfähigen Abstand $m_i = \overline{O l_i}$

(1.6)

$$\text{im Fall (1.3): } m_{1,2} = \frac{1}{2S} \left(f - Cp \pm \sqrt{(f - Cp)^2 - 4epS} \right),$$

$$\text{im Fall (1.4): } m_1 = 0, \quad m_2 = \frac{f}{S},$$

$$\text{im Fall (1.5): } m_1 = 0, \quad m_2 = -\frac{Cp}{S}.$$

Durch jeden Punkt X , der nicht auf einer Leitgeraden liegt, geht genau eine gemeinsame Schraubnormale von σ und σ^* , also genau eine Netzgerade n mit den Plückerschen Linienkoordinaten

$$(1.7) \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} (Cm - hS)p + (mS + C(h-p) - Sx_1)x_1 \\ (C(h-p) + S(m-x_1))x_2 + pSx_3 \\ (Cm - hS)x_2 - Sx_1x_3 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{x} \times \mathbf{n},$$

denn es gilt

$$(1.8) \quad \mathbf{n} = \mathbf{o} \quad \text{genau für } X \in l_1 \quad \text{oder} \quad X \in l_2.$$

2. Berührbedingung und berührende Schraubfläche

Bezüglich des $KS(O^*; y_1, y_2, y_3)$ sei nun eine Schraubfläche Θ gegeben, indem ihr C^1 -Meridian

$$(2.1) \quad w : \mathbf{w}(s) = (R(s), 0, Z(s))^T, \quad s \in [s_1, s_2],$$

vorgeschrieben wird. Bezeichnet man mit t den Schraubwinkel des Meridians w um die y_3 -Achse, dann hat man als Parameterdarstellung von Θ :

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(s, t) = (0, 0, th)^T + \mathbf{D}(t) \mathbf{w}(s), \quad (s, t) \in [s_1, s_2] \times [0, 2\pi]$$

$$(2.2) \quad \mathbf{D}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In einem Punkt $\mathbf{y}(s, t)$ wird die Schraubfläche Θ von einer Schraubfläche Φ mit der Schraubachse x_3 und dem Parameter p berührt, wenn dort die Flächennormalen der beiden Flächen existieren und inzidieren. Die Flächennormale n von Θ im Punkt $\mathbf{y}(s, t)$ hat bezüglich des $KS(O; x_1, x_2, x_3)$ die Plückerschen Linienkoordinaten

$$(2.3) \quad \mathbf{n}(s, t) = \mathbf{M}(y_s \times y_t), \quad \hat{\mathbf{n}}(s, t) = (\mathbf{m} + \mathbf{M}\mathbf{y}(s, t)) \times \mathbf{n}(s, t).$$

Die Flächennormale n gehört jetzt nach Konstruktion dem Gewinde zu der Schraubung σ^* an. Soll n auch in dem Gewinde zu der Schraubung σ angehören und damit gleichzeitig Flächennormale einer Schraubfläche Φ sein, dann muß

$$\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}} + (p \cdot \mathbf{a} + \hat{\mathbf{a}})\mathbf{n} = 0$$

gelten. Die Berechnung dieser Bedingung ergibt die Berührungsgleichung

$$(2.4) \quad B(s, t) = a \cos t + b \sin t + c = 0$$

mit

$$a = (R^2 R' + R' h p + R Z' (Z + h t)) S - R' h m C,$$

$$b = (R Z' p - R' h (Z + h t)) S - R Z' m C,$$

$$c = -R R' (m S + (p - h) C).$$

Diese Berührungsgleichung kann als Gleichung einer Urberührungslinie im s, t -Parameterbereich von Θ interpretiert werden, die durch (2.2) auf Θ abgebildet wird.

Setzen wir im folgenden voraus, daß (gegebenenfalls stückweise) eine Lösung $t = t(s)$ der Berührungsgleichung existiert (die man im Fall $h \neq 0$ praktisch nur numerisch realisieren kann), dann ist demnach

$$(2.5) \quad \mathbf{b}_\Theta = \mathbf{b}_\Theta(s) = \mathbf{y}(s, t(s))$$

eine Parameterdarstellung der Berührungslinie (B-Linie) b auf der Schraubfläche Θ . Die gemeinsamen Flächennormalen von Θ und Φ längs b bilden dann eine Normalenfläche $\Gamma : (\mathbf{n}(s), \hat{\mathbf{n}}(s))$ nach (2.3), die dem Netz \mathcal{N} angehört. Da die B-Linie unabhängig von dem Schraubwinkel u ist, kann die Schraubfläche Φ mit σ beliebig verschraubt werden und wird dabei immer die Fläche Θ längs b berühren. Die B-Linie b ist demnach eine Erzeugende von Φ , so daß

$$(2.6) \quad \Phi : \mathbf{x}(u, s) = (0, 0, u p)^T + D(u) (m + M b_\Theta(s))$$

eine Parameterdarstellung der berührenden Schraubfläche Φ ist.

3. Berührstreifen zwischen Schraubflächen

Wir können jetzt nach zwei zu den Schraubungen passenden Schraubflächen Φ und Φ^* fragen, die sich längs einer B-Linie berühren. Diese muß dann notwendig die Streifenkurve $\mathbf{x}(u)$ eines Streifens

$\mathcal{S}(\mathbf{x}(u), \mathbf{n}(u))$ sein, dessen Normalen dem Netz \mathcal{N} angehören, der also den Bedingungen

$$(3.1) \quad c_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} + \hat{c}_1 \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$(3.2) \quad c_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} + \hat{c}_2 \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$(3.3) \quad \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} = 0$$

genügt und der ein *Berührstreifen* (*B-Streifen*) zu den Schraubungen σ und σ^* heißen soll.

Bemerkung. Ein B-Streifen kann leicht konstruiert werden. Man wähle eine Regelfläche $\Gamma : (\mathbf{n}(u), \hat{\mathbf{n}}(u))$ in dem Netz \mathcal{N} aus. Damit sind die Bedingungen (3.1) und (3.2) erfüllt. Die noch zu erfüllende Bedingung (3.3) bedeutet, daß jede *Orthogonaltrajektorie* $b : \mathbf{x} = \mathbf{x}(u)$ auf Γ eine *B-Streifenkurve* ist. Beispiele solcher Konstruktionen wurden in [2] ausgeführt.

Das Netz \mathcal{N} kann bekanntlich als Schnitt von zwei beliebigen verschiedenen Komplexen aus dem Komplexbüschel \mathcal{B} aufgefaßt werden. Sind zwei Treffgeradenkomplexe wählbar, ergibt sich sofort:

In einem B-Streifen $\mathcal{S}(\mathbf{x}(u), \mathbf{n}(u))$, dessen Normalen einem elliptischen oder hyperbolischen Netz \mathcal{N} nach (3.1) und (3.2) angehören, berührt sich eine einparametrische Schar von Schraubflächen, deren Achsen und Parameter

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{s}_0 &= \frac{1}{\|\mathbf{d}\|} \mathbf{d}, & \hat{\mathbf{s}}_0 &= \frac{1}{\|\mathbf{d}\|} (\hat{\mathbf{d}} - p_0 \mathbf{d}) \\ p_0 &= \frac{\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{d}}}{\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}} \end{aligned}$$

mit denen der Komplexe $\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n} = 0$ des Büschels \mathcal{B} übereinstimmen, wobei

$$(3.5) \quad \mathbf{d} := \mu \mathbf{c}_1 + \lambda \mathbf{c}_2, \quad \hat{\mathbf{d}} := \mu \hat{\mathbf{c}}_1 + \lambda \hat{\mathbf{c}}_2 \quad \text{mit } (\mu, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Bemerkungen: 1. Die Achsen (3.4) bilden bei Variation der homogenen Parameter (μ, λ) eine Regelfläche, die als Plücker-Konoid [7] bekannt ist.

2. Wenn das Netz \mathcal{N} hyperbolisch ist, dann gibt es darin zwei reelle, verschiedene Leitgeraden – und damit in der Schar berührender Schraubflächen genau zwei Drehflächen mit diesen Leitgeraden als Achsen.

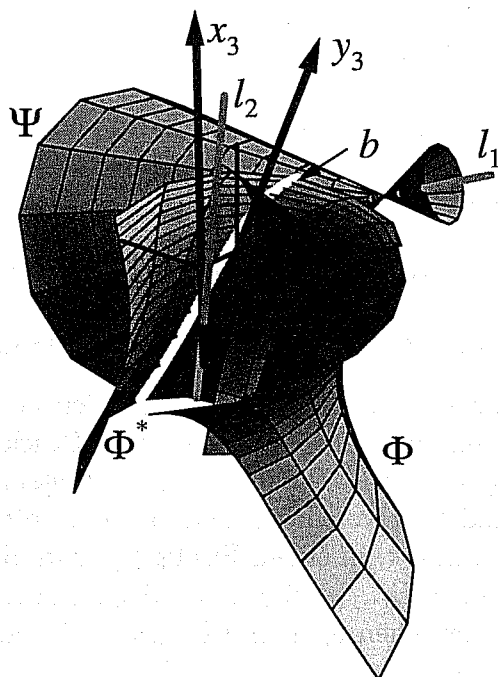


Fig. 2

Fig. 2 zeigt ein Berechnungsbeispiel, bei dem ein hyperbolisches Netz durch die Leitgeraden $l_i : (c_i, \hat{c}_i)$, $i = 1, 2$, festgelegt ist. Weiter sei ein Drehkegel Ψ mit der Achse l_1 gegeben. Die Transversalen von l_1 und l_2 sind Netzgeraden – und jene, die auch Flächennormalen von Ψ sind, schneiden einen B-Streifen b auf Ψ aus. Eine Drehung von b um l_2 würde eine Drehfläche erzeugen, die Ψ längs b berührt. Durch Wahl zweier Parameterpaare (μ, λ) und (μ^*, λ^*) sind zwei Schraubachsen (x_3 - bzw. y_3 -Achse) sowie zugehörige Parameter p_0 und p_0^* festgelegt. Die dazu passenden, von b erzeugten Schraubflächen Φ und Φ^* berühren sich und auch Ψ längs b .

4. Schraubflächen mit Kanten

Wir wollen jetzt annehmen, daß der Meridian w von Θ eine segmentierte G^0 -Kurve ist, die aus den C^1 -Segmenten

$$(4.1) \quad \begin{aligned} w_i : \mathbf{w}_i &= (R_i(s), 0, Z_i(s))^T, \quad i = 1, \dots, N_s, \quad 0 \leq s \leq 1, \\ \text{mit } \mathbf{w}_{i-1}(1) &= \mathbf{w}_i(0), \quad i = 2, \dots, N_s \end{aligned}$$

besteht, die die Verbindungspunkte

$$K_i : \mathbf{y}_i = \mathbf{w}_i(0), \quad i = 2, \dots, N_s$$

besitzen. Diese definieren Schraublinien

$$(4.2) \quad k_i : \mathbf{k}_i(t) := (R_i(0) \cos t, R_i(0) \sin t, Z_i(0) + ht)^T$$

auf Θ , die im Fall $\dot{\mathbf{w}}_{i-1}(1) \times \dot{\mathbf{w}}_i(0) \neq \mathbf{o}$ Kanten auf Θ darstellen.

Die Schraubfläche besteht demnach aus Schraubflächenstücken Θ_i , die längs k_i zusammengefügt sind. Zu jedem Stück Θ_i gehört eine Berührungsgleichung $B_i(s, t) = 0$ nach (3.5) und entsprechend eine B-Linie b_i , wenn die Existenz von Lösungen vorausgesetzt wird. Die B-Linie b_i erreiche die Kante k_i in einem Punkt B_{i0} und die Kante k_{i+1} in einem Punkt B_{i1} . Wegen $B_{i-1}(s, t) \neq B_i(s, t)$ gilt dann im allgemeinen $B_{i-1,1} \neq B_{i0}$, d. h. zwischen b_{i-1} und b_i gibt es im allgemeinen eine Sprungstelle.

In [1] wurde bewiesen, daß man die an Θ bei einer Schraubung $\sigma(o, p)$ abgerichtete Schraubfläche Φ folgendermaßen berechnen kann:

Sei $\Theta = \Theta(o^*, h, w)$ eine Schraubfläche (oder Drehfläche), w ein segmentierter Meridian mit den Verbindungspunkten K_i ($i = 1, \dots, N_s$) und $\sigma(o, p)$ eine Schraubung (oder Drehung). Dann ermittle man

- die Achsschnitte u_i der Schraubflächen $\Psi(o, p, w_i)$ für $i = 1, \dots, N_s$,
- die Achsschnitte a_j der Schraubflächen $\Phi(o, p, b_j)$ zu den B-Linien b_j ,
- für jeden Radius $x_1 = r$, $0 < r < r_a$, wird die größte (kleinste) Ordinate z^* der Kurvenpunkte von u_i oder a_j gewählt, die an der Stelle $x_1 = r$ definiert sind.

Dieser Algorithmus ergibt das obere (untere) abgerichtete Profil $z = z^*(r)$ der abgerichteten Schraubfläche $\Phi(o, p, z^*(r))$.

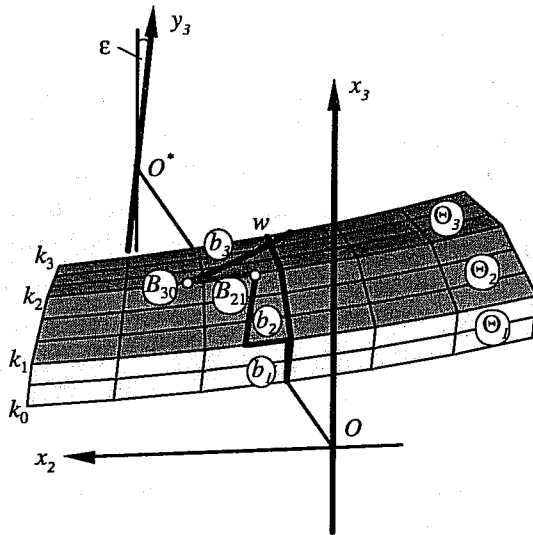


Fig. 3

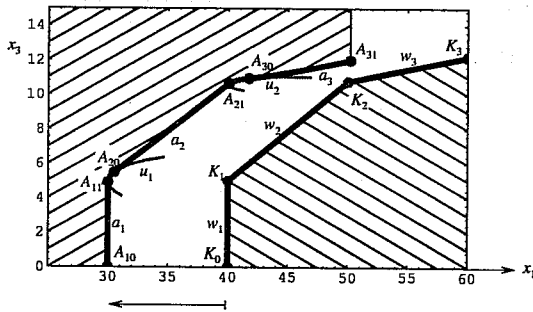


Fig. 4

Fig. 4 stellt rechts den Meridian $w = w_1 \cup w_2 \cup w_3$ einer Schraubfläche $\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2 \cup \Theta_3$ dar, die in einem Zentralriß auch in Fig. 3 dargestellt ist. Auf den Flächenstücken Θ_i existieren die B-Linien b_j , wenn z. B. $m = 130, p = -6.5, \epsilon = -0.1$ gewählt wird. Man beachte die Sprungstellen auf den Kanten k_1 und k_2 . Die abgerichtete Schraubfläche Φ besitzt deshalb das in Fig. 4 (links) dargestellte abgerichtete Profil, wobei die Segmente u_i durch die Kanten k_i hergestellt werden, hingegen die Segmente a_j Achsschnitte der Schraubflächen $\Phi(o, p, b_j)$ sind. In der Verzahnungstechnik wird das Auftreten von profilformenden Segmenten u_i als Unterschnitt bezeichnet.

5. Vermeidung von Unterschnitt

Soll Unterschnitt durch eine Kante k_j auf Θ vermieden werden, so muß $B_{j-1,1} = B_{j0} =: B_j^*$ gelten. Sei n_{j-1} bzw. n_j die Flächennormale von Θ_{j-1} bzw. Θ_j in B_j^* . Es ist $n_{j-1} \neq n_j$, da B_j^* auf der Kante k_j liegt. Damit b_{j-1} und b_j in B_j^* stetig aneinander anschließen können, müssen wir fordern, daß die sich in B_j^* schneidenden Flächennormalen n_{j-1} und n_j zum Schraubnormalennetz \mathcal{N} gehören. Wegen (1.7,1.8) kann diese Forderung nur erfüllt werden, wenn B_j^* mit einer Leitgeraden l_i : (c_i, \hat{c}_i) , $i = 1, 2$, inzidiert. Dies soll jetzt analytisch ausgedrückt werden:

Setzen wir

$$B_j^* : \mathbf{y} = (r_j \cos t, r_j \sin t, z_j + h t)^T$$

bezüglich $KS(O^*; y_1, y_2, y_3)$, so liegt B_j^* für alle t auf k_j . Für die Fußpunkte F_i der Leitgeraden l_i gilt mit (1.6) und (1.1)

$$n_i = m - m_i = \overline{O^* F_i} = \frac{S m - C h + C p + (-1)^i \sqrt{D}}{2S}.$$

Wegen (1.7) liegt l_i in der Ebene

$$(m C - h S)x = S_1 x_1 x_3 = S m_i x_3,$$

d. h. in der Ebene

$$e x_2 + \frac{1}{2}(f - C p + (-1)^i \sqrt{D}) x_3 = 0.$$

Deshalb ist

$$\mathbf{v}_1 = (0, -\frac{1}{2}(f - C p + (-1)^i \sqrt{D}), e)^T$$

ein Richtungsvektor von l_i im $KS(O; x_1, x_2, x_3)$, der bezüglich $KS(O^*; y_1, y_2, y_3)$ die Darstellung

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{M} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ C(f - C p + (-1)^i \sqrt{D}) + 2S e \\ -S(f - C p + (-1)^i \sqrt{D}) + 2C e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_{22} \\ v_{32} \end{pmatrix}$$

hat. Somit hat l_i die Parameterdarstellung

$$l_i : \mathbf{y} = \begin{pmatrix} n_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \mathbf{v}_2.$$

Die Schnittbedingung $B_j^* = k_j \cap l_i$ ist äquivalent zur Lösung des Gleichungssystems

$$(5.1) \quad r_j \cos t = n_i$$

$$(5.2) \quad r_j \sin t = \rho v_{22}$$

$$(5.3) \quad z_j + h t = \rho v_{32}.$$

Aus (5.1) und (5.2) kann ρ^2 gebildet werden. Mit (5.3) kann ρ eliminiert werden und man erhält

$$(5.4) \quad v_{22}^2(z_j + h t)^2 = v_{32}(r_j + n_i)^2.$$

(5.1) und (5.4) stellen zwei Gleichungen für die Unbekannten t und ε dar. Wenn eine Lösung (t_0, ε_0) dieses Systems existiert, dann gibt es zu dem bestimmten Achswinkel ε_0 den Verbindungspunkt

$$B_j^* : \mathbf{y}^* = (r_j \cos t_0, r_j \sin t_0, z_j + h t_0)^T,$$

der B-Linienstücke b_{j-1} und b_j .

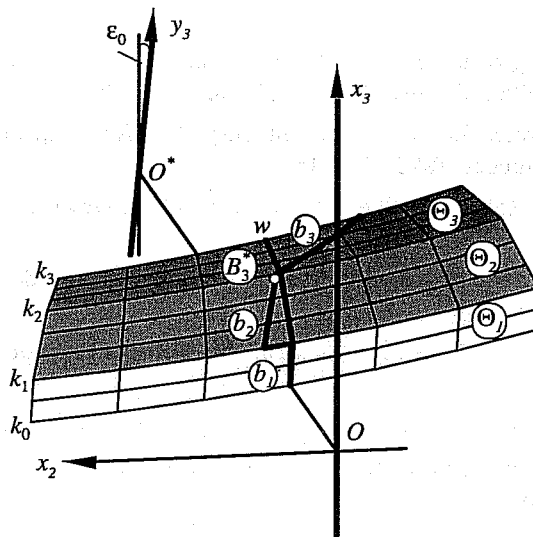


Fig. 5

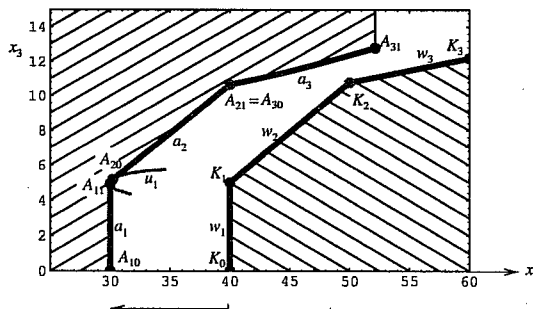


Fig. 6

Fig. 5 bzw. Fig. 6 stellt wieder die Schraubfläche Θ des Beispiels in einer Zentralprojektion bzw. in einem Achsschnitt dar. Jedoch wurde für die Kante k_2 zwischen Θ_2 und Θ_3 das Gleichungssystem (5.1); (5.4) gelöst. Die mit dem gefundenen Achswinkel ε_0 berechneten B-Linien b_j ($j = 1, 2, 3$) sind in Fig. 5 eingezeichnet. B_3^* auf k_2 verbindet jetzt erwartungsgemäß die B-Linien b_2 und b_3 . Die zugehörigen Schraubflächen $\Phi_j : \Phi(o, p, b_j)$, $j = 1, 2, 3$, besitzen dann die in Fig. 6 gezeigten Achsschnitte a_j , wobei a_2 und a_3 in $A_{21} = A_{30}$ ungeschnitten aneinander anschließen. *Wir haben damit zwei Schraubflächen $\Theta_2 \cup \Theta_3$ und $\Phi_2 \cup \Phi_3$ konstruiert, die je eine Kante besitzen und sich dennoch längs einer stetigen B-Linie $b_2 \cup b_3$ berühren.*

Literatur

- [1] BÄR, G.: Dressing of helicoids and surfaces of revolution, Int. Conference on Gears, Dresden 1996, VDI-Berichte 1230, pp. 995–1003.
- [2] BÄR, G.: Berührstreifen von Schraubflächen, 20. Kolloquium über Differentialgeometrie, München 1995, S. 3–15.
- [3] BOTTEMA, O.: Roth, B.: Theoretical Kinematics, Dover Publications, New York, 1990.
- [4] HUNT, K.H.: Kinematic Geometry of Mechanism, Clarendon Press, Oxford 1978.
- [5] KRUPPA, E.: Analytische und konstruktive Differentialgeometrie, Springer, 1957.
- [6] STACHEL, H.: Höhere Kinematik, Vorlesungsmanuskript WS'95, TU Wien.
- [7] ZINDLER, K.: Liniengeometrie mit Anwendungen, Göschensche Verlagshandlung, Leipzig 1902.