

SCHALLFRONTEN AN EBENEN KURVEN I

Hans Sachs

*Institut für Mathematik und Angewandte Geometrie, Montanuni-
versität, A-8700 Leoben, Österreich*

Ferenc Mészáros

*Institut für Mathematik und Angewandte Geometrie, Montanuni-
versität, A-8700 Leoben, Österreich*

Herrn Professor I. Gy. Maurer zum 70. Geburtstag gewidmet

Received: January 1997

MSC 1991: 53A04, 78A99

Keywords: Sonic wave fronts, plane curves, counterpoint curve, parallel curves of Pascal-limaçons.

Abstract: In applied acoustic the following problem is very important: Given a plane curve c , a sound point S and a time component L_0 . If every sonic ray is reflected on c in such a way that holds $\overline{SP} + \overline{PY} = L_0$ (P is a point of c) the set of points Y define a curve \tilde{c} , called the sonic wave front of c with respect to S and the time component L_0 . In this paper we give a general formula for \tilde{c} and show that all curves \tilde{c} are parallel curves of a central curve k ; this curve k is the counterpoint curve of c . Especially we investigate the sonic wave fronts of a straight line, a circle and a parabola. The wave fronts of a circle g.e. are parallel curves of Pascal-limaçons.

In der angewandten Akustik (vgl. [1], [2]-[5], [8]) ist u.a. das folgende Problem von großer Bedeutung: Gegeben ist eine ebene Kurve c und eine Schallquelle S (vgl. Abbildung 1).

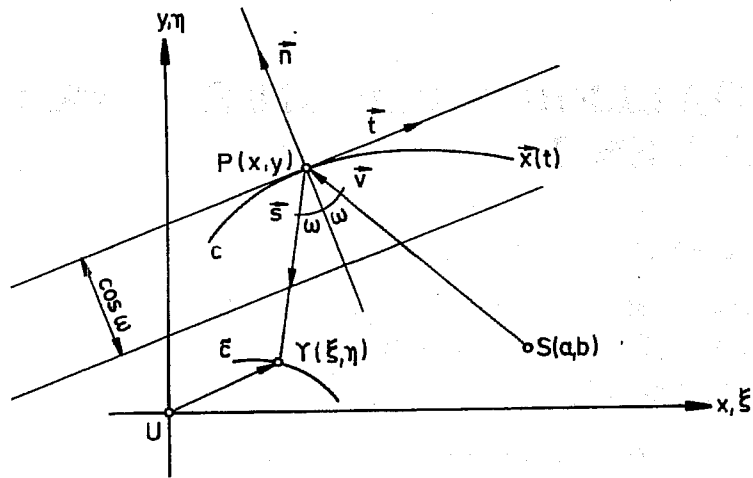


Abbildung 1

Jeder von S ausgehende Schallstrahl wird dann an der Kurve c so reflektiert, daß der Winkel ω zwischen der Geraden SP und der Kurvennormalen n gleich dem Winkel zwischen n und dem reflektierten Strahl PY ist. Wird dann eine konstante Länge L_0 von S aus so abgetragen, daß $\overline{SP} + \overline{PY} = L_0$ gilt, so wird damit ein Punkt Y eindeutig definiert, wenn man voraussetzt, daß Y so wie in der Abbildung 1 liegt. Die Punkte Y bilden bei Veränderung des Schallstrahls SP eine Kurve \tilde{c} , die man als *Schallfront* zur Länge L_0 bezüglich S und der Kurve c bezeichnet (vgl. [2]). Wird c um eine Achse a gedreht, auf der S liegt, so entsteht eine Drehfläche $\tilde{\Psi}$ und durch Drehung von \tilde{c} entsteht die zugehörige *Schallfläche* $\tilde{\Psi}$, die in der Bauakustik eine wichtige Rolle spielt. Im ersten Abschnitt der folgenden Arbeit werden die entsprechenden Formeln für Schallfronten entwickelt und eine wichtige geometrische Deutung hergeleitet; mit Hilfe eines Computer-Programms können die Schallfronten bei beliebig vorgegebener Ausgangskurve c genauestens ermittelt werden. Im zweiten Abschnitt werden die für die Praxis wichtigen Fälle einer Geraden, eines Kreises und einer Parabel betrachtet, wobei die dazugehörigen Fälle der Drehflächen 2. Ordnung ebenfalls untersucht werden. Die Behandlung weiterer wichtiger Drehflächen soll im 2. Teil der Arbeit erfolgen.

1. Beschreibung und geometrische Deutung der Schallfronten

Wir verwenden gemäß Abbildung 1 ein kartesisches Koordinatensystem $\{U; x, y\}$, in dem die Schallquelle S die Koordinaten $S(a, b)$ besitzt und in dem die Ausgangskurve c durch die Parameterdarstellung

$$(1) \quad \vec{x} = \vec{x}(t) = \{x(t), y(t)\}$$

beschrieben wird. Wir benützen weiter den Tangenteneinheitsvektor \vec{t} und den Normaleneinheitsvektor \vec{n} , der Kurve c , d.h.

$$(2) \quad \vec{t} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \{\dot{x}, \dot{y}\}, \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \{-\dot{y}, \dot{x}\},$$

sowie der Einheitsvektor \vec{v} der Richtung \overrightarrow{SP} und den Einheitsvektor \vec{s} der Richtung \overrightarrow{PY} , also

$$(3) \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \{x-a, y-b\} \quad \text{bzw.} \quad \vec{s} = \frac{\overrightarrow{PY}}{|\overrightarrow{PY}|}.$$

Aus Abbildung 1 folgt zunächst $\vec{s} + (-\vec{v}) = 2 \cos \omega (-\vec{n})$ und damit

$$(4) \quad \vec{s} = -2 \cos \omega \vec{n} + \vec{v}.$$

Besitzt Y die Koordinaten $Y(\xi, \eta)$ und wird $\overrightarrow{UY} = \vec{y}$ gesetzt, so gilt $\overrightarrow{PY} = \rho \vec{s}$, wobei man ρ aus der Beziehung $|\overrightarrow{SP}| + |\overrightarrow{PY}| = |\overrightarrow{SY}| + \rho = L_0$ zu $\rho = L_0 - |\overrightarrow{SP}|$ berechnet. Mit $|\overrightarrow{PY}| = (L_0 - |\overrightarrow{SP}|) \vec{s}$ ergibt sich damit

$$(5) \quad \vec{y} = \overrightarrow{UY} = \vec{x} + \left(L_0 - \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \right) \vec{s}.$$

Beachtet man noch, daß $\cos \omega$ gemäß (2) und (3) durch

$$(6) \quad \cos \omega = \vec{v} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} [(a-x)\dot{y} + (y-b)\dot{x}]$$

bestimmt ist, dann kann \vec{s} gemäß (4) mittels (3) bestimmt werden. Man erhält

$$(7) \quad \vec{s} = \frac{2[(x-a)\dot{y} - (y-b)\dot{x}]}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \{-\dot{y}, \dot{x}\} + \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \{x-a, y-b\}.$$

Hieraus und (5) gewinnt man schließlich die gesuchte Parameterdarstellung der Schallfront zu

$$(8) \quad \begin{aligned} \xi &= a + \frac{2[(x-a)\dot{y} - (y-b)\dot{x}]\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \left(1 - \frac{L_0}{W}\right) + \frac{L_0(x-a)}{W} \\ \eta &= b - \frac{2[(x-a)\dot{y} - (y-b)\dot{x}]\dot{x}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \left(1 - \frac{L_0}{W}\right) + \frac{L_0(y-b)}{W} \end{aligned}$$

mit $W := \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$.

Mit der Abkürzung

$$(9) \quad T := \frac{2[(x-a)\dot{y} - (y-b)\dot{x}]}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

läßt sich (8) in der übersichtlichen Gestalt

$$(10) \quad \begin{cases} \xi = a + \dot{y}T + \frac{L_0}{W}\{x - (a + \dot{y}T)\} \\ \eta = b - \dot{x}T + \frac{L_0}{W}\{y - (b - \dot{x}T)\} \end{cases}$$

schreiben. Ausführlich lautet (10)

$$(11) \quad \begin{cases} \xi = \frac{a(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) + 2\dot{y}(x\dot{y} - y\dot{x}) + 2b\dot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + \\ \quad + \frac{L_0(\dot{x}^2 - \dot{y}^2)(x-a) + 2\dot{x}\dot{y}(y-b)}{W(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} \\ \eta = \frac{-b(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) - 2\dot{x}(x\dot{y} - y\dot{x}) + 2a\dot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + \\ \quad + \frac{L_0(\dot{x}^2 - \dot{y}^2)(b-y) + 2\dot{x}\dot{y}(y-a)}{W(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} \end{cases}$$

Liegt die Schallquelle im Koordinatenursprung, dann vereinfacht sich (11) zu

$$(12) \quad \begin{cases} \xi = \frac{2\dot{y}(x\dot{y} - y\dot{x})}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + \frac{L_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{x(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) + 2y\dot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ \eta = -\frac{2\dot{x}(x\dot{y} - y\dot{x})}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + \frac{L_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y(\dot{y}^2 - \dot{x}^2) + 2x\dot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \end{cases}$$

Besonders einfach wird die Parameterdarstellung von \bar{c} , wenn man c auf die Bogenlänge s als Parameter bezieht, d.h.

$$(13) \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$$

voraussetzt; man gewinnt dann aus (12), wenn Striche Ableitungen nach den Bogenlängen bezeichnen

$$(14) \quad \begin{cases} \xi = 2y'(xy' - yx') + \frac{L_0}{\sqrt{x^2 + y^2}}[x(x'^2 - y'^2) + 2yx'y'] \\ \eta = -2x'(xy' - yx') + \frac{L_0}{\sqrt{x^2 + y^2}}[y(y'^2 - x'^2) + 2xx'y'] \end{cases}$$

Eine interessante geometrische Deutung gestattet der vor L_0 freie Bestandteil in (12), d.h. die Kurve k

$$(15) \quad \begin{cases} \xi = \frac{2\dot{y}(x\dot{y} - y\dot{x})}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ \eta = -\frac{2\dot{x}(x\dot{y} - y\dot{x})}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \end{cases}$$

Es gilt: k ist die Gegenpunktkurve zur Ausgangskurve c bezüglich der Schallquelle S .

Zum Beweis wählen wir die Schallquelle im Koordinatenursprung $S(0,0)$ und bestimmen die Normale n von S auf eine Tangente t von c . Wir berechnen zunächst die Koordinaten des Normalenfußpunktes N , den man als Schnittpunkt von n mit t erhält. Die Gleichung von t lautet mit einem auf t laufenden Punkt (X, Y)

$$(16) \quad X\dot{y} - Y\dot{x} = x\dot{y} - y\dot{x}.$$

Wird (16) mit der Normalen n

$$(17) \quad X = -\mu\dot{y}, \quad Y = \mu\dot{x}$$

geschnitten, so findet man $\mu = -\frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$, woraus sich mittels (17) die Koordinaten von N zu

$$(18) \quad N \left[\frac{2\dot{y}(x\dot{y} - y\dot{x})}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad -\frac{2\dot{x}(x\dot{y} - y\dot{x})}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right]$$

ergeben. Wird S an N gespiegelt, so erhält man den Gegenpunkt G . Die von den Punkten G gebildete Gegenpunktkurve (vgl. [11, 56]) wird unter Beachtung von (18) ersichtlich durch (15) festgelegt. Hiermit ist die Behauptung gezeigt.

Wir bezeichnen die Gegenpunktkurve k im folgenden als *Zentralkurve*. Wird c mit der Bogenlänge parametrisiert und liegt die Schallquelle S im Koordinatenursprung, dann erhält man aus (7) einen zu \vec{s} proportionalen Vektor zu

$$(19) \quad \vec{s}^* = \{-2y'(xy' - yx') + x, \quad 2x'(xy' - yx') + y\}.$$

Ein Tangentenvektor an k ergibt sich aus (14) als

$$(20) \quad \vec{r} = \begin{cases} 2y''(xy' - yx') + 2y'(xy'' - yx'') \\ -2x''(xy' - yx') - 2x'(xy'' - yx'') \end{cases}$$

und man rechnet leicht nach, daß für das innere Vektorprodukt gilt

$\vec{s}^* \cdot \vec{r} = 0$, d.h. die Zentralkurve k schneidet die reflektierten Strahlen PY stets orthogonal.

Schneidet man die Kurve c mit einem Kreis vom Radius L_0 mit dem Mittelpunkt in der Schallquelle S , so erhält man Punkte G_1, G_2, \dots , die ersichtlich Punkte von \tilde{c} sind. Wir bezeichnen diese Punkte als *Grenzpunkte*. Ist c eine algebraische Kurve n -ter Ordnung, die nicht zirkular ist, dann existieren über dem Körper der komplexen Zahlen bei algebraischer Zählung $2n$ Grenzpunkte im Endlichen.

Für spätere Anwendungen ist es wichtig aus der Zentralkurve k die Ausgangskurve c zu berechnen. Wird k durch

$$(21) \quad \{u = u(t), \quad v = v(t)\}$$

festgelegt, so folgt aus

$$(22) \quad \left\{ u = \frac{2\dot{y}(x\dot{y} - y\dot{x})}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad v = -\frac{2\dot{x}(x\dot{y} - y\dot{x})}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right\}$$

zunächst

$$(23) \quad \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{u}{v} =: h(t),$$

woraus man durch Einsetzen in die erste Gleichung von (20) zunächst

$$(24) \quad ux + vy = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$$

gewinnt. Wird (24) nach t differenziert und sodann in (23) eingesetzt, so stellt sich die Gleichung

$$(25) \quad \dot{u}x + \dot{v}y = u\dot{u} + v\dot{v}$$

ein. Aus dem linearen Gleichungssystem (24), (25) lassen sich nun x und y explizit berechnen. Man findet

$$(26) \quad \left\{ x = \frac{uv\dot{u} + \frac{1}{2}\dot{v}(v^2 - u^2)}{\dot{u}v - \dot{v}u}, \quad y = \frac{-uv\dot{v} + \frac{1}{2}\dot{u}(v^2 - u^2)}{\dot{u}v - \dot{v}u} \right\}.$$

Als grundlegende Aussage beweisen wir: *Die Schallfronten \tilde{c} sind die Parallelkurven im Abstand L_0 zur Zentralkurve k .*

Zum Beweis parametrisieren wir c mit der Bogenlänge und wählen die Schallquelle im Koordinatenursprung. Ausgehend von der Darstellung

$$(27) \quad \begin{aligned} u(s) &= 2y'(xy' - yx') \\ v(s) &= -2x'(xy' - yx') \end{aligned}$$

berechnen wir dann

$$(28) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}u'(s) = \frac{-x''}{y'} [y(y'^2 - x'^2) + 2xx'y'] \\ \frac{1}{2}v'(s) = \frac{x''}{y'} [x(x'^2 - y'^2) + 2yx'y'] \end{cases},$$

wobei zur Umformung, die aus (13) fließende Beziehung $y'' = -\frac{x'x''}{y'}$

benützt wurde. Weiter folgt unter Beachtung von (13) aus (28)

$$(29) \quad \sqrt{u'^2 + v'^2} = \frac{2x''}{y'} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Beachtet man schließlich, daß die Parallelkurve zu (27) im Abstand L_0 durch

$$(30) \quad \begin{cases} \xi = u + \frac{L_0 v'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}} \\ \eta = v - \frac{L_0 u'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}} \end{cases}$$

gegeben ist (vgl. [7,67]), dann folgt aus (28), (29) und (14) die Behauptung. Wir fassen zusammen im

Satz 1. Die Schallfronten \bar{c} einer Kurve c mit der Parameterdarstellung (1) sind durch (11) gegeben, wobei die Schallquelle durch $S(a, b)$ festgelegt wird. Die Schallfronten sind die Parallelkurven im Abstand L_0 zur Zentralkurve $k(L_0 = 0)$; sie enthalten stets die zu L_0 gehörigen Grenzpunkte. Die Zentralkurve ist die Gegenpunktkurve zur Ausgangskurve c bezüglich der Schallquelle S und schneidet alle reflektierten Strahlen orthogonal. Bei vorgegebener Zentralkurve $k\{u = u(t), v = v(t)\}$ wird die Ausgangskurve durch (26) festgelegt.

2. Schallfronten bezüglich einer Geraden, eines Kreises und einer Parabel

Um die Schallfront zunächst bezüglich einer Geraden c zu bestimmen, genügt es die Schallquelle im Koordinatenursprung zu wählen und c in der Form $\{x = c_0, y = t\}$ anzusetzen. Mittels (12) gewinnt man dann als Parameterdarstellung von \bar{c}

$$(31) \quad \begin{cases} \xi = 2c_0 - \frac{c_0 L_0}{\sqrt{c_0^2 + t^2}} \\ \eta = \frac{L_0 t}{\sqrt{c_0^2 + t^2}} \end{cases},$$

und hieraus unmittelbar die Gleichung

$$(32) \quad (\xi - 2c_0)^2 + \eta^2 = L_0^2.$$

Dies ist ein Kreis \bar{c} vom Radius L_0 und dem Mittelpunkt $M(2c_0, 0)$; die Gegenpunktkurve k ist hier zu einem Punkt entartet. \bar{c} schneidet die Gerade c in den beiden Grenzpunkten $G_1(c_0, \sqrt{L_0^2 - c_0^2})$ und

$G_2(c_0, -\sqrt{L_0^2 - c_0^2})$ (vgl. Abbildung 2) und man erkennt, daß die Fragestellung nur für $L_0 > c_0$ sinnvoll ist.

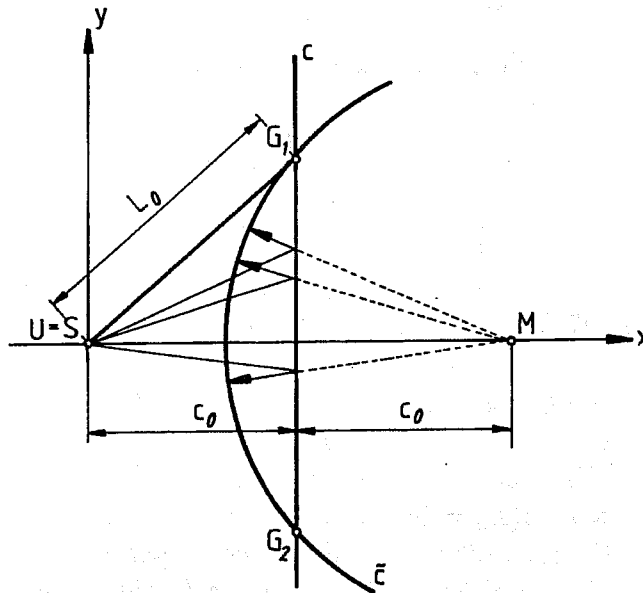


Abbildung 2

Die Schallfront besteht aus dem Kreisbogen P_1P_2 , der auf derselben Seite von c liegt wie die Schallquelle. Bei Drehung von c um die y -Achse als Drehachse a erzeugt c einen *Drehzylinder* Ψ , während \bar{c} einen *Torus* $\tilde{\Psi}$ erzeugt. Dieser besitzt die Achse des Drehzylinders als *Torusachse* und als *Mittlenkreis* die Bahn des Punktes M bei der Drehung um a . Für $L_0 < 2c_0$ ist die Schallfläche Teil eines Ringtorus, für $L_0 > 2c_0$ Teil eines Spindeltorus (vgl. [10, 150]). Ist die Gerade c nicht parallel zur Drehachse a , dann zeigt die obige Konstruktion, daß die Schallfläche $\tilde{\Psi}$ eines Drehkegels Ψ mit der Achse a und dem Schallzentrum S auf a ebenfalls ein *Torus* ist. Der Mittlenkreis von $\tilde{\Psi}$ ergibt sich wieder durch Drehung von M um die Achse des Drehkegels. Bezeichnet h den Abstand der Schallquelle S von der Kegelspitze und α den Öffnungswinkel des Drehkegels Ψ , so findet man als Abstand des Punktes M von der Drehachse $\overline{Ma} = h \sin \alpha$. Demnach ist $\tilde{\Psi}$ für $L_0 < h \sin \alpha$ ein *Ringtorus*, für $L_0 = h \sin \alpha$ ein *Dorntorus* und für $L_0 > h \sin \alpha$ ein *Spindeltorus*. Wir fassen zusammen im

Satz 2. Die Schallfront einer Geraden ist stets ein Kreisbogen. Die Schallfläche eines Drehzylinders für eine Schallquelle auf der Drehachse

ist Teil eines Ringtorus bzw. Spindeltorus. Die Schallfläche eines Drehkegels für eine Schallquelle auf der Drehachse und verschieden von der Kegelspitze ist Teil eines Ringtorus, Spindeltorus oder Dorntorus.

Als nächstes bestimmen wir die Schallfront eines Kreises c . Wegen der Drehsymmetrie von c dürfen wir o.B.d.A. den Kreismittelpunkt im Koordinatenursprung wählen und die Schallquelle durch $S(a, 0)$ festlegen. Dann wird c erfaßt durch

$$(33) \quad x = r \cos t, \quad y = r \sin t,$$

wenn r den Kreisradius bezeichnet. Mit $\dot{x} = -r \sin t, \dot{y} = r \cos t$ und $W = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos t}$ erhält man dann aus (11) nach einiger Rechnung

$$(34) \quad \begin{cases} \xi = -a \cos 2t + 2r \cos t + L_0 \frac{a \cos 2t - r \cos t}{\sqrt{r^2 + a(a - 2r \cos t)}} \\ \eta = -a \sin 2t + 2r \sin t + L_0 \frac{a \sin 2t - r \sin t}{\sqrt{r^2 + a(a - 2r \cos t)}} \end{cases}$$

Als Zentralkurve k erhält man aus (34)

$$(35) \quad \begin{cases} \xi = -a \cos 2t + 2r \cos t \\ \eta = -a \sin 2t + 2r \sin t \end{cases}$$

d.h. in komplexer Darstellung

$$(36) \quad \zeta = \xi + i\eta = 2re^{it} - ae^{2it},$$

also eine *Pascal-Schnecke*, mit der Schallquelle S als singulärem Punkt. Dies stimmt mit der bekannten Aussage überein, wonach die Fußpunktcurve eines Kreises und damit auch die Gegenpunktcurve eine *Pascal-Schnecke* ist (vgl. [11, 55f]). Die Schallfronten \tilde{c} sind somit *Parallelkurven* zu *Pascal-Schnecken*. Die Radlinien 2. Stufe (36) mit der Charakteristik $\omega_1 : \omega_2 = 1 : 2$ sind genau dann zyklodal (vgl. [11, 152]), wenn $|2r| = |2a|$, d.h. $a = \pm r$ gilt. In diesem Fall liegt die Schallquelle auf dem Kreis c und k ist eine *Kardioide* mit der Spitze S . Betrachten wir i.f. den Sonderfall $a = r$, dann wird $W = \sqrt{2r^2(1 - \cos t)} = 2r \sin \frac{t}{2}$ und mittels goniometrischer Umformungen kann (34) vereinfacht werden zu

$$(37) \quad \begin{cases} \xi = -r \cos 2t + 2r \cos t - L_0 \sin \frac{3t}{2} \\ \eta = -r \sin 2t + 2r \sin t + L_0 \cos \frac{3t}{2} \end{cases}$$

Schließlich läßt sich (37) in komplexer Form schreiben als

$$(38) \quad \zeta = -re^{2it} + 2re^{it} + iL_0 e^{\frac{3i}{2}t}.$$

Setzt man noch $\frac{1}{2}t = u$, dann folgt aus (38)

$$(39) \quad \zeta = 2re^{2iu} - re^{4iu} + iL_0e^{3iu}$$

und man erkennt, daß diese Kurve eine *Radlinie 3. Stufe der Sippencharakteristik* $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = 2 : 4 : 3$ ist (vgl. [9, 280]). Es handelt sich somit um eine algebraische Kurve 8. Ordnung (vgl. [9, 283]). Sie läßt sich durch eine Planetenbewegung 3. Stufe erzeugen (vgl. [11, 165], wobei sich die Stäbe $\overline{UA_1}$, $\overline{A_1A_2}$ und $\overline{A_2A_3}$ mit den Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 4$ und $\omega_3 = 3$ drehen. Die Abbildung 3 zeigt die Schallfronten im Fall eines Kreises, wobei die Schallquelle auf dem Kreis gewählt wurde. Die Zentralkurve

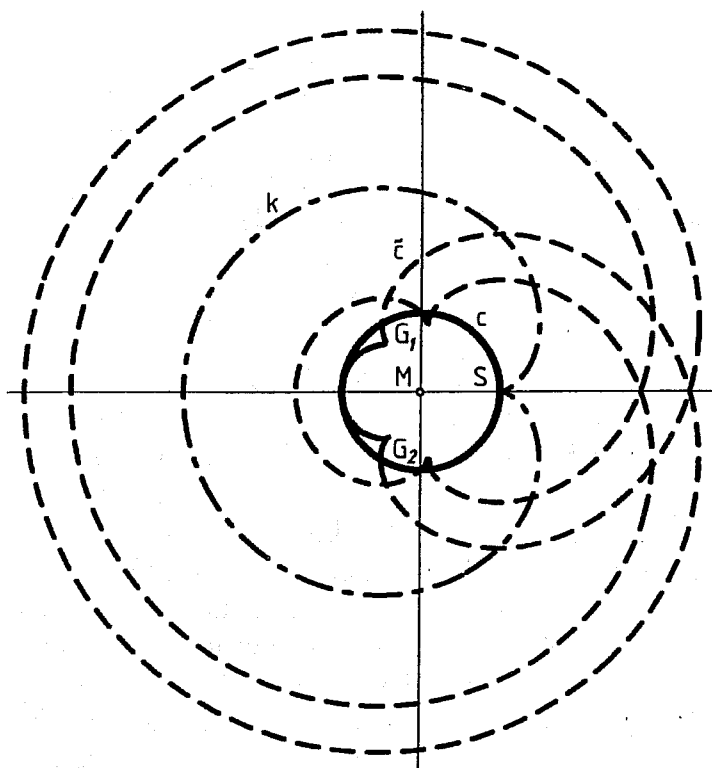


Abbildung 3

ist hier eine Kardioide. Die Schallfronten ragen mit Spitzen in das Innere des Kreises hinein. Für jede Schallfront ergeben sich 2 Grenzpunkte G_1, G_2 über dem Körper der komplexen Zahlen. Um auch im allgemeinen Fall die Ordnung der Kurven (34) zu bestimmen, bilden wir aus (34) unter Beachtung von $2ar \cos t = ar(e^{it} + e^{-it})$

$$(40) \quad \zeta = -ae^{2it} + 2re^{it} + L_0 \frac{ae^{2it} - re^{it}}{\sqrt{a^2 + r^2 - ar(e^{it} + e^{-it})}}.$$

Setzt man in (40) $e^{it} =: u$, dann lautet diese Gleichung in *Minimalkoordinaten*

$$(41) \quad \zeta = -au^2 + 2ru + L_0 \frac{au^2 - ru}{\sqrt{a^2 + r^2 - ar(u + u^{-1})}}$$

$$\bar{\zeta} = -au^{-2} + 2ru^{-1} + L_0 \frac{au^{-2} - ru^{-1}}{\sqrt{a^2 + r^2 - ar(u^{-1} + u)}}$$

und durch Einsetzen in eine Geradengleichung $\bar{A}\zeta + A\bar{\zeta} + \gamma = 0$ ($\gamma \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{C}$) erhält man nach einiger Rechnung ein Polynom von Grad 10 in u mit dem höchsten Glied $a^3r\bar{A}^2$ d.h. \bar{c} ist für $a \neq 0$, $|a| \neq r$ eine *algebraische Kurve 10. Ordnung*. Dreht man die Kurve (39) bzw. (41) um die Achse SM , so entsteht eine Drehfläche der Ordnung 8 bzw. 10 (vgl. [6, 178]), da SM eine Symmetrieachse bezüglich dieser Kurve ist. Wir fassen zusammen und beweisen ergänzend den

Satz 3. *Die Schallfronten \bar{c} eines Kreises c mit dem Radius r zur Schallquelle $S(a, 0)$ sind bei allgemeiner Lage der Schallquelle Parallelkurven zu einer Pascal-Schnecke k , wobei der singuläre Punkt von k in der Schallquelle S liegt. Liegt S auf dem Kreis c , dann ist \bar{c} eine Radlinie 3. Stufe mit der Gleichung (39) und eine Parallelkurve zu einer Kardioide. Liegt S im Kreismittelpunkt, dann ist \bar{c} ein Kreis bzw. entartet zum Kreismittelpunkt. Die Kurven \bar{c} sind im allgemeinen Fall algebraische Kurven 10. Ordnung; falls S auf c liegt ist \bar{c} eine algebraische Kurve 8. Ordnung. Die Schallflächen einer Kugel bezüglich einer Schallquelle S sind für $S = M$ konzentrische Kugeln um S bzw. der Punkt S , falls $L_0 = 2r$ gilt. Falls S auf der Kugel liegt, dann sind die Schallflächen algebraische Flächen 8. Ordnung, die sich durch Drehung der Meridiankurve (39) um die Achse SM einstellen. Liegt S weder auf der Kugel noch in M , dann sind die Schallflächen algebraische Flächen 10. Ordnung, die durch Drehung der Meridiankurve (34) um die Achse SM entstehen.*

Zum Beweis der vorletzten Aussage bemerken wir, daß die Fußpunktcurve von c bezüglich $S = M$ der Kreis c selbst ist. k ist ein doppelt so großer Kreis mit dem Mittelpunkt $M = S$. Die Schallflächen sind dann die Parallelkugeln zu der von k erzeugten Kugel; für $L = 2r$ stellt sich der Punkt S ein.

Wir untersuchen schließlich die Schallfronten bezüglich einer Parabel c . Eine Parabel mit der Gleichung $y = px^2$ besitzt den Brennpunkt

$F(0, \frac{1}{4p})$ und kann in der Gestalt

$$(42) \quad \{x = t, \quad y = pt^2\}$$

parametrisiert werden. Aus (42) ergibt sich mittels (11) als Schallfront \tilde{c} zur Schallquelle $S(0, b)$ nach einiger Rechnung

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{4pt(pt^2 + b)}{1 + 4p^2t^2} + \\ \quad + \frac{L_0t(1 - 4bp)}{\sqrt{t^2 + (pt^2 - b)^2}(1 + 4p^2t^2)} \\ \eta = \frac{2pt^2(2bp - 1) - b}{1 + 4p^2t^2} + \\ \quad + \frac{L_0}{\sqrt{t^2 + (pt^2 - b)^2}} \cdot \frac{4p^3t^4 + pt^2(3 - 4bp) + b}{1 + 4p^2t^2} \end{array} \right.$$

Wir betrachten zunächst den *Sonderfall*, daß $4bp = 1$ gilt, d.h. daß die *Schallquelle S im Parabelbrennpunkt* liegt. Dann gilt

$$W = \sqrt{t^2 + (pt^2 - b)^2} = pt^2 + \frac{1}{4p}$$

und (43) vereinfacht sich zu

$$(44) \quad \left\{ \xi = t, \quad \eta = -\frac{1}{4p} + L_0 \right\}.$$

Die Schallfront \tilde{c} ist somit die Gerade

$$(45) \quad \eta = L_0 - \frac{1}{4p},$$

die die Parabelachse senkrecht schneidet und von der *Leitlinie der Parabel* den Abstand L_0 besitzt. Alle zu $S = F$ gehörigen Schallfronten sind somit Geraden. Diese Aussage ergibt sich auch unmittelbar aus Satz 1: Die Gegenpunktkurve einer Parabel c bezüglich des Brennpunktes $S = F$ ist ja bekanntlich die Leitlinie der Parabel.

Durch Drehung um die Parabelachse erkennt man: *Alle Schallflächen eines Drehparaboloids bezüglich des Brennpunktes als Schallquelle sind Ebenen parallel zur Leitebene des Paraboloids im Abstand L_0 .* Dieser Sonderfall ist schon lange bekannt (vgl. [4]).

Als weitere Sonderfälle sind der Fall $b = 0$, sowie der Fall $b = -\frac{1}{4p}$ von Interesse. Im *ersten Fall* liegt die Schallquelle im Parabelscheitel und die Zentralkurve k ist eine *Kissoide* mit der Spitze in der Schallquelle S (vgl [12, 155]). Aus (43) gewinnt man für $b = 0$ ihr *Parameterdarstellung* zu

$$(46) \quad \left\{ \xi = \frac{4p^2t^3}{1+4p^2t^2}, \quad \eta = -\frac{2pt^2}{1+4p^2t^2} \right\},$$

aus der man ihre *algebraische Gleichung*

$$(47) \quad 2py(x^2 + y^2) + x^2 = 0.$$

berechnet. Als Schallfronten ergeben sich aus (43) für $b = 0$ die Kurven

$$(48) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{4p^2t^3}{1+4p^2t^2} + \frac{L_0}{(1+4p^2t^2)\sqrt{1+p^2t^2}} \\ \eta &= -\frac{2pt^2}{1+4p^2t^2} + \frac{pL_0t(4p^2t^2+3)}{(1+4p^2t^2)\sqrt{1+p^2t^2}} \end{aligned} \right.$$

Zur Bestimmung der Ordnung der Kurve (48) wird (48) in eine Geradengleichung $A\xi + B\eta = C$ eingesetzt. Nach einiger Rechnung stellt sich als Schnittbedingung ein Polynom 8. Geraden in t ein, womit die Kurven (48) als Kurven 8. Ordnung erkannt sind.

Im *zweiten Fall* liegt die Schallquelle im Schnittpunkt L der Leitlinie der Parabel mit der Parabelachse und die Zentralkurve k ist daher eine *gerade Strophoide* (vgl. [12, 157f]). Man erhält aus (43) für sie die Parameterdarstellung

$$(49) \quad \left\{ \xi = \frac{t(4p^2t^2-1)}{1+4p^2t^2}, \quad \eta = \frac{(1-12p^2t^2)}{4p(1+4p^2t^2)} \right\},$$

während sich als Schallfronten die Kurven

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{t(4p^2t^2-1)}{1+4p^2t^2} + \frac{8L_0pt}{(1+4p^2t^2)\sqrt{16p^4t^4+24p^2t^2+1}} \\ \eta &= \frac{(1-12p^2t^2)}{4p(1+4p^2t^2)} + \frac{L_0(16p^4t^4+16p^2t^2-1)}{(1+4p^2t^2)\sqrt{16p^4t^4+24p^2t^2+1}} \end{aligned} \right.$$

einstellen. Eine ähnliche Überlegung wie im vorigen Fall zeigt, daß es sich bei den Kurven (50) um algebraische Kurven 10. Ordnung handelt. Im allgemeinen Fall (43) liegen ebenfalls algebraische Kurven 10. Ordnung vor, die sich als Parallelkurven zu den algebraischen Kurven 3. Ordnung

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{4pt(pt^2+b)}{1+4p^2t^2} \\ \eta &= \frac{2pt^2(2bp-1)-b}{1+4p^2t^2} \end{aligned} \right.$$

ergeben. Wir vermerken den

Satz 4. Die Schallfronten \tilde{c} einer Parabel c für den Brennpunkt F als Schallquelle S sind Geraden, die von der Leitlinie der Parabel den Ab-

stand L_0 besitzen. Liegt S im Parabelscheitel, dann sind die Schallfronten (48) Parallelkurven zu einer Kissoide (47) und zwar algebraische Kurven 8. Ordnung. Liegt die Schallquelle im Schnittpunkt der Leitlinie der Parabel mit der Parabelachse, dann sind die Schallfronten Parallelkurven zu einer geraden Strophoide, nämlich algebraische Kurven 10. Ordnung mit der Parameterdarstellung (50). Im allgemeinen Fall sind die Schallfronten algebraische Kurven 10. Ordnung, die sich als Parallelkurven zu den algebraischen Kurven 3. Ordnung (51) einstellen. Die Schallflächen $\tilde{\Psi}$ eines Drehparaboloids bezüglich des Brennpunktes als Schallquelle sind Ebenen parallel zur Leitebene des Drehparaboloids, die von der Leitebene den Abstand L_0 besitzen. Die Schallflächen bezüglich des Paraboloidscheitels sind algebraische Flächen 8. Ordnung, die sich durch Drehung der Kurven (48) um die Paraboloidachse ergeben. Im allgemeinen Fall sind die Schallflächen Drehflächen 10. Ordnung mit der Kurve (43) als Meridiankurve.

Literatur

- [1] BERANEK, L.: Musik, Acoustics and Architecture, New York-London, 1962.
- [2] CREMER, L. und MÜLLER, H. A.: Die wissenschaftlichen Grundlagen der Raumakustik, Band I und II, S. Hirzel Verlag Stuttgart, 1978.
- [3] KARÁNÉ, G.: Bauakustische Prüfung in neuen Wohngebäuden, herausgegeben von ÉTK, Budapest, 1967.
- [4] KARÁNÉ, G.: Raumakustische Prüfung im Bauwesen angewandter geometrischer Oberflächen unter Anwendung der Anaglyphenmethode, Dissertation an der TU-Budapest 1986.
- [5] KARÁNÉ, G.: Raumakustische Prüfungen in der Baukunst angewandter geometrischer Oberflächen, *Periodica Politechnica Architecture* **35**/1-2, 1991.
- [6] MÜLLER, E. und KRUPPA E.: Lehrbuch der Darstellenden Geometrie, Springer-Verlag, Wien, 1948.
- [7] STRUBECKER, K.: Differentialgeometrie I, Sammlung Götschen, **1113/1113a**, Berlin 1964.
- [8] TARNÓCZY, T.: Teremakusztika I és II, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1986.
- [9] WUNDERLICH, W.: Höhere Radlinien, *Österreichisches Ingenieurarchiv* **1** (1947), 277-296.
- [10] WUNDERLICH, W.: Darstellende Geometrie I, BI-Hochschultaschenbücher **96/96a**, Mannheim/Wien/Zürich, 1966.
- [11] WUNDERLICH, W.: Ebene Kinematik, BI-Hochschultaschenbücher **447/447a**, Mannheim/Wien/Zürich, 1970.
- [12] ZWIKKER, C.: Advanced plane geometry, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1950.