

ÜBER DIE ENGE VON KUGEL- PACKUNGEN UND DICKE VON PUNKTSYSTEMEN IN HYPER- BOLISCHEN RÄUMEN

Jenő Horváth

Department of Mathematics, University of Forestry and Wood Science, H-9000 Sopron, P.O.Box 138, Hungary

Ágota H. Temesvári

Department of Mathematics, University of Forestry and Wood Science, H-9000 Sopron, P.O.Box 138, Hungary

Received: December 1995

MSC 1991: 52 C 17

Keywords: Close packing of balls, thick point sets, hyperbolic space.

Abstract: It is given a lower bound for the closeness of packings of balls (Th. 1) and an upper bound for the thickness of point sets (Th. 2) in d -dimensional hyperbolic spaces. The bounds are improved for $d = 2$ (Th. 3, 4 and 5).

1. Einleitung

1.1. Die Menge $\{K_i(r)\}$ von offenen Kugeln mit Radius r bildet eine *Packung* im d -dimensionalen hyperbolischen Raum H^d , wenn zwei beliebige Elemente von $\{K_i(r)\}$ keinen gemeinsamen Punkt haben. Das Supremum der Radien der Kugeln, die in einem von den Kugeln der Packung $\{K_i(r)\}$ nicht überdeckten Teil des Raumes liegen, wird die *Enge* der gegebenen Packung $\{K_i(r)\}$ genannt und wird mit $e_d(K_i(r))$ bezeichnet. Das Problem im Zusammenhang mit der Enge in Räumen von konstanter Krümmung entstand von L. Fejes Tóth (1976). Die

Grundaufgabe ist die Bestimmung des Infimums der Engen $e_d(K_i(r))$ bei angegebenen r und d , wenn wir alle mögliche Kugelpackungen betrachten. Das Infimum der Engen wird mit $e_d(r)$ bezeichnet. Die Packungen, deren Enge $e_d(r)$ ist, werden *engste Packungen* von Kugeln mit Radius r im H^d genannt. Auch die Bestimmung dieser extremalen Kugelpackungen gehört zur Aufgabe, falls solche Packungen existieren. Mit anderen Worten bedeutet die Bestimmung von $e_d(r)$ bei angegebenen r und d das folgende. Wir suchen die Kugel vom größtmöglichen Radius im H^d , die man noch in einer beliebigen Packung von Kugeln mit Radius r unter der Bedingung einlagern kann, daß diese Kugel die Kugeln von $\{K_i(r)\}$ nicht schneidet.

1.2. Das Punktsystem Σ im H^d wird ein $\langle 1,1 \rangle$ -System (nach Delone (1937) (r, R) -System) genannt, wenn solche positive reelle Zahlen r und R existieren, für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1.2.1. Eine beliebige offene Kugel vom Radius r im H^d enthält höchstens einen Punkt von Σ .

1.2.2. Mindestens einer Punkt von Σ liegt in einer beliebigen abgeschlossenen Kugel vom Radius R im H^d .

Es seien $r_1 = \sup r$ und $R_1 = \inf R$ die reellen Zahlen bei einem angegebenen $\langle 1,1 \rangle$ -System Σ , für die die Bedingungen 1.2.1. und 1.2.2. noch erfüllt sind. Der Quotient $\frac{r_1}{R_1}$ wird die Dicke von Σ genannt. Es bezeichne $\kappa_d(\Sigma)$ die Dicke von Σ , d.h.

$$\kappa_d(\Sigma) = \frac{r_1}{R_1}.$$

1.2.3. Es sei $r_0 > 0$ eine angegebene reelle Zahl. Wir bezeichnen mit $\{\Sigma(r_0)\}$ die Menge der $\langle 1,1 \rangle$ -Punktsysteme, für die

$$r_1 = \sup r \leq r_0$$

gilt.

Die Grundaufgabe ist, das Supremum der Dicken der zu $\{\Sigma(r_0)\}$ gehörigen $\langle 1,1 \rangle$ -Punktsysteme bei gegebenen r_0 und d zu bestimmen und die Punktsysteme mit dieser extremalen Dicke zu finden, falls die existieren. Es sei

$$\kappa_d(r_0) = \sup_{\Sigma \in \{\Sigma(r_0)\}} \kappa_d(\Sigma).$$

Ryskov (1970, 1974) beschäftigte sich mit diesem Problem im euklidischen Raum. Er charakterisierte die Punktsysteme mit dem Quotient $\frac{\inf R}{\sup r}$. Dieser Quotient wurde bei ihm als Dichte des Punktsystems definiert.

1.3. Es ist leicht einzusehen, daß die Probleme in 1.1. und 1.2. im euklidischen Raum äquivalent sind und die Definition der Punktmenge $\{\Sigma(r_0)\}$ wegen der Existenz der Ähnlichkeit nicht notwendig ist.

Die folgenden Tabellen enthalten die Ergebnisse im d -dimensionalen euklidischen Raum E^d .

1.3.1. Im gitterförmigen Fall für

$d = 2$	L. Fejes Tóth (1976), S. S. Ryskov (1970)
$d = 3$	S. S. Ryskov (1970), J. Horváth (1977)
$d = 4$	J. Horváth (1980)
$d = 5$	J. Horváth (1986)

Ryskov (1974) hat zur Bestimmung der extremalen gitterförmigen Punktsysteme im E^d eine Methode ausgearbeitet. Horváth (1986) entwickelte diese Methode weiter.

1.3.2. Im nicht gitterförmigen Fall für

$d = 2$	L. Fejes Tóth (1976), S. S. Ryskov (1974)
$d = 3$	K. Böröczky (1986)

1.4. Im zweiten Abschnitt dieser Arbeit geben wir für die Engen der Kugelpackungen im H^d eine untere Abschätzung abhängig von den Kugelradien, die in unendlich vielen Fällen in H^2 genau ist. Wir geben auch eine obere Schranke abhängig von r_0 für die Dicken von Punktsystemen im H^d , die wieder für H^2 in unendlich vielen Fällen genau ist. Auch die Monotonie der Funktionen in diesen Abschätzungen werden hier untersucht.

Im dritten Abschnitt werden diese Abschätzungen in der hyperbolischen Ebene verbessert.

2. Abschätzungen im H^d

Zuerst beweisen wir zwei Lemmas. Es bezeichne $\mathcal{R}(a)$ den Umkugelradius des regulären Simplexes mit Kantenlänge $2a$. Nach einfachen Rechnungen ergibt sich

$$(1) \quad \sinh \mathcal{R}(a) = \sqrt{\frac{2d}{d+1}} \sinh a.$$

Lemma 1. Die Funktion $f(a) = \mathcal{R}(a) - a$ ist streng monoton wachsend und beschränkt und zwar

$$(2) \quad f(a) < \operatorname{Arcosh} \frac{3d+1}{2\sqrt{2d(d+1)}}.$$

Beweis. Es sei $c = \sqrt{\frac{2d}{d+1}}$, wo $d \geq 2$. Es gilt $c > 1$ offenbar. Wir zeigen, wenn

$$(3) \quad \sinh \mathcal{R}(a) = c \sinh a,$$

dann ist die Funktion $f(a) = \mathcal{R}(a) - a$ streng monoton wachsend. Wir bilden die Ableitung von $f(a)$ und ergibt sich

$$(4) \quad f'(a) = \mathcal{R}'(a) - 1.$$

Aus (1) folgt

$$\mathcal{R}'(a) \cosh \mathcal{R}(a) = c \cosh a.$$

Wir drücken $\mathcal{R}'(a)$ aus und setzen in (4) ein. Man erhält

$$f'(a) = \frac{1}{\cosh \mathcal{R}(a)} (c \cosh a - \cosh \mathcal{R}(a)).$$

Es genügt zu zeigen, daß

$$(5) \quad c^2 \cosh^2 a - \cosh^2 \mathcal{R}(a) > 0$$

für $c > 1$ gilt. Daraus folgt schon $f'(a) > 0$ und damit die entsprechende Monotonie von $f(a)$.

Auf Grund der Identität $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ und (1) haben wir

$$c^2 \cosh^2 a - \cosh^2 \mathcal{R}(a) = c^2 - 1 > 0,$$

d.h., (5) gilt.

Wir zeigen, daß $f(a)$ eine beschränkte Funktion ist. Aus (1) folgt

$$\cosh(\mathcal{R}(a) - a) = \cosh \mathcal{R}(a) \cosh a - \sinh \mathcal{R}(a) \sinh a =$$

$$= \cosh \mathcal{R}(a) \cosh a - c \sinh^2 a.$$

Nach der Anwendung von (1) und wohlbekannten Identitäten erhält man

$$(6) \quad \cosh(\mathcal{R}(a) - a) = \frac{1 - c^2}{\sqrt{\frac{1}{\cosh^2 a} + c^2 \tanh^2 a} + c} + c.$$

Die Funktion $f(a) = \mathcal{R}(a) - a$ ist streng monoton wachsend, folglich hat $\cosh(\mathcal{R}(a) - a)$ dieselbe Monotonie. Aus (6) ergibt sich

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} (\mathcal{R}(a) - a) = \operatorname{Arcosh} \frac{3d+1}{2\sqrt{2d(d+1)}}.$$

Das gibt aber eine obere Schranke für $f(a)$. \diamond

$$\text{Es sei } f_1(d) = \operatorname{Arcosh} \frac{3d+1}{2\sqrt{2d(d+1)}}.$$

Bemerkungen.

a. Es ist leicht einzusehen, daß auch $f_1(d)$ streng monoton wachsend und beschränkt ist. Es gilt

$$f_1(d) < \lim_{d \rightarrow +\infty} f_1(d) = \operatorname{Arcosh} \frac{3}{2\sqrt{2}} = 0,34657359\dots$$

b. Es ist nicht schwer zu beweisen, daß $f_1(d)$ den Radius der d -dimensionalen Kugel bedeutet, die $d + 1$ paarweise berührende Horosphären im H^d berührt.

c. Wir haben in den Formeln mit dem natürlichen Parameter gerechnet und im folgenden wenden wir diesen Parameter an.

Lemma 2. Die Funktion

$$h(a) = \frac{a}{\mathcal{R}(a)}$$

ist streng monoton wachsend und $\lim_{a \rightarrow +\infty} h(a) = 1$.

Beweis. Aus Lemma 1. folgt die Behauptung $\lim_{a \rightarrow +\infty} h(a) = 1$. (Es wächst nämlich $\mathcal{R}(a)$ und gilt $0 < \mathcal{R}(a) - a < f_1(d)$.) Die erste Ableitung von $h(a)$ ist

$$(7) \quad h'(a) = \frac{1}{\mathcal{R}^2(a)} (\mathcal{R}(a) - \mathcal{R}'(a)a).$$

Es sei $p(a) = \mathcal{R}'(a)a - \mathcal{R}(a)$. Aus $p(a) < 0$ folgt offenbar $h'(a) > 0$, d.h., $h(a)$ ist streng monoton wachsend.

Es gilt $p(0) = 0$ auf Grund (1) und (7). Es genügt zu zeigen, daß $p'(a) < 0$ für $a > 0$ ist. Aus (1), (3) und (7) folgt

$$(8) \quad p(a) = \frac{ca \cosh a}{\cosh \mathcal{R}(a)} - \mathcal{R}(a).$$

Auf Grund der Formeln (1), (7) und (8) ergibt sich

$$p'(a) = \frac{ca \sinh a}{\cosh^3 \mathcal{R}(a)} (1 - c^2).$$

Wegen $c > 1$ ist aber $p'(a) < 0$ für $a > 0$. \diamond

Satz 1. Bildet die Menge $\{K_i(r)\}$ der offenen Kugeln vom Radius r eine Packung im H^d , dann ist die Enge der Packung mindestens $\mathcal{R}(r) - r$ (vgl. $\mathcal{R}(a)$ in (1)), d.h., $e_d(K_i(r)) \geq \mathcal{R}(r) - r$ ist. Gleichheit tritt nur für $d = 2$ und im Fall ein, wenn ein reguläres Dreiecksmosaik der Seitenlänge $2r$ in der Ebene H^2 existiert.

Beweis. Wir betrachten die Menge der Kugelmittelpunkte in der Packung. Dieses Punktsystem wird mit $\{O_i\}$ bezeichnet. Eine Kugel wird Stützkugel oder L -Kugel des Punktsystems $\{O_i\}$ genannt, wenn die Kugelfläche mindestens $d+1$ nicht in einer Hyperebene liegenden Punkte von $\{O_i\}$ enthält und kein Punkt aus $\{O_i\}$ im Inneren der Kugel liegt. Die konvexe Hülle der auf einer Stützkugelfläche liegenden Punkte von $\{O_i\}$ ist ein Stützpolytop oder L -Polytop. Wir können immer $d+1$ nicht

in einer Hyperebene liegende Ecken des Stützpolytops auswählen. Diese Ecken bilden ein Simplex, dessen Kanten die Mindestlänge $2r$ haben. Es ist einfach zu beweisen, daß der Umkugelradius dieses Simplexes mindestens $\mathcal{R}(r)$ ist und der Fall $\mathcal{R}(r)$ nur für das reguläre Simplex von der Seitenlänge $2r$ eintritt. (Der Beweis findet man in Böröczky (1986).) Daraus folgt, daß es eine Kugel vom Mindestradius $\mathcal{R}(r) - r$ um den Mittelpunkt der Stützkugel gibt, die keinen gemeinsamen Punkt mit den Kugeln der Packung hat. Das gilt natürlich für alle Stützkugelmittelpunkte.

Daraus folgt, daß $e_d(K_i(r)) \geq \mathcal{R}(r) - r$ ist und Gleichheit nur im Fall eintreten kann, wenn die L -Polytope reguläre Simplexe der Kantenlänge $2r$ sind. Für $d \geq 3$ existieren solche Kugelpackungen nicht. In der hyperbolischen Ebene kann aber das Minimum der Engen $e_d(r)$ gleich $\mathcal{R}(r) - r$ sein. Dann bestimmen die Kreismittelpunkte ein reguläres Dreiecksmosaik, wobei die Winkel eines regulären Dreiecks gleich $\frac{2\pi}{p}$, $p \in \mathbb{Z}$ und $p \geq 7$ ist. \diamond

Satz 2. *Es sei die positive reelle Zahl r_0 gegeben. Die Dicke eines beliebigen Punktsystems von $\{\Sigma(r_0)\}$ ist höchstens $\frac{r_0}{\mathcal{R}(r_0)}$, d.h.,*

$$(9) \quad \kappa_d(\Sigma(r_0)) \leq \frac{r_0}{\mathcal{R}(r_0)}$$

gilt. Gleichheit tritt nur für die im Satz 1. erwähnten Fälle ein.

Beweis. Wir betrachten wieder die zum angegebenen Punktsystem Σ gehörigen Stützkugeln. Es sei $r_1 = \sup r$, wobei Σ noch ein $\langle 1,1 \rangle$ -System (nach Delone ein (r_1, R) -System) ist. Dann kann $2r_1$ der Mindestabstand zwischen zwei beliebigen Punkten von Σ sein.

Wir nehmen $d+1$ nicht in einer Hyperebene liegenden Ecken eines Stützpolytops. Dann ist die Länge einer beliebigen Kante mindestens $2r_1$. Folglich ist ein beliebiger Stützkugelradius mindestens $\mathcal{R}(r_1)$. Dann gilt

$$(10) \quad \kappa(\Sigma(r_0)) \leq \frac{r_1}{\mathcal{R}(r_1)}.$$

Nach Lemma 2. ist die Funktion $h(a) = \frac{a}{\mathcal{R}(a)}$ streng monoton wachsend und nach unserer Voraussetzung gehört das Punktsystem zur Klasse $\{\Sigma(r_0)\}$, folglich kann die Dicke höchstens $\frac{r_0}{\mathcal{R}(r_0)}$ sein.

Gleichheit tritt nur im Fall ein, wenn eine Zerlegung von H^d in reguläre Simplexe der Kantenlänge $2r_0$ existiert. Eine solche Zerlegung existiert aber nur in der hyperbolischen Ebene und nur für die im Satz 1. erklärten Dreiecksmosaiken. \diamond

3. Abschätzungen im H^2

In diesem Teil verbessern wir die im Punkt 2. angegebenen Abschätzungen in der hyperbolischen Ebene.

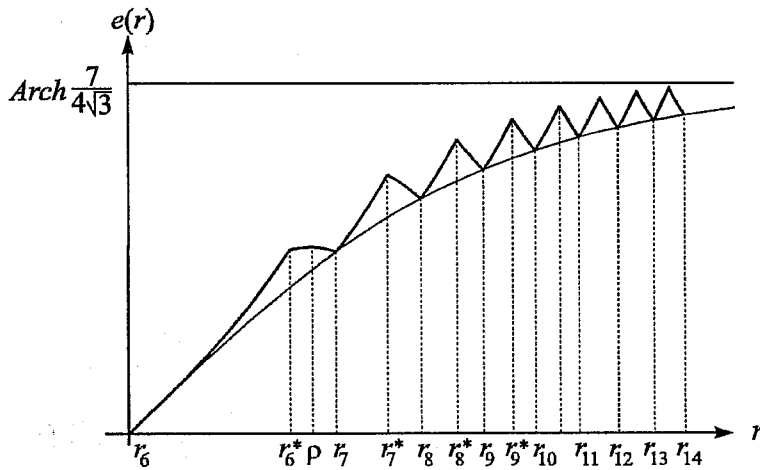


Abb. 1.

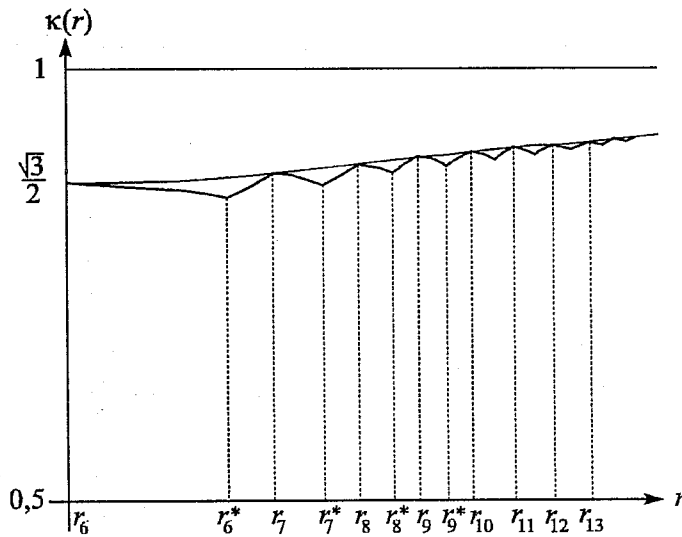


Abb. 2.

3.1. Die Abb. 1. bzw. Abb. 2. zeigt die untere Abschätzung für die Enge von Kreispackungen mit Radius r (vgl. Satz 1.) bzw. die obere

Abschätzung für die Dicke der $\Sigma(r_0)$ Punktsysteme (vgl. Satz 2.) (die dünnen Kurven auf den Abbildungen). Beide Abschätzungen sind genau, wenn ein Mosaik in der hyperbolischen Ebene existiert, das aus regulären Dreiecken der Seitenlänge $2r$ bzw. $2r_0$ besteht. Es bezeichne r_n die Zahl, für die der Winkel des regulären Dreiecks der Seitenlängen $2r_n$ gleich $\frac{2\pi}{n}$ ist. Dann liegen n reguläre Dreiecke herum eine Ecke im Mosaik, wobei $n \geq 7$ und $r_6 := 0$ ist. Durch einfache Rechnung ergibt sich

$$(11) \quad \cosh r_n = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{n}}.$$

In den Ungleichungen (9) und (10) kann Gleichheit für r_n eintreten.

Es sei

$$r_n \leq r \leq r_{n+1},$$

d.h.

$$(12) \quad \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \leq \cosh r \leq \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{n+1}},$$

wo $n \geq 6$ ist.

3.1.1. Es bezeichne H_1 das Dreieck $A_1B_1C_1$ (Abb. 3) mit $A_1B_1 = A_1C_1 = 2r$ und $\angle(B_1A_1C_1) = \frac{2\pi}{n}$. Für seinen Umkreisradius \mathcal{R}_1 gilt

$$(13) \quad \sinh \mathcal{R}_1 = \frac{\sinh r}{\sin \beta} \quad \left(\cosh \mathcal{R}_1 = \frac{\cosh r \cos \frac{\pi}{n}}{\sin \beta} \right),$$

wo

$$(14) \quad \cos \beta = \cosh r \sin \frac{\pi}{n}.$$

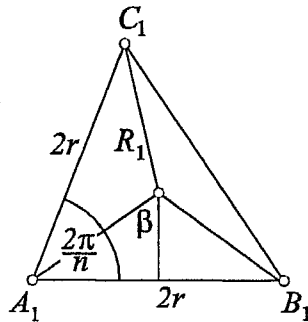


Abb. 3.

3.1.2. Es sei H_2 das gleichschenklige Dreieck $A_2B_2C_2$ (Abb. 4) mit $A_2B_2 = A_2C_2 = 2b$, $B_2C_2 = 2r$ und $\angle(B_2A_2C_2) = \frac{2\pi}{n+1}$. Mit \mathcal{R}_2

bezeichnen wir den Umkreisradius von H_2 . Durch einfache Rechnungen erhalten wir

$$(15) \quad \sinh \mathcal{R}_2 = \frac{\sinh b}{\sin \beta} \left(\cosh \mathcal{R}_2 = \frac{\cosh b \cos \frac{\pi}{n+1}}{\sin \beta} \right),$$

wobei

$$(16) \quad \cos \beta = \cosh b \sin \frac{\pi}{n+1}$$

und

$$(17) \quad \sinh 2b = \frac{\sinh r}{\sin \frac{\pi}{n+1}}.$$

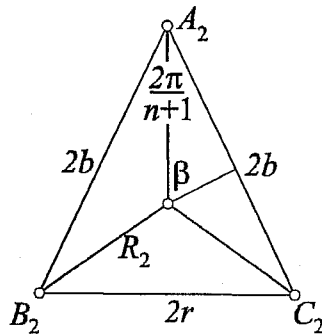


Abb. 4.

3.1.3. Aus der Definition von \mathcal{R}_1 und \mathcal{R}_2 ist es leicht einzusehen, daß $\mathcal{R}_1(r)$ und $\mathcal{R}_2(r)$ streng monoton wachsen. Mit $\mathcal{R}_1(n, r)$ bzw. mit $\mathcal{R}_2(n, r)$ wird die Funktion $\mathcal{R}_1(r)$ bzw. $\mathcal{R}_2(r)$ im Intervall $[r_n, r_{n+1}]$ bezeichnet. Für diese Funktionen gelten die folgenden Ungleichungen

$$(18) \quad \mathcal{R}_1(n, r_{n+1}) > \mathcal{R}_2(n, r_{n+1}) \quad \text{und} \quad \mathcal{R}_2(n, r_n) > \mathcal{R}_1(n, r_n).$$

Die Funktionen $\mathcal{R}_1(n, r)$ und $\mathcal{R}_2(n, r)$ sind stetig und streng monoton. Daraus folgt schon auch (18) im Betracht genommen, daß es eine Zahl $r_n^* \in]r_n, r_{n+1}[$ gibt, für die

$$(19) \quad \mathcal{R}_1(n, r_n^*) = \mathcal{R}_2(n, r_n^*)$$

gilt.

Es seien α, β, γ die Winkel des Dreiecks ABC . Mit $k[ABC]$ bezeichnen wir die Umkreislinie des Dreiecks ABC . Wir fixieren den Umkreis des Dreiecks und die Ecken A und B . Es ist bekannt, wenn sich die Ecke C auf einem der durch A und B bestimmten Kreisbögen von $k[ABC]$ bewegt, dann ist $\alpha + \beta - \gamma$ unabhängig von der Lage des Punktes C .

Falls $r = r_n^*$, dann gilt $A_1B_1 = C_2B_2 = 2r_n^*$ für die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$, weiterhin (19) für die Umkreisradien. Folglich können wir die obigen Dreiecke so legen wie auf der Abb. 5. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \angle(C_2B_2A_2) + \angle(B_2C_2A_2) - \angle(B_2A_2C_2) = \\ & = \angle(B_1A_1C_1) + \angle(A_1B_1C_1) - \angle(A_1C_1B_1). \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen $\angle(B_2C_2A_2) = \angle(C_2B_2A_2)$ und $\angle(A_1B_1C_1) = \angle(A_1C_1B_1)$ ergibt sich

$$(20) \quad \angle(C_2B_2A_2) = \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n+1}.$$

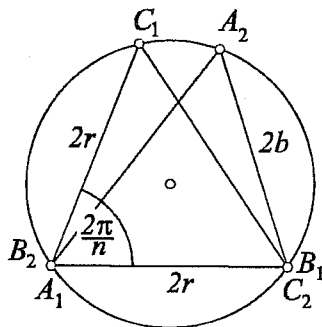


Abb. 5.

Dann haben wir

$$(21) \quad \cosh r_n^* = \frac{\cos \frac{\pi}{n+1}}{\sin \left(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n+1} \right)}.$$

Aus den obigen folgt, daß es eine einzige Zahl r_n^* mit (19) im Intervall $[r_n, r_{n+1}]$ gibt.

3.2. Im folgenden beweisen wir einige Lemmas.

Lemma 3. *Es sei $\mathcal{R}_1(n, r)$, $r \in [r_n, r_{n+1}]$ die in (13) und (14) definierte Funktion. Dann ist die Funktion*

$$(22) \quad f_1(n, r) = \mathcal{R}_1(n, r) - r \quad r \in [r_n, r_{n+1}]$$

streng monoton wachsend, wo $n \geq 6$, $n \in \mathbb{Z}$ und $r_6 := 0$.

Beweis. Wir zeigen, daß $f_1'(n, r) > 0$, d.h.

$$(23) \quad \mathcal{R}'_1(n, r) > 1.$$

Aus (13) und (14) ergibt sich

$$(24) \quad \mathcal{R}'_1(n, r) = \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\sin^2 \beta}$$

durch Anwendung von Identitäten bezüglich trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen. Man muss also die Richtigkeit der Gleichung

$$\cos \frac{\pi}{n} > \sin^2 \beta$$

beweisen. Nach (14) haben wir die äquivalente Ungleichung

$$\cos \frac{\pi}{n} + \cosh^2 r \sin^2 \frac{\pi}{n} > 1.$$

Aus (12) folgt

$$\cosh^2 r \sin^2 \frac{\pi}{n} \geq \frac{1}{4}.$$

Es genügt also, die Ungleichung

$$\cos \frac{\pi}{n} + \frac{1}{4} > 1$$

zu beweisen. Das gilt aber wegen $n \geq 6$. \diamond

Lemma 4. *Es sei $\mathcal{R}_1(n, r)$, $r \in [r_n, r_{n+1}]$ die in (13) und (14) definierte Funktion. Dann ist die Funktion*

$$(25) \quad g_1(n, r) = \frac{r}{\mathcal{R}_1(n, r)} \quad r \in [r_n, r_{n+1}]$$

streng monoton fallend, wo $n \geq 6$, $n \in \mathbb{Z}$, $r_6 := 0$ und $r > 0$ sind.

Beweis. Wir zeigen, daß die Funktion

$$(26) \quad h_1(n, r) = \frac{\mathcal{R}_1(n, r)}{r} \quad r \in [r_n, r_{n+1}]$$

streng monoton wachsend ist, d.h.,

$$(27) \quad h_1'(n, r) = \frac{1}{r^2} (\mathcal{R}_1'(n, r)r - \mathcal{R}_1(n, r)) > 0$$

gilt.

Es sei $p(n, r) = \mathcal{R}_1'(n, r)r - \mathcal{R}_1(n, r)$. Es gilt offenbar $p(n, 0) = 0$. Dann genügt es zu zeigen, daß

$$p'(n, r) = \mathcal{R}_1''(n, r)r$$

positiv ist. Das gilt aber, da

$$\mathcal{R}_1''(n, r) = \frac{\sinh 2r \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\sin^4 \beta} > 0$$

ist. \diamond

Bemerkung. Es ist einfach zu zeigen, daß $\lim_{r \rightarrow 0} g_1(6, r) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ist.

Lemma 5. *Es sei $\mathcal{R}_2(n, r)$, $r \in [r_n^*, r_{n+1}]$ die in (15) mit Hilfe von (16) und (17) definierte Funktion, wo r_n^* in (21) bestimmt ist. Dann nimmt die Funktion*

$$(28) \quad f_2(n, r) = \mathcal{R}_2(n, r) - r \quad r \in [r_n^*, r_{n+1}]$$

für $n \geq 7$ streng monoton ab. In Fall $n = 6$ existiert eine einzige Zahl $\rho \in [r_6^*, r_7]$, für die $\mathcal{R}_2'(6, \rho) = 1$ ($\cosh \rho = 1.116421187\dots$) ist. Die Funktion $f_2(6, r)$ ist im Intervall $[r_6^*, \rho[$ streng monoton wachsend und im Intervall $]\rho, r_7]$ streng monoton fallend.

Beweis. a. Es sei $n \geq 7$ und $\alpha = \frac{\pi}{n+1}$. Die Funktion $f_2(n, r)$, $r \in [r_n^*, r_{n+1}]$ nimmt ab, wenn

$$(29) \quad \mathcal{R}'_2(n, r) < 1$$

ist. Aus (15) ergibt sich die erste Ableitung von $\mathcal{R}_2(n, r)$. Mit Anwendung von (16) und (17) können wir in der Form

$$\mathcal{R}'_2(n, r) = \frac{\cos \alpha \cosh r}{2 \sin \alpha \cosh 2b \sin^2 \beta}$$

aufschreiben. Man muß also die Richtigkeit der Ungleichung

$$\frac{\cos \alpha}{2 \sin \alpha} \cosh r < \sin^2 \beta \cosh 2b$$

beweisen. Daraus ergibt sich

$$(30) \quad \frac{\cos \alpha}{2 \sin \alpha} \cosh r < (1 - \cosh^2 b \sin^2 \alpha) \frac{\sqrt{\sinh^2 r + \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}.$$

Wegen $r \in]r_n, r_{n+1}]$ ist $r < b \leq r_{n+1}$. Aus (12) folgt

$$\frac{3}{4} \leq 1 - \cosh^2 b \sin^2 \alpha.$$

Es genügt zu zeigen, daß

$$(31) \quad \frac{1}{2} \cos \alpha \cosh r < \frac{3}{4} \sqrt{\sinh^2 r + \sin^2 \alpha}$$

gilt. Durch äquivalente Umformungen erhalten wir die Ungleichung

$$(32) \quad \cosh^2 r > \frac{9 \cos^2 \alpha}{9 - 4 \cos^2 \alpha}.$$

Wegen $r \geq r_n^*$ gilt

$$\cosh^2 r \geq \cosh^2 r_n^* = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{n+1}}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n+1} \right)}$$

auf Grund von (21).

Wir zeigen, daß

$$\frac{\cos^2 \frac{\pi}{n+1}}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n+1} \right)} > \frac{9 \cos^2 \alpha}{9 - 4 \cos^2 \alpha},$$

d.h.

$$(33) \quad 2 \cos \frac{\pi}{n+1} < 3 \cos \left(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n+1} \right)$$

gilt.

Für $n > 8$ ist die linke Seite von (33) kleiner als 2, die rechte Seite ist aber grösser als 2. Durch Rechnungen ergibt sich die Richtigkeit von (33) für $n = 7, 8$.

b. Es sei $n = 6$ und $\alpha = \frac{\pi}{7}$. In diesem Fall liegt r im Intervall $[r_6^*, r_7]$, wobei $\cosh r_6^* = 1.090446123\dots$ und $\cosh r_7 = 1.126894041\dots$ sind. Aus (30) ergibt sich

$$(34) \quad \begin{aligned} & \cos \alpha \cosh r \leq \\ & \leq \left(2 - \left(\sin^2 \alpha + \sin \alpha \sqrt{\cosh^2 r - \cos^2 \alpha} \right) \right) \sqrt{\cosh^2 r - \cos^2 \alpha} \end{aligned}$$

mit der Anwendung von (17). Diese Ungleichung gilt für $r = r_7$, für $r = r_6^*$ aber nicht. Folglich tritt $\mathcal{R}'_2(n, r) = 1$ im Intervall $[r_6^*, r_7]$ ein. Wir beweisen, daß diese Gleichung nur für eine einzige Wert $\rho \in]r_6^*, r_7[$ besteht. Dazu definieren wir die Funktion (vgl. (34))

$$\begin{aligned} s(r) = & \cos \alpha \cosh r + \sin \alpha (\cosh^2 r - \cos^2 \alpha) - \\ & - (1 + \cos^2 \alpha) \sqrt{\cosh^2 r - \cos^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Die erste Ableitung von $s(r)$ ist

$$s'(r) = \sinh r \left(\cos \alpha + 2 \sin \alpha \cosh r - \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\cosh^2 r}}} \right).$$

Die Funktionen $\sinh r, \cosh r$ wachsen, $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\cosh^2 r}}}$ ist fallend. Folglich gilt $s'(r) \leq s'(r_7)$. Weil $s'(r_7) < 0$ ist, nimmt $s(r), r \in [r_6^*, r_7]$ streng monoton ab. Deshalb ist auch $\mathcal{R}'_2(6, r)$ streng monoton fallend. Wegen $\mathcal{R}'_2(6, r_6^*) > 1$ und $\mathcal{R}'_2(6, r_7) < 1$ existiert nur eine Stelle $\rho \in]r_6^*, r_7[$, für die $\mathcal{R}'_2(6, \rho) = 1$ gilt. Es ist auszurechnen, daß $\cosh \rho = 1,116421187\dots$. Daraus folgt schon die im Lemma erklärte Monotonie von $f_2(6, r), r \in [r_6^*, r_7]$. \diamond

Lemma 6. *Es sei $\mathcal{R}_2(n, r), r \in [r_n^*, r_{n+1}]$ die in (15), (16) und (17) definierte Funktion. Dann ist die Funktion*

$$(35) \quad g_2(n, r) = \frac{r}{\mathcal{R}_2(n, r)} \quad r \in [r_n^*, r_{n+1}]$$

streng monoton wachsend.

Beweis. Wir zeigen, daß die Funktion

$$(36) \quad h_2(n, r) = \frac{\mathcal{R}_2(n, r)}{r}$$

streng monoton abnimmt, d.h.,

$$(37) \quad h'_2(n, r) = \frac{1}{r^2} (\mathcal{R}'_2(n, r)r - \mathcal{R}_2(n, r)) < 0$$

gilt.

Im Lemma 5. haben wir bewiesen, daß $\mathcal{R}'_2(n, r) < 1$ für $n \geq 7$ ist. Es gilt auch $r < \mathcal{R}_2(n, r)$ und damit $h'_2(n, r) < 0$.

Es sei $n = 6$. Aus dem Beweis des Lemmas 5. (Teil b,) wissen wir, daß $\mathcal{R}'_2(6, r)$ streng monoton fallend und $\mathcal{R}'_2(6, r) < 1$ für $r \in]\rho, r_7]$ ist. Folglich gilt $h'_2(6, r) < 0$, wenn $r \in]\rho, r_7]$. Es genügt also, das Vorzeichen von $h'_2(6, r)$, $r \in [r_6^*, \rho]$ zu bestimmen. Es sei $r \in [r_6^*, r_2]$, wobei $\cosh r_2 = 1, 1$ ist. Dann ergibt sich nach einfachen Rechnungen

$$\mathcal{R}'_2(6, r)r - \mathcal{R}_2(6, r) \leq \mathcal{R}'_2(6, r_6^*)r_2 - \mathcal{R}_2(6, r_6^*) < 0.$$

Die Funktion $g_2(6, r)$, $r \in [r_6^*, r_2]$ ist also streng monoton wachsend. Im Intervall $[r_2, \rho]$ gilt

$$\mathcal{R}'_2(6, r)r - \mathcal{R}_2(6, r) \leq \mathcal{R}'_2(6, r_2)\rho - \mathcal{R}_2(6, \rho) < 0,$$

deshalb nimmt $g_2(6, r)$ auch für $r \in [r_2, \rho]$ streng monoton zu. \diamond

Im folgenden Lemma brauchen wir die in (22) definierte Funktion $f_1(n, r)$, $r \in [r_n, r_{n+1}]$ und die Erweiterung der in (28) erklärten Funktion $f_2(n, r)$, wir betrachten nämlich die Funktion $f_2(n, r)$, $r \in [r_n, r_{n+1}]$. Die Definition der Zahl r_n^* ($r_n^* \in [r_n, r_{n+1}]$) findet man in (21).

Lemma 7. *Es gilt*

$$(38) \quad \min(f_1(n, r), f_2(n, r)) = \begin{cases} f_1(n, r) & \text{für } r \in [r_n, r_n^*], \\ f_2(n, r) & \text{für } r \in [r_n^*, r_{n+1}], \end{cases}$$

wobei $n \geq 6$ ist.

Beweis. Für $n \geq 7$ und im Intervall $[r_n^*, r_{n+1}]$ ist die Behauptung des Lemmas eine einfache Folgerung der Monotonie von $f_1(n, r)$ und $f_2(n, r)$ (vgl. Lemma 3. und 5.), weil $f_1(n, r_n^*) = f_2(n, r_n^*)$ ist.

Aus (18) folgen die Ungleichungen

$$f_1(n, r_{n+1}) > f_2(n, r_{n+1})$$

und

$$f_1(n, r_n) < f_2(n, r_n),$$

wobei $n \geq 6$ ist. Für r_n^* gilt $f_1(n, r_n^*) = f_2(n, r_n^*)$. Würde es eine solche von r_n^* verschiedene Zahl $r_n^{**} \in]r_n, r_{n+1}[$ existieren, für die $f_1(n, r_n^{**}) = f_2(n, r_n^{**})$ gelte, dann hätten wir auch $\mathcal{R}_1(n, r_n^{**}) = \mathcal{R}_2(n, r_n^{**})$. Das ist aber auf Grund von 3.1.3. nicht möglich. \diamond

Nun betrachten wir die Funktionen $g_1(n, r)$, $r \in [r_n, r_{n+1}]$ und $g_2(n, r)$, $r \in [r_n, r_{n+1}]$ (vgl. (26) und (35)). Darauf bezieht sich

Lemma 8. *Es gilt*

$$(39) \quad \max(g_1(n, r), g_2(n, r)) = \begin{cases} g_1(n, r) & \text{für } r \in [r_n, r_n^*], \\ g_2(n, r) & \text{für } r \in [r_n^*, r_{n+1}], \end{cases}$$

wo $n \geq 6$ ist.

Der Beweis geht ebenso wie der Beweis vom Lemma 7. \diamond

Lemma 9. *Es seien A und B zwei fixe Punkte einer angegebenen Kreislinie. Es bezeichne C einen beliebigen Punkt eines der durch A und B bestimmten Kreisbögen. Falls F der Mittelpunkt dieses Bogens ist und C sich auf der Kreislinie gegen F bewegt, dann nimmt $\angle(ACB)$ streng monoton ab.*

Beweis. Wir bezeichnen die Winkel des Dreiecks ABC mit α , β und γ . Wir wissen, daß $\alpha + \beta - \gamma$ während der Bewegung von C konstant ist und der Inhalt des Dreiecks ABC wächst. Daraus folgt, daß $\alpha + \beta + \gamma - 2\gamma$ konstant ist und $\alpha + \beta + \gamma$ abnimmt, folglich nimmt der Winkel $\gamma = \angle(ACB)$ ab. \diamond

3.3. Die folgenden Sätze enthalten die Abschätzungen für die Enge und für die Dicke in H^2 .

Satz 3. *Es seien $r \in [r_n, r_{n+1}[$, $r \neq r_6$ und $n \geq 6$. Die Enge einer beliebigen Packung von offenen Kreisen mit Radius r in der hyperbolischen Ebene ist mindestens*

$$(40) \quad \min(f_1(n, r), f_2(n, r)).$$

Die Abschätzung ist nur im Fall genau, wenn $r = r_n$, $n \geq 7$ ist, d.h., die Kreismittelpunkte die Ecken eines regulären Dreiecksmosaiks von der Seitenlänge $2r_n$ bilden.

Satz 4. *Es sei $r_1 \in [r_n, r_{n+1}[$, $r \neq r_6$ und $n \geq 6$. Nehmen wir an, daß das Punktsystem Σ ein $\langle 1, 1 \rangle$ -System (vgl. 1.2.1. und 1.2.2.) in der hyperbolischen Ebene bildet, für die $\sup r = r_1$ gilt. Die Dicke des Punktsystems Σ ist höchstens*

$$(41) \quad \max(g_1(n, r_1), g_2(n, r_1)).$$

Die Abschätzung ist nur im Fall genau, wenn $r_1 = r_n$, $n \geq 7$ und damit die Punkte von Σ die Ecken eines regulären Dreiecksmosaiks von der Seitenlänge $2r_n$ bilden.

Vor der Aussage des Satzes 5. definieren wir eine monotone Funktion. Es sei $\bar{r}_n \in]r_n, r_{n+1}[$ die Zahl, für die

$$(42) \quad g_2(n, \bar{r}_n) = g_1(n, r_n)$$

ist. Es gilt $g_1(n, r_n) < g_1(n+1, r_{n+1}) = g_2(n, r_{n+1})$ (vgl. Lemma 2.). Wir haben bewiesen, daß die Funktion $g_1(n, r)$, $r \in [r_n, r_n^*]$ streng monoton fallend und die Funktion $g_2(n, r)$, $r \in [r_n^*, r_{n+1}[$ streng monoton wachsend ist. Aus den Vorhergehenden folgt, daß es nur eine einzige Zahl \bar{r}_n gibt für die (42) gilt.

Es sei

$$(43) \quad g(r) = \begin{cases} g_1(n, r_n) & \text{für } r \in [r_n, \bar{r}_n], \\ g_2(n, r) & \text{für } r \in [\bar{r}_n, r_{n+1}[, \end{cases}$$

wobei $n = 7, 8, \dots$

Aus der Definition folgt, daß die Funktion $g(r)$, $r \geq r_7$ monoton wächst.

Es sei eine reelle Zahl r_0 mit $r_0 > r_7$ gegeben. Es bezeichne $\{\Sigma(r_0)\}$ die Menge der $\langle 1,1 \rangle$ -Punktsysteme in der hyperbolischen Ebene, für die $r_7 \leq \sup r \leq r_0$ (vgl. 1.2.3.) gilt.

Satz 5. Die Dicke eines Punktsystems von $\{\Sigma(r_0)\}$ ist höchstens $g(r_0)$. Die Abschätzung ist genau, wenn $r_n \leq r_0 \leq \bar{r}_n$ ist und die Punkte im Punktsystem die Ecken eines regulären Dreiecksmosaiks von der Seitenlänge $2r_n$ sind.

Den **Beweis der Sätze 3. und 4.** können wir gemeinsam durchführen. Schlagen wir nämlich um die Punkte von Σ offene Kreise vom Radius r_1 , dann erhalten wir eine Packung von kongruenten Kreisen. Wir können annehmen, daß die Packung gesättigt ist, d.h., man keinen weiteren Kreis vom Mindestradius r in den nicht überdeckten Teilen der Ebene einlagern kann. In diesem Fall ist die Enge kleiner als der Radius der Kreise in der Packung. Folglich geben die Kreismittelpunkte einer gesättigten Packung von kongruenten Kreisen ein $\langle 1,1 \rangle$ -Punktsystem.

Es bezeichne $O_1, O_2, \dots, O_n, \dots$ die Mittelpunkte der Kreise der Packung bzw. die Punkte des Punktsystems Σ . Es sei O_i ein beliebiger Punkt. Wir betrachten die zu O_i gehörige Dirichlet-Voronoi'sche Zelle (kurz D-V Zelle), d.h., die Menge der Punkte P , für die

$$O_i P \leq O_j P \quad j = 1, 2, \dots, n, \dots \quad j \neq i$$

gilt. Aus der Definition der D-V Zelle folgt, daß die Ecken der D-V Zellen die Umkreismittelpunkte der L-Vielecke des Punktsystems Σ sind.

Mit K_1, K_2, \dots, K_m bezeichnen wir die Ecken der zu O_i gehörigen D-V Zelle und mit O_1, O_2, \dots, O_k die von O_i verschiedenen Ecken der L-Vielecke, die aber die Ecke O_i haben. Die L-Vielecke, die keine Dreiecke sind, werden mit Hilfe von O_i ausgehenden Diagonalen in Dreiecke aufteilen.

Wir nehmen an, daß $r \in [r_n, r_{n+1}[$ bzw. $r_1 \in [r_n, r_{n+1}[$ ist.

1. Es sei $k \geq n + 1$. Es gibt mindestens ein unter den Dreiecken $O_j O_i O_{j+1}$ ($j = 1, \dots, m$ und $j \neq i$), in dem der Winkel bei O_i höchstens $\frac{2\pi}{n+1}$ ist. Es sei $O_1 O_i O_2$ dieses Dreieck mit dem Umkreismittelpunkt K_1 (Abb. 6). Mit ω bezeichnen wir den Winkel $O_1 O_i O_2$, für den also $\omega \leq \frac{2\pi}{n+1}$ gilt. Es bezeichne F den Mittelpunkt des Kreisbogens $O_1 O_i O_2$. Nun bewegen wir O_i auf der Kreislinie gegen F . Nach Lemma 9. nimmt der Winkel ω ab, d.h., auch im Fall $O_i = F$ die Ungleichung

$\omega \leq \frac{2\pi}{n+1}$ gilt. Der Winkel ω nimmt weiter ab, wenn wir die Punkte O_1 und O_2 um $O_i = F$ bis der Lage $O_1O_2 = 2r$ bzw. $O_1O_2 = 2r_1$ drehen. Während dieser Lageänderung nimmt der Umkreisradius des Dreiecks O_1FO_2 ab. Dann halten wir O_1 und O_2 fix und bewegen den Punkt $O_i = F$ auf der Mittelsenkrechten von O_1O_2 derart, daß O_iO_1 abnimmt. Der Winkel ω wächst natürlich und am Ende erreichen wir die Lage, wobei $\omega = \frac{2\pi}{n+1}$ ist. Es ist klar, daß der Umkreisradius weiter abnimmt. Wegen $r \in [r_n, r_{n+1}[$ bzw. $r_1 \in [r_n, r_{n+1}[$ gilt $FO_1 = FO_2 \geq 2r$ bzw. $FO_1 = FO_2 \geq 2r_1$.

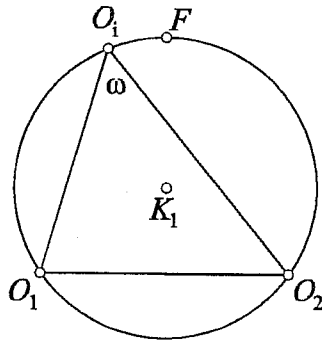


Abb. 6.

Wir haben also bewiesen, daß der Umkreisradius des L-Dreiecks $O_1O_2O_i$ mindestens R_2 (vgl. 3.1.2.) ist. Dann kann man einen Kreis vom Radius $R_2 - r$ um den Umkreismittelpunkt K_1 des Dreiecks $O_1O_2O_i$ schlagen, der in einem nicht überdeckten Teil der Ebene liegt. Aus den obigen folgt, daß die Dicke des Punktsystems Σ höchstens $\frac{r_1}{R_2(n, r_1)} = g_2(n, r_1)$ ist.

2. Es sei $k \leq n$. Dann gibt es ein L-Dreieck $O_3O_iO_4$, in dem $\omega = \angle(O_3O_iO_4) \geq \frac{2\pi}{n}$ ist. Dann kann man ein Dreieck $\bar{O}_3O_i\bar{O}_4$ konstruieren, das von $O_3O_iO_4$ enthalten ist und $\bar{O}_3O_i = O_i\bar{O}_4 = 2r$ bzw. $\bar{O}_3O_i = O_i\bar{O}_4 = 2r_1$, weiterhin $\angle(\bar{O}_3O_i\bar{O}_4) = \omega$. Wegen $r \in [r_n, r_{n+1}[$ gilt $\bar{O}_3\bar{O}_4 \geq 2r$ bzw. $\bar{O}_3\bar{O}_4 \geq 2r_1$. Der Umkreisradius des Dreiecks $O_3O_iO_4$ ist kleiner gleich als \mathcal{R}_1 (vgl. 3.1.). Folglich ist die Enge der Packung mindestens $\mathcal{R}_1(n, r) - r = f_1(n, r)$ bzw. die Dicke des Punktsystems ist höchstens $\frac{r_1}{\mathcal{R}_1(n, r_1)} = g_1(n, r_1)$.

3. Es gilt $\min(f_1(n, r), f_2(n, r)) = f_1(n, r)$ für $r \in [r_n, r_n^*]$ (Lemma 7.), deshalb ist die Enge einer Packung mindestens $f_1(n, r)$. $f_1(n, r)$ ist eine untere Abschätzung für die Enge im obigen Intervall, die streng

monoton wachsend (Lemma 3.) ist. Für $r_1 \in [r_n, r_n^*]$ gilt $\max(g_1(n, r_1), g_2(n, r_1)) = g_1(n, r_1)$ (Lemma 8.), d.h., die Dicke höchstens $g_1(n, r_1)$ in diesem Intervall ist. $g_1(n, r_1)$ ist eine streng monoton fallende obere Abschätzung (Lemma 4.).

4. Im Fall $r, r_1 \in [r_n^*, r_{n+1}]$ kann man mit Anwendung vom Lemma 7. bzw. Lemma 8., wie im letzten Fall, beweisen, daß die Enge mindestens $f_2(n, r)$ bzw. die Dicke höchstens $g_2(n, r_1)$ ist. Die Monotonie der Abschätzungen findet man im Lemma 5. bzw. im Lemma 6.

5. Wenn $r \in]r_n, r_{n+1}[$ ist, dann sind die Winkel bei den Ecken B_1, C_1 bzw. B_2, C_2 im Dreieck H_1 bzw. H_2 kleiner als $\frac{2\pi}{n}$ und grösser als $\frac{2\pi}{n+1}$. Folglich kann man kein Mosaik mit H_1 für $r \in]r_n, r_n^*[$, mit H_2 für $r \in [r_n^*, r_{n+1}[$, weiterhin mit H_1 und H_2 im Fall $r = r_n^*$ bilden. Das bedeutet, daß die obigen Abschätzungen nur für $r = r_n$ $n \in \{7, 8, 9, \dots\}$ genau sind. \diamond

Die Behauptung des **Satzes 5.** ist eine einfache Folgerung der Monotonie der Funktion $g(r)$ (vgl. (43)). \diamond

Literaturverzeichnis

- BÖRÖCZKY, K.: Closest packing and loosest covering of the space with balls, *Studia Sci. Math. Hung.* **21** (1986), 79–89.
- DELONE, B.N.: The geometry of positive quadratic forms, *Uspehi Mat. Nauk.* **3** (1937), 16–62, (Russian).
- FEJES TÓTH, L.: Close packing and loose covering with balls, *Publ. Math. Debrecen*, **23** (1976), 223–226.
- HORVÁTH, J.: Close lattice packings of balls in lattices of the first type, *Ann. Univ. Sci. Bp. Sect. Math.* **20** (1977), 191–194, (Russian).
- HORVÁTH, J.: On close lattice packing of unit spheres in the space E^n , *Trudy Mat. Inst. Steklov AN SSSR* **152** (1980), 216–231, (Russian); English trans.: *Proc. Steklov Math. Inst.* **152**, 237–254.
- HORVÁTH, J.: Several problems of n -dimensional discrete geometry, Doctoral dissertation, Steklov Math. Inst. Moskow, 240 p. (Russian).
- RYSKOV, S. S.: The polyhedron $\mu(m)$ and some extremal problems in geometry of numbers, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **194** (1970), 514–517, (Russian); English trans.: *Soviet Mat. Dokl.* **11**, 1240–1244.
- RYSKOV, S. S.: Density of an (r, R) -System, *Mat. Zametki* **16** (1974), 447–454 (Russian); English trans.: *Math. Notes* **16**, 855–858.