

# UNENDLICH VIELE KUGELN DURCH VIER TANGENTEN

Hellmuth Stachel

*Institut für Geometrie, Technische Universität Wiedner Haupt-  
straße 8-10/113, A-1040 Wien, Österreich*

Herrn Prof. Hans Vogler zum 60. Geburtstag gewidmet

*Received* January 1995

*MSC 1991:* 51 N 20

*Keywords:* Spheres tangent to four lines, Plücker conoid.

**Abstract:** In the Euclidean 3-space the bisector of two skew lines  $g_i, g_j$  is an orthogonal hyperbolic paraboloid  $\Phi_{ij}$ . Hence the centers of spheres that contact four pairwise skew given lines  $g_1, \dots, g_4$  are the points of the algebraic variety  $\Phi_{12} \cap \Phi_{13} \cap \Phi_{14}$ . As a supplement to [3] it is proved that just in two cases there is a continuum of such spheres:  $g_1, \dots, g_4$  are either generators of a one-sheet hyperboloid of revolution or they are generators in concyclic position on a Plücker conoid.

## 1. Vorbemerkungen

Kürzlich wurde von M. Husty und H. Sachs [3] erneut das klassische Problem der Bestimmung einer Kugel durch vier Tangenten behandelt. Diese Fragestellung erwies sich jüngst als bedeutsam für die Robotik [2] wie auch für die Analyse gefährlicher Konfigurationen in der Satellitengeodäsie [7]. In der vorliegenden Arbeit soll nun die in [3] offen gebliebene Frage nach allen Annahmen, die unendlich viele Lösungen zulassen, unter der Voraussetzung paarweise windschiefer Tangenten geklärt werden.

## 2. Das Abstandsparaboloid

Zunächst einige bekannte Aussagen aus der Geometrie des euklidischen Raumes  $E^3$ :

**Satz 1.**  $g_1$  und  $g_2$  seien windschiefe Geraden des  $E^3$  mit  $\varphi := \sphericalangle g_1 g_2$ ,  $d := \overline{g_1 g_2}$ .

1.  $\Phi_{12} = \{ X \mid \overline{Xg_1} = \overline{Xg_2} \}$  ist ein orthogonales hyperbolisches Paraboloid, das Abstandsparaboloid<sup>1)</sup> mit der Gleichung

$$(1) \quad z - \frac{\sin \varphi}{d} xy = 0,$$

sofern  $g_1$  und  $g_2$  den Gleichungen  $z = \pm \frac{d}{2}$  und  $x \sin \frac{\varphi}{2} = \pm y \cos \frac{\varphi}{2}$  genügen.

2. Die Symmetrieachsen von  $g_1$  und  $g_2$  sind die Scheitelerzeugenden von  $\Phi_{12}$ , die gemeinsame Normale  $n_{12}$  von  $g_1, g_2$  ist die Paraboloidachse.  $g_1$  und  $g_2$  sind polar bzgl.  $\Phi_{12}$ .

3.  $\Phi_{12}$  wird im Punkt  $X$  von der Symmetrieebene der Fußpunkte der aus  $X$  auf  $g_1$  bzw.  $g_2$  legbaren Normalen berührt.

4. Genau die auf  $\Phi_{12}$  gelegenen Erzeugenden sind die Achsen von Drehungen mit  $g_1 \mapsto g_2$ , also die Achsen der durch  $g_1$  und  $g_2$  legbaren Drehhyperboloide. Alle diese Drehhyperboloide haben übrigens dieselbe Nebenachsenlänge  $b = \frac{d}{2} \cot \frac{\varphi}{2}$ .

**Beweis.** Für die Distanz des Punktes  $X$  mit Ortsvektor  $\mathfrak{r}$  von der Geraden  $g_i$  mit der Vektordarstellung  $\mathfrak{p}_i + \mathbb{R}\mathfrak{v}_i$  gilt bei  $\|\mathfrak{v}_i\| = 1$

$$(2) \quad \overline{Xg_i}^2 = (\mathfrak{r} - \mathfrak{p}_i)^2 - [(\mathfrak{r} - \mathfrak{p}_i) \cdot \mathfrak{v}_i]^2.$$

Der obige Ansatz für  $g_1$  und  $g_2$  führt unmittelbar auf die Gleichung (1)<sup>2)</sup>.

Die Schnittpunkte von  $g_1$  und  $g_2$  mit der Paraboloidachse sind zueinander konjugiert bzgl.  $\Phi_{12}$  und ebenso die Fernpunkte der beiden Geraden. Damit ist  $g_2$  die Polare zu  $g_1$ .

Ist  $a$  die Achse einer Drehung mit  $g_1 \mapsto g_2$ , so gilt für jeden Punkt  $X \in a$   $\overline{Xg_1} = \overline{Xg_2}$ , also  $X \in \Phi_{12}$  und somit  $a \subset \Phi_{12}$ . Umgekehrt: Zu jedem Punkt  $X \in \Phi_{12}$  gibt es zwei gleichsinnige Bewegungen mit  $g_1 \mapsto g_2$ , die  $X$  festlassen. Beide Bewegungen bringen den Normalenfußpunkt  $F_1$  zu  $X$  auf  $g_1$  mit dem Fußpunkt  $F_2 \in g_2$  zur Deckung; sie übertragen nur die Orientierung von  $g_1$  unterschiedlich auf  $g_2$ . Jede gleichsinnige Raumbewegung mit einem Fixpunkt  $X$  ist eine Drehung, und  $X$  ist ein

<sup>1)</sup>Bezeichnung nach [3]. Dort wird auch auf G. Salmon und W. Fiedler verwiesen (vgl. [5], Seite 154).

<sup>2)</sup>Eine in gewissem Sinn umgekehrte Fragestellung wird übrigens in [1] behandelt.

Punkt der Drehachse. Somit sind die durch  $X$  gehenden zwei Erzeugenden von  $\Phi_{12}$  die Achsen von Drehungen mit  $g_1 \mapsto g_2$ .<sup>3)</sup> Beide Achsen liegen in der Symmetrieebene des Punktepaares  $F_1 \mapsto F_2$ , und damit ist auch die Tangentialebene von  $\Phi_{12}$  in  $X$  gefunden.

Nach W. Wunderlich [10] und J. Krames [4] gilt für die Distanz  $d$  und den Winkel  $\varphi$  von je zwei windschiefen Erzeugenden eines Drehhyperboloides mit der Nebenachsenlänge  $b$  die oben angegebene Gleichung. Das Geradenpaar  $g_1, g_2$  legt demnach bereits die Nebenachsenlänge aller hindurchgehenden Drehhyperboloide fest.  $\diamond$

Gemäß [3] heißen zwei Geraden  $g_1, g_2$  *assoziiert* bzgl. des orthogonalen hyperbolischen Paraboloids  $\Phi_{12}$ , wenn  $\Phi_{12}$  das zu  $g_1$  und  $g_2$  gehörige Abstandsparaboloid ist. Nach [3] liegen alle bzgl.  $\Phi_{12}$  assoziierten Geradenpaare auf dem Plückerkonoid  $\Psi_{12}$  mit der Gleichung

$$(x^2 + y^2)z - kxy = 0 \quad \text{bei} \quad k := \frac{d}{\sin \varphi} = \text{konst.}$$

Es läßt sich zeigen, daß  $\Psi_{12}$  genau die Scheitelerzeugenden der mit  $\Phi_{12}$  konfokalen hyperbolischen Paraboloiden und der Fokalparabeln von  $\Phi_{12}$  enthält.

### 3. Kugeln durch vier Tangenten

Es seien vier paarweise windschiefe Geraden  $g_1, \dots, g_4$  gegeben. Der Punkt  $M$  ist genau dann der Mittelpunkt einer Kugel, welche alle vier Geraden berührt, wenn  $M$  im Durchschnitt

$$(3) \quad V := \Phi_{12} \cap \Phi_{13} \cap \Phi_{14}$$

dreier Abstandsparaboloiden liegt. Diese drei Paraboloiden sind paarweise verschieden, denn etwa bei  $\Phi_{12} = \Phi_{13}$  wären  $g_2$  und  $g_3$  gemäß Satz 1 polar zu  $g_1$  bzgl.  $\Phi_{12}$  und damit identisch. Da die linke Seite der Gleichung von  $\Phi_{12}$  in (1) bis auf einen konstanten Faktor mit der Differenz  $(\overline{Xg_1}^2 - \overline{Xg_2}^2)$  übereinstimmt, gehören alle sechs Abstandsparaboloiden  $\Phi_{ij}$ ,  $i, j \in \{1, \dots, 4\}, i < j$  einer Linearschar von Flächen 2. Ordnung an, die z.B. von  $\Phi_{12}, \Phi_{13}$  und  $\Phi_{14}$  aufgespannt wird.

<sup>3)</sup>Die Behauptung von Satz 1, 4. wurde bereits in [9] formuliert und ist auch in [10] (Seite 75) und [4] (Seite 4) zu finden.

**Satz 1.** *Eine Kugel  $\Sigma$  ist genau dann eine mehrfache Lösung in der Schar der  $g_1, \dots, g_4$  berührenden Kugeln, wenn die Berührungspunkte  $F_1, \dots, F_4$  von  $\Sigma$  mit den vier gegebenen Tangenten komplanar liegen.*

**Beweis.** Die algebraische Varietät  $V$  aus (3) ist der Schnitt der algebraischen Kurve  $c_{123} := \Phi_{12} \cap \Phi_{13}$  mit  $\Phi_{14}$ . Die Mitte  $M$  einer mehrfachen Lösung ist entweder ein singulärer Punkt von  $c_{123}$  oder regulär, wobei die Tangente an  $c_{123}$  in der Tangentialebene an  $\Phi_{14}$  liegt. Beide Fälle zusammengenommen sind durch koaxiale Lage der Tangentialebenen von  $M$  an  $\Phi_{12}$ ,  $\Phi_{13}$  und  $\Phi_{14}$  zu kennzeichnen. Gemäß Satz 1 sind genau dann die Verbindungsgeraden der Normalenfußpunkte  $F_1F_2, F_1F_3, F_1F_4$  komplanar (vgl. [6], Th. 2).  $\diamond$

Sollen unendlich viele  $g_1, \dots, g_4$  berührende Kugeln existieren, so muß die in (3) definierte Varietät  $V$  eine der folgenden Bedingungen erfüllen:

- (a)  $V$  ist eine irreduzible Quartik,
- (b)  $V$  enthält eine irreduzible Kubik,
- (c)  $V$  enthält einen einteiligen Kegelschnitt,
- (d)  $V$  enthält eine eigentliche Gerade  $g$ .

Diese Fälle werden nun im einzelnen diskutiert.

Die in (d) genannte Bedingung ist hinreichend: Gemäß Satz 1 ist nämlich  $g$  die Achse eines einschaligen Drehhyperboloides durch  $g_1, \dots, g_4$ , und die diesem Drehhyperboloid einschreibbaren Kugeln stellen eine einparametrische Lösungsschar dar, wie schon in [3] festgestellt wird.

#### 4. $V$ ist eine irreduzible Raumkurve 4. Ordnung

In diesem Fall gehören alle  $\Phi_{ij}$  einem Büschel  $\mathcal{B}$  von Flächen 2. Ordnung an. Sind zwei Abstandparaboloide mit komplementären Indizes identisch, also z.B.  $\Phi_{12} = \Phi_{34}$ , so liegen alle  $\Phi_{ij}$  in dem von  $\Phi_{12}$  und  $\Phi_{13}$  aufgespannten Büschel. Dieser bereits in [3] genannte Fall mit unendlich vielen Berührungskugeln wird sich als Spezialfall einer allgemeineren Lösung herausstellen (siehe Satz 3). Wir können daher im folgenden die sechs Abstandparaboloide paarweise verschieden voraussetzen. Dann wird das Büschel  $\mathcal{B}$  von je zwei der sechs Abstandparaboloide aufgespannt.

Das Büschel der Fernkurven der Flächen aus  $\mathcal{B}$  enthält mehr als drei (absolut konjugierte) Geradenpaare; daher besteht es aus lauter

Geradenpaaren. Eine gemeinsame Komponente dieser Fernkurven ist wegen der Irreduzibilität von  $V$  unmöglich<sup>4)</sup>. Daher besteht das Fernkurvenbüschel aus den Paaren der Involution absolut konjugierter Geraden durch einen festen Punkt  $U$ . Für das Abstandsparaboloid  $\Phi_{ij}$  ist  $U$  der Fernpunkt der gemeinsamen Normalen  $n_{ij}$  von  $g_i$  und  $g_j$ . Also gilt

- (i) Wenn alle  $\Phi_{ij}$  einem Büschel angehören, so sind die Geraden  $g_1, \dots, g_4$  alle parallel zu einer Ebene  $\pi$ .

Diese Ebene sei als  $xy$ -Ebene vorausgesetzt. Wir können annehmen, daß das Flächenbüschel  $\mathcal{B}$  von den orthogonalen Paraboloiden

$\Phi = z - 2xy = 0$  und  $\bar{\Phi} = z - c - b[(x-m) + (y-n)][(x-m) - (y-n)]$  aufgespannt wird. Dann genügt die Polare zur Ferngeraden der  $xy$ -Ebene bzgl. der Büschelfläche  $t\Phi + \bar{\Phi}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  den Gleichungen

$$x = b \frac{mb - nt}{b^2 + t^2}, \quad y = b \frac{nb + mt}{b^2 + t^2}.$$

Bei  $m = n = 0$  sind diese Polaren, darunter die Achsen der in  $\mathcal{B}$  enthaltenen Paraboloiden, alle identisch. Ansonsten liegen sie auf dem Drehzylinder mit der Gleichung

$$(4) \quad x^2 + y^2 - mx - ny = 0.$$

Auch die gemeinsamen Normalen  $n_{ij}$  der sechs Geradenpaare gehören dazu. Ein Normalenriß in Richtung der Zylindererzeugenden zeigt allerdings, daß dies nur möglich ist, wenn wenigstens zwei verschiedene Geraden  $g_i, g_j$  deckungsgleich sind – im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit bleibt  $m = n = 0$ , also

- (ii) Wenn alle  $\Phi_{ij}$  einem Büschel angehören, so liegen  $g_1, \dots, g_4$  im Normalennetz einer Geraden  $a$ .

Im folgenden fälle  $a$  in die  $z$ -Achse. Für die gegebenen Geraden setzen wir die Parameterdarstellungen

$$(5) \quad g_i : (0, 0, z_i) + \mathbb{R}(\cos \varphi_i, \sin \varphi_i, 0) \quad \text{für } i = 1, \dots, 4$$

voraus. Dann folgt aus (2)

$$(6) \quad \overline{Xg_i}^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + z^2 - 2zz_i + z_i^2 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \cos 2\varphi_i - xy \sin 2\varphi_i.$$

<sup>4)</sup>Auch bei reduziblem  $V$  können etwa  $\Phi_{12}$  und  $\Phi_{13}$  keine gemeinsame Fernerzeugende besitzen. Dann wäre nämlich eine Symmetrieachse des Paares  $(g_1, g_2)$  parallel zu einer Symmetrieachse von  $(g_1, g_3)$  und somit  $g_2$  parallel zu  $g_3$ .

Die Paraboloiden  $\Phi_{12}, \Phi_{13}, \Phi_{14}$  gehören genau dann einem Büschel an, wenn die zugehörigen Polynome in den Unbestimmten  $x, y, z$ , nämlich  $(\overline{Xg_1^2} - \overline{Xg_2^2})$ ,  $(\overline{Xg_1^2} - \overline{Xg_3^2})$  und  $(\overline{Xg_1^2} - \overline{Xg_4^2})$ , linear abhängig sind. Genau dann existiert nach (6) ein nichttriviales reelles Quadrupel  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  mit

$$\sum_{i=1}^4 a_i = \sum_{i=1}^4 a_i z_i = \sum_{i=1}^4 a_i z_i^2 = \sum_{i=1}^4 a_i \cos 2\varphi_i = \sum_{i=1}^4 a_i \sin 2\varphi_i = 0.$$

(iii) Die Abstandparaboloiden  $\Phi_{ij}$  der Geraden aus (5) gehören genau dann einem Büschel an, wenn die vierzeilige Matrix  $(1, z_i, z_i^2, \cos 2\varphi_i, \sin 2\varphi_i)$  den Rang  $\leq 3$  hat. Ist der Rang kleiner als 3, so müssen zwei Abstandparaboloiden und damit auch zwei der vier Geraden identisch sein.

Satz 2 liefert eine geometrische Deutung dieser Bedingung. Es gilt

(iv) Für paarweise verschiedene Geraden aus (5) gilt

$$\text{Rg}(1, z_i, z_i^2, \cos 2\varphi_i, \sin 2\varphi_i) = 3$$

genau dann, wenn ein Punkt  $X$  existiert, dessen Normalenfußpunkte auf einem Kreis liegen. In zutreffenden Fall kommt diese Eigenschaft jedem Raumpunkt  $X \notin a$  zu.

**Beweis.** Der Normalenfußpunkt auf der Geraden  $g_i$  aus (5) zum Raumpunkt  $X = (\xi, \eta, \zeta)$  ist  $F_i = (x_i, y_i, z_i)$  mit

$$x_i = \frac{\xi(1 + \cos 2\varphi_i) + \eta \sin 2\varphi_i}{2}, \quad y_i = \frac{\xi \sin 2\varphi_i + \eta(1 - \cos 2\varphi_i)}{2}.$$

Die Punkte  $F_1, \dots, F_4$  sind genau dann komplanar und nicht kollinear, wenn  $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$  und

$$(7) \quad \text{Rg}(1, x_i, y_i, z_i) = \text{Rg}(1, \cos 2\varphi_i, \sin 2\varphi_i, z_i) = 3$$

ist. Damit diese vier Fußpunkte auf einer Kugel liegen, muß das Gleichungssystem

$$2x_i m + 2y_i n + 2z_i o + p = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2, \quad i = 1, \dots, 4$$

nach den Unbekannten  $m, n, o, p$  auflösbar sein, und dies ist äquivalent zu

$$(8) \quad \text{Rg}(1, x_i, y_i, z_i) = \text{Rg}(1, x_i, y_i, z_i, x_i^2 + y_i^2 + z_i^2).$$

Wegen  $x_i^2 + y_i^2 = \frac{1}{2}[(\xi^2 + \eta^2) + (\xi^2 - \eta^2) \cos 2\varphi_i + 2\xi\eta \sin 2\varphi_i]$  folgt aus (7) und (8) genau die angegebene Ranggleichung. Diese ist vom Punkt  $X$  unabhängig.  $\diamond$

Wenn für einen Punkt  $X \notin a$  die Fußpunkte der vier paarweise windschiefen Geraden  $g_1, \dots, g_4$  aus dem Normalennetz von  $a$  komplanar liegen, so gehören  $g_1, \dots, g_4$  einem Plückerkonoid  $\Psi$  an. Zur Begründung genügt ein Blick auf den Normalriß in Richtung  $a$ . Auf einem Plückerkonoid  $\Psi$  sind bekanntlich die Fußpunktkurven aller Punkte  $X$  eben, nämlich bei  $X \notin a$  Ellipsen  $f_X$  derselben linearen Exzentrizität in Tangentialebenen von  $\Psi$  (siehe [8], Seite 39ff).

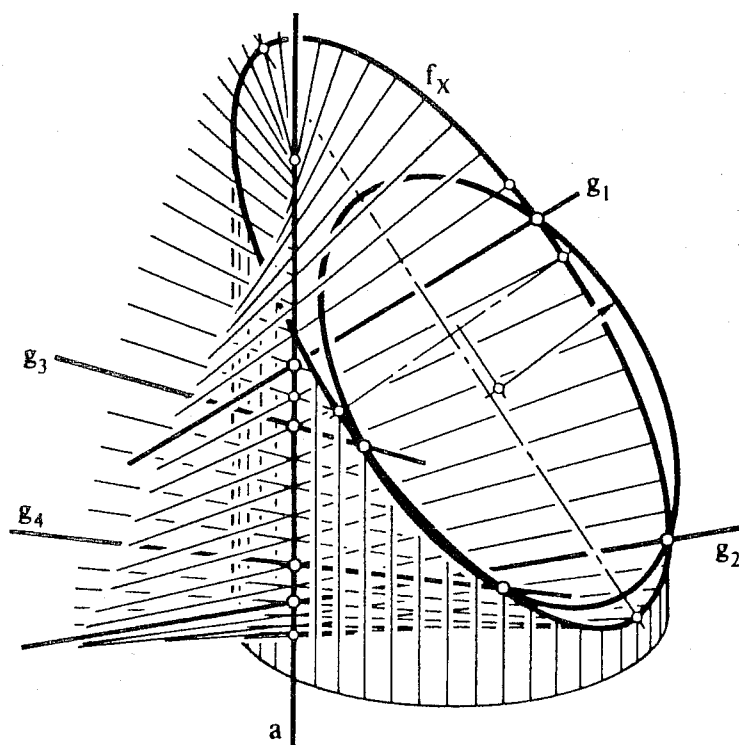


Abbildung 1

Vier konzyklische Geraden  $g_1, \dots, g_4$

Wenn für die vier Erzeugenden  $g_1, \dots, g_4$  von  $\Psi$  die Fußpunkte  $F_1, \dots, F_4$  zu  $X$  auf einem Kreis liegen, so sollen diese Erzeugenden *konzyklisch* heißen. Dann gilt dies nach (iv) für jeden Raumpunkt  $Y \notin a$ . Dies ist auch wie folgt einzusehen: Je zwei Fußpunktkurven  $f_X, f_Y \subset \Psi$  werden durch die Erzeugenden von  $\Psi$  affin aufeinander bezogen, wobei gleichartige Ellipsenscheitel einander entsprechen. Vier konzyklische Punkte  $F_1, \dots, F_4 \in f_X$  sind als Grundpunkte eines Kegelschnitt-

büschels zu kennzeichnen, dessen Desarguesinvolution auf der Ferngeraden die Fixpunkte in den Achsenfernpunkten von  $f_X$  hat. Und diese Eigenschaft ist invariant gegenüber der speziellen Affinität  $f_X \mapsto f_Y$ .

Um demnach zu drei Erzeugenden  $g_1, \dots, g_3$  des Plückerkonoids  $\Psi$  eine vierte zu finden, die mit  $g_1, \dots, g_3$  konzyklische Lage hat, muß nur zu beliebigem  $X \notin a$  der Restschnittpunkt der Fußpunktkurve  $f_X$  mit dem Umkreis der Fußpunkte auf  $g_1, g_2$  und  $g_3$  aufgesucht werden (siehe Abb. 1). Ein Zusammenfallen dieser vierten Geraden mit einer der drei gegebenen ist allerdings möglich.

Konzyklische Lage auf einem Plückerkonoid ist auch in dem oben ausgeschlossenen Fall  $\Phi_{12} = \Phi_{34}$  gegeben, denn bzgl.  $\Phi_{12}$  assoziierte Geradenpaare schneiden die Ellipse  $f_X$  auf  $\Psi_{12}$  in Punkten, die bzgl. der Nebenachse von  $f_X$  symmetrisch liegen.

**Satz.** Die sechs Abstandsparaboloide  $\Phi_{ij}$ ,  $i, j \in \{1, \dots, 4\}$ ,  $i < j$  zu vier paarweise windschiefen Geraden  $g_1, \dots, g_4$  gehören genau dann einem Büschel an, wenn  $g_1, \dots, g_4$  konzyklische Erzeugende eines Plückerkonoids  $\Psi$  sind.

Die folgende Diskussion wird zeigen, daß in den genannten Fällen die Grundkurve des Büschels stets irreduzibel ist.

## 5. V enthält einen einteiligen Kegelschnitt

Dieser Fall wird sich als unmöglich erweisen: Angenommen,  $\Phi_{12} \cap \Phi_{13}$  enthält einen einteiligen Kegelschnitt. Dann muß das von  $\Phi_{12}$  und  $\Phi_{13}$  aufgespannte Flächenbüschel, dem auch  $\Phi_{23}$  angehört, ein Paar reeller Ebenen oder eine doppelt gezählte reelle Ebene enthalten. Wieder gibt es mehr als drei Büschelflächen mit singulären Fernkurven; also müssen die Fernkurven aller Büschelflächen singulär sein. Da der Fall einer gemeinsamen Ferngeraden von  $\Phi_{12}$  und  $\Phi_{13}$  laut Fußnote <sup>4)</sup> auszuschließen ist, bilden die Fernkurven der Flächen des von  $\Phi_{12}$  und  $\Phi_{13}$  aufgespannten Büschels wiederum die Elementepaare der Involution absolut konjugierter Geraden durch einen festen Punkt  $U$ . Und die Paraboloidachsen wie auch die singuläre Gerade  $s$  des Ebenenpaares liegen gemäß (4) auf einem Drehzylinder mit der Spitze  $U$  oder sie fallen alle zusammen.

Die Schnittgerade  $s$  des Ebenenpaares schneidet  $\Phi_{12}$  neben  $U$  noch in einem eigentlichen Punkt  $S$ , und auch dieser ist ein Berührungspunkt zwischen  $\Phi_{12}$  und  $\Phi_{13}$ . Die gemeinsame Tangentialebene ist nach Satz 1



die Symmetrieebene zwischen den Fußpunktpaaren  $(F_1, F_2)$  und  $(F_1, F_3)$ . Dies aber hat  $F_2 = F_3$  und damit schneidende Geraden  $g_2, g_3$  zur Folge, und das ist ein Widerspruch<sup>5)</sup>.

## 6. V enthält eine irreduzible Kubik

Die Annahme, daß alle Abstandsparaboloide eine Kubik  $c$  gemein haben, wird sich gleichfalls als unmöglich erweisen: Dann nämlich schneiden je zwei verschiedene Abstandsparaboloide einander noch in einer Geraden. So ist etwa der Restschnitt  $a_m$  der Paraboloide  $\Phi_{ij}$  und  $\Phi_{ik}$  ( $m \neq i, j, k, j \neq k$ ) gemäß Satz 1 die Achse eines Drehhyperboloids durch die Geraden  $g_i, g_j, g_k$ . Die Achsen  $a_1, \dots, a_4$  dieser vier Drehhyperboloide durch je drei der vier gegebenen Geraden sind paarweise verschieden. Andernfalls nämlich würden alle Abstandsparaboloide dem Bündel mit der Grundkurve  $c \cup a_4$  angehören, und dies ist nach Satz 3 ausgeschlossen.

Wir betrachten eines dieser Drehhyperboloide genauer: Die Achse  $a_4$  des Drehhyperboloids durch  $g_1, g_2, g_3$  falle in die  $z$ -Achse, und wir setzen

$$(9) \quad g_i = (a \cos \varphi_i, a \sin \varphi_i, 0) + \mathbb{R}(-a \sin \varphi_i, a \cos \varphi_i, b), \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

mit  $a, b$  als Achsenlängen der Meridianhyperbeln. Mittels (2) folgt als Gleichung des Abstandsparaboloids

$$(10) \quad \Phi_{ij}: (a^2 + b^2)(s_{ij}x - c_{ij}y) + (c_{ij}x + s_{ij}y)[a\bar{c}_{ij}(-s_{ij}x + c_{ij}y) + bz] = 0$$

für  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Dabei ist zur Abkürzung

$$s_{ij} := \sin \frac{\varphi_i + \varphi_j}{2}, \quad c_{ij} := \cos \frac{\varphi_i + \varphi_j}{2}, \quad \bar{c}_{ij} := \cos \frac{\varphi_i - \varphi_j}{2}$$

gesetzt. Der in der  $xy$ -Ebene gelegene Grundriß der Schnittkubik  $c \subset (\Phi_{12} \cap \Phi_{13})$  genügt der Gleichung

$$\frac{a^2 + b^2}{a}(x^2 + y^2) - (c_{12}x + s_{12}y)(c_{13}x + s_{13}y)(c_{23}x + s_{23}y).$$

---

<sup>5)</sup>Werden  $g_1$  und  $g_2$  als schneidend vorausgesetzt, so zerfällt  $\Phi_{12}$  in ein Ebenenpaar. Bei der Suche nach Konfigurationen mit unendlich vielen Lösungen entfallen die unter (a) und (b) angeführten Möglichkeiten einer Quartik bzw. Kubik. Analog bei parallelen  $g_1, g_2$ .

Der Ansatz  $y = tx$  führt auf die folgende rationale Parameterdarstellung von  $c$ :

$$(11) \quad \begin{aligned} x &= \frac{(a^2 + b^2)(1 + t^2)}{(c_{12} + s_{12}t)(c_{13} + s_{13}t)(c_{23} + s_{23}t)} \\ y &= \frac{(a^2 + b^2)t(1 + t^2)}{(c_{12} + s_{12}t)(c_{13} + s_{13}t)(c_{23} + s_{23}t)}, \\ z &= \frac{(a^2 + b^2)(s_{12} - c_{12}t)(s_{13} - c_{13}t)(s_{23} - c_{23}t)}{(c_{12} + s_{12}t)(c_{13} + s_{13}t)(c_{23} + s_{23}t)}. \end{aligned}$$

Die Hyperboloidachse  $a_4$  schneidet  $c$  in den konjugiert komplexen Punkten

$$(12) \quad \left( 0, 0, \pm \frac{i(a^2 + b^2)}{b} \right).$$

Die Tangentialebenen an  $\Phi_{12}$  und  $\Phi_{13}$  in diesen Punkten sind übrigens isotrop<sup>6)</sup>.

Wie die Nenner in (11) zeigen, hat  $c$  drei paarweise verschiedene reelle Fernpunkte  $U, V, W$ . Da durch  $c$  sechs orthogonale Paraboloiden legbar sind, liegen diese Fernpunkte in paarweise orthogonalen Richtungen. Wir können  $VW$  als gemeinsame Fernerzeugende von  $\Phi_{12}$  und  $\Phi_{34}$ ,  $UV$  als Erzeugende von  $\Phi_{13}$  und  $\Phi_{24}$  sowie  $UV$  als Erzeugende von  $\Phi_{14}$  und  $\Phi_{23}$  voraussetzen.

Auf dem Abstandsparaboloid  $\Phi_{ij}$  besteht eine Erzeugendenschar aus lauter Bisekanten von  $c$ , darunter die Achsen  $a_k, a_l$  der Drehhyperboloide durch  $g_i, g_j, g_l$  bzw.  $g_i, g_j, g_k$ . Die in der Fernebene gelegene Bisekante ist eine der vorhin genannten Seiten des Dreiecks  $UVW$ .

Nun projizieren wir die Kubik  $c$ , die Drehachsen  $a_1, \dots, a_4$  und alle Abstandsparaboloiden aus einem Punkt  $Z \in c$  in eine Ebene  $\pi$ : Wir können  $Z$  verschieden von  $U, V, W$  und außerhalb der Achsen  $a_1, \dots, a_4$  voraussetzen: Das Bild von  $c$  ist ein Kegelschnitt  $c^z$  (siehe Abb 2). Die auf  $\Phi_{ij}$  gelegenen nichtprojizierenden Bisekanten erscheinen als Geraden eines Büschels. Büschelträger  $\Phi_{ij}^z$  ist der Riß jener Erzeugenden von  $\Phi_{ij}$ , welche durch  $Z$  geht und alle Bisekanten von  $c$  schneidet. Die Bildgeraden  $a_k^z, a_l^z$  durch  $\Phi_{ij}^z$  sind verschieden und dürfen  $c^z$  gemäß (12)

<sup>6)</sup>Für jeden dieser Schnittpunkte liegen die Normalenfußpunkte von  $g_1, g_2$  und  $g_3$  auf einer der Hyperboloiderzeugenden innerhalb der Scheiteltangentialebenen  $z = \pm ib$ . Die Fußpunkte sind also kollinear (vgl. Satz 1, 3.).

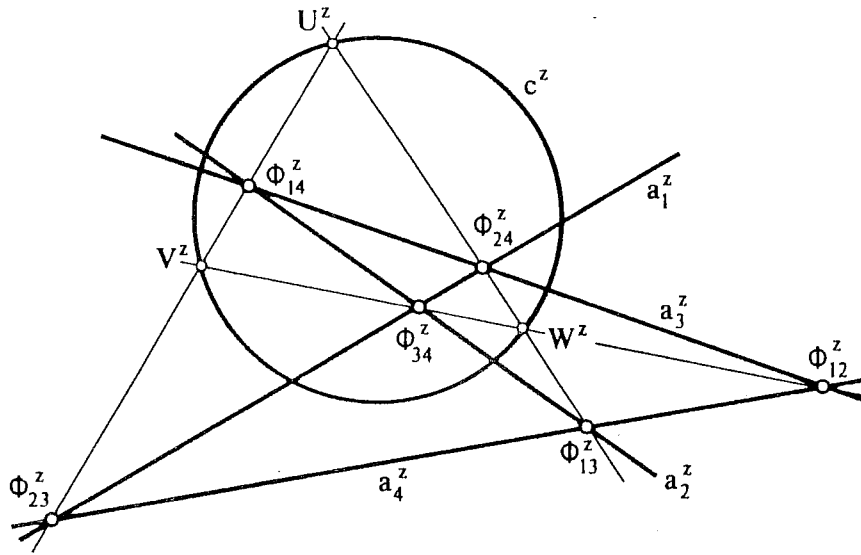


Abbildung 2

Zentralriß der Kubik  $c$  und der Hyperboloidachsen  $a_1, \dots, a_4$

nicht reell schneiden.  $\Phi_{ij}^z$  liegt damit im Außengebiet von  $c^z$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, 4\}, i < j$ .

$U^z V^z W^z$  bilden ein dem Kegelschnitt  $c^z$  eingeschriebenes Dreieck. Jede Dreiecksseite ist Bild einer Bisekanten, die zwei Paraboloiden gleichzeitig angehört. Daher liegen die Bündelträger  $\Phi_{12}^z = a_3^z \cap a_4^z$  und  $\Phi_{34}^z = a_1^z \cap a_2^z$  auf der Verbindung  $V^z W^z$ ,  $a_1^z \cap a_3^z$  und  $a_2^z \cap a_4^z$  auf  $U^z W^z$  sowie  $a_1^z \cap a_4^z$  und  $a_2^z \cap a_3^z$  auf  $U^z V^z$ . Die Seiten des Dreiecks  $U^z V^z W^z$  sind also Diagonalen des Vierseits  $a_1^z, \dots, a_4^z$ . Die Punkte  $V^z, W^z \in c^z$  trennen  $\Phi_{12}^z$  und  $\Phi_{34}^z$  harmonisch. Daher kann nur genau einer dieser beiden Bündelträger im Außengebiet von  $c^z$  liegen – im Widerspruch zur oben gemachten Feststellung.

## 7. Hauptsatz

Wir fassen zusammen:

**Satz 4.** *Es gibt zwei Fälle, bei welchen vier paarweise windschiefe Geraden  $g_1, \dots, g_4$  von unendlich vielen Kugeln berührt werden: Entweder liegen die gegebenen Tangenten auf einem Drehhyperboloid oder sie sind konzyklische Erzeugende eines Plückerkonoids  $\Psi$  (siehe Abb. 1).*

Im zweitgenannten Fall ist die Mittenkurve der Berührungskugelschar

eine rationale Quartik; ihr Normalriß in Richtung der Leitgeraden  $a$  von  $\Psi$  ist eine gleichseitige Hyperbel mit den Rissen der Torsalerzeugenden von  $\Psi$  als Asymptoten. Die Hüllfläche der Kugeln ist eine Kanalfläche, und zwar eine, die vier Geraden trägt.

## Literatur

- [1] BOTTEMA, O. and VELDKAMP, G. R.: On the lines in space with equal distances to  $n$  given points. *Geom. Dedicata* 6 (1977), 121–129.
- [2] HUSTY, M. and ANGELES, J.: Kinematic Isotropy in 3R Positioning Manipulators. In A. J. Lenarčič, B. B. Ravani (eds.): *Advances in Robot Kinematics and Computationed Geometry*, 181–190, Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [3] HUSTY, M. und SACHS, H.: Abstandsprobleme zu windschiefen Geraden I, *Sitzungsber. d. Österr. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl.* (im Druck).
- [4] KRAMES, J.: Über die in einem Strahlnetz enthaltenen Drehhyperboloide, *Rad. Jugosl. Akad. Znan. Umjet., Mat. Znan.* 2 (1983), 1–7.
- [5] SALMON, G. und FIEDLER, W.: *Analytische Geometrie der Raumes*. 1. Theil: Die Elemente und die Theorie der Flächen zweiten Grades, Verlag Teubner, Leipzig, 1863.
- [6] STACHEL, H. und ABDELMOEZ, H.: Voronoi Diagrams and Offsets of Polyhedra, *Proc. International Conference on Applied Informatics*, Eger (1993), 1–10.
- [7] WUNDERLICH, Th. A.: Die geometrischen Grundlagen der GPS-Einzelpunktbestimmung. *Ingenieurvermessung* 92, Band 1, I 2/1-2/12, Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn (1992).
- [8] WUNDERLICH, W.: *Darstellende Geometrie II*, Bibliographisches Institut Mannheim (1967).
- [9] WUNDERLICH, W.: Aufgabe 879, *Elem. Math.* 37 (1982) S. 93. Auflösung von A. Müller, 38 (1983), 71–72.
- [10] WUNDERLICH, W.: Die Netzflächen konstanten Dralls, *Sitzungsber. d. Österr. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl.* 191 (1982), 59–84.