

KLASSIFIKATIONSTHEORIE DER VERALLGEMEINERTEN ZYKLIDEN 4. ORDNUNG IN PSEUDOISOTROPEN RAUM

Ferenc Mészáros

*Lehrstuhl für Angewandte Geometrie, Montanuniversität Leoben,
A-8700 Leoben, Österreich*

Received: June 2007

MSC 2000: 53 A 40, 51 N 25

Keywords: Pseudo-isotropic space, cyclides of order 4, classification-theory, canonical forms.

Abstract: A pseudoisotropic space $I_3^{(1)p}$ is a three-dimensional affine space with the metric $ds^2 = dx^2 - dy^2$ induced by an absolute figure $\{\omega, f_1, f_2, F\}$, where ω is the plane at infinity and f_1, f_2 are two real lines in ω with intersecting point F . On $I_3^{(1)p}$ acts a five-parameter group G_5 of projective automorphism of $\{\omega, f_1, f_2, F\}$ as a fundamental group. A cyclide ϕ_i is an algebraic surface in $I_3^{(1)p}$ of order 4 that intersects ω only along the absolute lines f_1, f_2 . If every plane through f_1 (f_2) intersects ϕ still by an irreducible curve of order 3, then ϕ is called a generalized cyclide of order 4. In this paper and in the second part too, we develop the transformation-theory of these surfaces and construct their corresponding canonical forms with respect to the group G_5 . In this way, we get 25 main-classes with together 109.568 types of generalized cyclides of order 4. The classification succeeds by using special intersection points on f_1 resp. f_2 with ϕ , by investigation of two corresponding cyclides of order 3 and especially by studying certain central-surfaces Σ^* of order 2, that is G_5 -invariant connected with ϕ .

1. Einleitung

Den Übergang von der *projektiven Geometrie* zu den singulären nichteuklidischen Geometrien liefern die *axialen Geometrien*, die vor

allem von B. Petkantschin (vgl. [30], [31]) und seiner bulgarischen Schule von G. Stanilow (vgl. [42]), aber auch von O. Mayer (vgl. [20]) in Rumänien weitgehend entwickelt wurde. Eine umfassende Literaturübersicht findet man bei H. Sachs in [36]. Bei diesen Geometrien wird ein projektiver Raum über eine Absolutfigur metrisiert, die aus 2 windschiefen Geraden f_1, f_2 besteht, und deren projektive Automorphismengruppe im Sinne von F. Klein (vgl. [16]) als *Fundamentalgruppe* der zugeordneten biaxialen Geometrie gewählt wird. Wählt man f_1 und f_2 als schneidende Geraden und legt man diese in die Fernebene ω eines projektiv erweiterten affinen Raumes A_3 , so gelangt man zu den *einfach isotropen Räumen*. Sind hierbei f_1 und f_2 konjugiert-komplex mit dem reellen Schnittpunkt F , so erhält man die *einfach isotrope Geometrie*, die vor allem von K. Strubecker (vgl. [44]) ausführlich untersucht wurde; eine ausführliche Darstellung dieser singulären nichteuklidischen Geometrie findet man in der Monographie [41] von H. Sachs. Werden hingegen f_1 und f_2 als reelle, schneidende Geraden in der Fernebene gewählt, so gelangt man zum pseudoisotropen Raum $I_3^{(1)p}$, der den folgenden Untersuchungen zu Grunde liegt.

Wir bezeichnen im Folgenden mit $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \neq (0 : 0 : 0 : 0)$ *projektive Koordinaten* und mit

$$(1.1) \quad x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}, \quad z = \frac{x_3}{x_0} \quad (x_0 \neq 0)$$

die zugeordneten *affinen Koordinaten* in A_3 . $x_0 = 0$ legt dann die Menge der Fernpunkte, d.h. die Fernebene ω fest. Es ist dann üblich die *Absolutfigur* durch

$$(1.2) \quad f_1 \dots x_0 = x_1 = 0, \quad f_2 \dots x_0 = x_2 = 0 \quad \text{und} \quad F(0 : 0 : 0 : 1)$$

zu beschreiben. Hierbei heißen die beiden Geraden f_1 und f_2 die *absoluten Geraden* und ihr Schnittpunkt F der *absolute Punkt*. Genauer wird die Gerade f_1 als *erste absolute Gerade* und f_2 als *zweite absolute Gerade* bezeichnet. Die zur Absolutfigur $\{\omega, f_1, f_2, F\}$ gehörige *allgemeine projektive Automorphismengruppe* besitzt dann die Darstellung

$$(1.3) \quad G_8^p \dots \begin{cases} \bar{x} = a_1 + a_2x \\ \bar{y} = a_3 + a_2y \\ \bar{z} = a_5 + a_6x + a_7y + a_8z. \end{cases}$$

Sie hängt von 8 freien Parametern ab. Ihre wichtigste Untergruppe ist die *fünfparametrische Grenzgruppe* G_5 mit der Darstellung

$$(1.4) \quad G_5 \dots \begin{cases} \bar{x} = b_1 + x \\ \bar{y} = b_2 + y \\ \bar{z} = b_3 + b_4x + b_5y + z. \end{cases}$$

Diese Menge der bezüglich G_5 invarianten Aussagen bildet die pseudoisotrope Grenzgeometrie $\{I_3^{(1)p}, G_5\}$. Auch wir werden der folgenden Untersuchungen die Gruppe G_5 zugrunde legen; diese enthält auch die 3-parametrische Schiebungsgruppe $\{\bar{x} = b_1 + x, \bar{y} = b_2 + y, \bar{z} = b_3 + z\}$. Eine (1.4) umfassende Untergruppe von (1.3) ist die *sechsparametrische pseudoisotrope Bewegungsgruppe*

$$(1.5) \quad B_6^{(1)p} \dots \begin{cases} \bar{x} = b_1 + px \\ \bar{y} = b_2 + \frac{1}{p}y & (p \neq 0), \\ \bar{z} = b_3 + b_4x + b_5y + z \end{cases}$$

die vor allen von K. Strubecker in [43] untersucht wurde.

Weitere wichtige Beiträge findet man in der russischen Literatur, speziell in den Abhandlungen von R. Balabanowa (vgl. [1]), S. I. Wasiljewa, L. Konjaewa und L. Liberman (vgl. [2]), und vor allem bei R. G. Proskurina (vgl. [32] und [33]); ich selbst habe in [24] die Flächen 2. Ordnung des $I_3^{(1)p}$ systematisch klassifiziert und gezeigt, dass bezüglich der pseudoisotropen Bewegungsgruppe (1.4) genau 114 Typen von Flächen 2. Ordnung existieren; diese Flächen werden im folgendem eine wichtige Rolle spielen.

Ebenen durch $f_1(f_2)$ werden als *vollisotrope Ebenen 1. Art (2. Art)* bezeichnet; zum Unterschied von den vollisotropen Ebenen des $I_3^{(1)}$ sind diese Ebenen hier reell. Ebenen, die F , aber nicht f_1 oder f_2 als ganzes enthalten, heißen *isotrope Ebenen*. Ebenen, die weder vollisotrop noch isotrop sind, heißen *nichtisotrop*.

In den nichtisotropen Ebenen (z.B. in $z = 0$) wird eine *pseudoeuklidische Geometrie* induziert, während in den isotropen und vollisotropen Ebenen eine *ebene isotrope Geometrie* vorliegt.

Der ebenen isotropen Geometrie ist die Monographie [37] von H. Sachs gewidmet. Bezüglich der pseudoeuklidischen Geometrie vergleiche man die sehr algebraisch orientierte Einführung bei W. Benz (vgl. [4]), sowie die Abhandlungen [5], [6] und [9]. Die *Kurven 2. Ordnung* der pseudoisotropen Geometrie wurden von N. W. Reweruk in [34] ausführlich untersucht. Hinsichtlich der Kreisgeometrie vergleiche man die umfangreiche Arbeit von W. Benz (vgl. [3]).

Ähnlich wie im einfach isotropen Raum (vgl. [41]) können nun *metrische Aufgaben* im pseudoisotropen Raum dadurch gelöst werden, dass man die entsprechenden Elemente in die Ebene $z = 0$ projiziert und dort die Bildelemente pseudoeuklidisch misst.

Unter einer *Zyklide 4. Ordnung* $\Phi(4)$ des pseudoisotropen Raumes $I_3^{(1)p}$ versteht man eine irreduzible, algebraische Fläche 4. Ordnung, die die Fernebene ω nur nach den beiden absoluten Geraden f_1 und f_2 schneidet. Eine Fläche dieser Art lässt sich somit durch eine algebraische Gleichung der Bauart

$$(1.6) \quad \begin{aligned} F \equiv & x^2y^2 + Ax^3 + By^3 + Cz^3 + Dx^2y + Exz^2 + Ry^2z + \\ & + Gx^2z + Hxy^2 + Jyz^2 + Kxyz + dx^2 + ey^2 + fz^2 + \\ & + gxy + hyz + jxz + ax + by + cz + t = 0 \end{aligned}$$

beschreiben, wobei alle Koeffizienten als reell vorausgesetzt werden.

Der Begriff der Zyklide des pseudoisotropen Raumes $I_3^{(1)p}$ ist naturgemäß eine Verallgemeinerung des Zyklidenbegriffs im dreidimensionalen euklidischen Raum, wo diese bemerkenswerten Flächen (vgl. [17], [18] und z.B. [19]) nicht nur theoretisches Interesse (vgl. [8]) besitzen, sondern gerade in neuerer Zeit in die Computergeometrie Eingang gefunden haben (vgl. [7], [21]). Der Gestaltenreichtum dieser Flächen – und dies gilt in noch größerem Ausmaß für die Zykliden des $I_3^{(1)p}$ – erlaubt ein handliches Modellieren geometrischer Strukturen.

Zu einer ersten groben Einteilung der Flächen (1.6) gelangt man, indem man ihre Schnitte mit den vollisotropen Ebenen $x = \text{konst.}$ bzw. $y = \text{konst.}$ betrachtet. Folgende Fälle sind möglich:

- a) Der Schnitt besteht aus den einfach zu zählenden Geraden $f_1 \dots x_0 = x_1 = 0$ bzw. $f_2 \dots x_0 = x_2 = 0$ und einer ebenen Kubik k_3 .
- b) Der Schnitt besteht aus den doppelt zu zählenden Geraden f_1 bzw. f_2 und einer Kurve 2. Ordnung.
- c) Der Schnitt besteht aus den dreifach zu zählenden Geraden f_1 bzw. f_2 und einer weiteren Geraden.

Durch Kombination der einzelnen Fälle stellen sich damit wegen der Symmetrie die folgenden *Haupttypen* ein:

- A) f_1 und f_2 sind einfache Geraden;
- B) f_1 und f_2 sind Doppelgeraden;
- C) f_1 und f_2 sind dreifache Geraden;
- D) f_1 ist einfache Gerade, f_2 ist Doppelgerade;
- E) f_1 ist einfache Gerade, f_2 ist dreifache Gerade;

F) f_1 ist Doppelgerade, f_2 ist dreifache Gerade.

Im Fall C), E) und F) stellen sich *Regelflächen* ein. Der Fall B) wurde in den Arbeiten von M. Husty und O. Röschel (vgl. [12], [13], [14] und [15]) unter projektiven Gesichtspunkten von ausführlich untersucht. Eine Gesamtklassifikation aller Typen bezüglich der Gruppe $B_6^{(1)p}$ wäre ein Unternehmen von ungeheurem Umfang. Wir beschäftigen uns in dieser Abhandlung ausschließlich mit dem Haupttyp A) und bezeichnen diese Zykliden als verallgemeinerte Zykliden 4. Ordnung. Wir werden in dieser Arbeit zeigen, daß in $I_3^{(1)p}$ genau 25 Hauptklassen verallgemeinerte Zykliden existieren, die wir durch geeignete Normalformen beschreiben.¹ In der vorliegenden Abhandlung werden nebst allgemeiner theoretischen Grundlagen der Hauptklasse I–X behandelt, während der 2. Teil dieser Arbeit der Hauptklasse XI–XXV gewidmet ist.

2. Vier Charakteristika zur Transformationstheorie

In projektiven Koordinaten lautet (1.6)

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad F \equiv & x_1^2 x_2^2 + Ax_1^3 x_0 + Bx_2^3 x_0 + Cx_3^3 x_0 + Dx_1^2 x_2 x_0 + Ex_1 x_2^3 x_0 + \\
 & + Rx_2^2 x_3 x_0 + Gx_1^2 x_3 x_0 + Hx_1 x_2^2 x_0 + Jx_2 x_3^2 x_0 + Kx_1 x_2 x_3 x_0 + \\
 & + dx_1^2 x_0^2 + ex_2^2 x_0^2 + fx_3^2 x_0^2 + gx_1 x_2 x_0^2 + hx_2 x_3 x_0^2 + jx_1 x_3 x_0^2 + \\
 & + ax_1 x_0^3 + bx_2 x_0^3 + cx_3 x_0^3 + Tx_0^4 = 0.
 \end{aligned}$$

Schneidet man die Fläche (2.1) mit der Ebene $x_1 = 0$, so erhält man die Schnittkurve

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad & Bx_2^3 x_0 + Cx_3^3 x_0 + Rx_2^2 x_3 x_0 + Jx_2 x_3^2 x_0 + ex_2^2 x_0^2 + \\
 & + fx_3^2 x_0^2 + hx_2 x_3 x_0^2 + bx_2 x_0^3 + cx_3 x_0^3 + Tx_0^4 = 0.
 \end{aligned}$$

Die Lösung $x_0 = 0$ liefert die Ferngerade f_1 . Gilt weiters nicht $B = C = R = J = 0$, dann verbleibt als Restschnitt die ebene Kubik k_1

$$(2.3) \quad By^3 + Cz^3 + Ry^2 z + Jyz^2 + ey^2 + fz^2 + hyz + by + cz + T = 0.$$

Diese schneidet die Ferngerade f_1 im algebraischen Sinn über dem

¹ Herrn o. Univ. – Prof. Mag. Dr. H. Sachs danke ich für die Themenstellung und viele hilfreiche Diskussionsbeiträge.

Körper C der komplexen Zahlen in 3 Punkten T_1, T_2, T_3 , die durch die Nullstellen der Gleichungen

$$(2.4) \quad \{Bx_2^3 + Cx_3^3 + Rx_2^2x_3 + Jx_2x_3^2 = 0, x_1 = 0\}$$

festgelegt werden. Schneidet man allgemein die Fläche (2.1) mit einer *vollisotropen Ebene 1. Art* $x_1 = \gamma x_0$ ($\gamma = \text{konst.}$), so stellt sich ein

$$(2.5) \quad \begin{aligned} & \gamma^2 x_0^2 x_2^2 + A\gamma^3 x_0^4 + Bx_2^3 x_0 + Cx_3^3 x_0 + D\gamma^2 x_2 x_0^3 + E\gamma x_0^2 x_3^2 + \\ & + Rx_2^2 x_3 x_0 + G\gamma^2 x_3 x_0^3 + H\gamma x_2^2 x_0^2 + Jx_2 x_3^2 x_0 + K\gamma x_2 x_3 x_0^2 + \\ & + d\gamma^2 x_0^4 + ex_2^2 x_0^2 + fx_3^2 x_0^2 + g\gamma x_2 x_0^3 + hx_2 x_3 x_0^2 + j\gamma x_3 x_0^3 + \\ & + a\gamma x_0^4 + bx_2 x_0^3 + cx_3 x_0^3 + Tx_0^4 = 0. \end{aligned}$$

Nebst der Ferngeraden $f_1 K$ $x_0 = x_1 = 0$ erhält man somit wieder eine *Kubik 1. Art* k_1 und diese besitzt dieselben Fernpunkte T_1, T_2, T_3 , die durch (2.4) gegeben sind. Analog findet man für die Schnitte von (2.1) mit *vollisotropen Ebenen 2. Art* *ebene Kubiken* k_2 , die die f_2 in denselben Fernpunkte S_1, S_2, S_3 im algebraischen Sinne über dem Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen schneiden. Die dazugehörigen Nullstellen werden durch die Gleichungen

$$(2.6) \quad \{Ax_1^3 + Cx_2^3 + Ex_1x_3^2 + Gx_1^2x_3 = 0, x_2 = 0\}$$

festgelegt werden. Wir fassen zusammen im

SATZ 2.1. *Verallgemeinerte Zykliden 4. Ordnung werden durch eine Gleichung der Form (2.1) bestimmt, wobei nicht gleichzeitig $A = B = C = E = G = J = R = 0$ gilt. Alle vollisotropen Ebenen 1. Art (2. Art) schneiden die Fläche nebst $f_1(f_2)$ in ebenen Kubiken 1. Art (2. Art), die $f_1(f_2)$ alle in den Punkten T_1, T_2, T_3 bzw. S_1, S_2, S_3 schneiden. Diese Punkte werden im algebraischen Sinn über dem Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen durch die Nullstellen der Gleichungen (2.4) bzw. (2.6) festgelegt.*

Die fundamentalen Gleichungen (2.4) und (2.6) liefern das 1. Charakteristikum für die *Hauptklassifikation der verallgemeinerten Zykliden 4. Ordnung*, wobei als Einteilungsprinzip die Vielfachheit und die Realität der Punkte T_1, T_2, T_3 bzw. S_1, S_2, S_3 , sowie ihre Lage zum absoluten Punkt F herangezogen wird. Dabei sind die Gleichungen (2.4) und (2.6) weitgehend unabhängig. Nur wenn $C = 0$ ist, d.h. wenn $T_1 = F$ gemäß (2.4) gilt, erhält man aus (2.6) die Aussage, dass dann auch $S_1 = F$ gilt. Dies bedeutet geometrisch: Laufen die vollisotropen Kubiken 1. Art durch F , dann gilt dasselbe auch für die vollisotropen

Kubiken 2. Art. Werden die verallgemeinerten Zykliden 4. Ordnung nach diesem Gesichtspunkt klassifiziert, dann ergeben sich die folgenden 25 Hauptklassen:

Hauptklasse I: T_1, T_2, T_3 und S_1, S_2, S_3 sind reell und verschieden und von F verschieden.

Hauptklasse II: T_1, T_2, T_3 reell und verschieden, $S_1 = S_2 \neq S_3$, alle Punkte von F verschieden.

Hauptklasse III: T_1, T_2, T_3 reell und verschieden, $S_1 = S_2 = S_3$, alle Punkte von F verschieden.

Hauptklasse IV: T_1 reell; T_2, T_3 konjugiert-komplex, $S_1, S_2, S_3 \notin F$ reell und verschieden.

Hauptklasse V: T_1 reell; T_2, T_3 konjugiert-komplex; $S_1 = S_2 \neq S_3$ reell.

Hauptklasse VI: T_1 reell; T_2, T_3 konjugiert-komplex; $S_1 = S_2 = S_3 \neq F$.

Hauptklasse VII: T_1 reell T_2, T_3 ; konjugiert-komplex, S_1 reell; S_2, S_3 konjugiert-komplex.

Hauptklasse VIII: $T_1 \neq T_2 = T_3$, $S_1 \neq S_2 = S_3$ alle von F verschieden.

Hauptklasse IX: $T_1 = T_2 = T_3$, $S_1 = S_2 = S_3$, alle von F verschieden.

Hauptklasse X: $T_1 = T_2 \neq T_3$, $S_1 \neq S_2 = S_3$ alle von F verschieden.

Hauptklasse XI: $T_1 = S_1 = F$, $T_2 \neq T_3$, $S_2 \neq S_3$.

Hauptklasse XII: $T_1 = S_1 = F$, $T_2 = T_3 \neq F$, $S_2 \neq S_3$.

Hauptklasse XIII: $T_1 = S_1 = F$, $T_2 = T_3 \neq F$, $S_2 \neq S_3 \neq F$.

Hauptklasse XIV: $T_1 = S_1 = F$, T_2, T_3 konjugiert-komplex, S_2, S_3 konjugiert-komplex.

Hauptklasse XV: $T_1 = S_1 = F$, $T_2 \neq T_3$, S_2, S_3 konjugiert-komplex.

Hauptklasse XVI: $T_1 = S_1 = F$, $T_2 = T_3 \neq F$, S_2, S_3 konjugiert-komplex.

Hauptklasse XVII: $T_1 = S_1 = S_2 = F$, $T_2 \neq T_3$ verschieden von F , $S_3 \neq F$.

Hauptklasse XVIII: $T_1 = S_1 = S_2 = F$, T_2, T_3 konjugiert-komplex, $S_3 \neq F$.

Hauptklasse XIX: $T_1 = S_1 = S_2 = F$, $T_2 = T_3$ verschieden von F , $S_3 \neq F$.

Hauptklasse XX: $T_1 = T_2 = S_1 = S_2 = F$, $S_3 \neq F$, $T_3 \neq F$.

Hauptklasse XXI: $S_1 = S_2 = S_3 = T_1 = F$, $T_2 \neq T_3$ verschieden von F .

Hauptklasse XXII: $S_1 = S_2 = S_3 = T_1 = F$, T_2, T_3 konjugiert-komplex.

Hauptklasse XXIII: $S_1 = S_2 = S_3 = T_1 = F$, $T_2 = T_3$ verschieden von F .

Hauptklasse XXIV: $S_1 = S_2 = S_3 = T_1 = T_2 = F$, T_3 verschieden von F .

Hauptklasse XXV: $S_1 = S_2 = S_3 = T_1 = T_2 = T_3 = F$.

Beschreibt man Fernpunkte auf f_1 bzw. f_2 durch $(0 : 0 : 1 : n)$ bzw. $(0 : 1 : 0 : m)$ dann lauten die Gleichungen (2.4) bzw. (2.6) in affinen Koordinaten

$$(2.7) \quad Cn^3 + Jn^2 + Rn + B = 0$$

bzw.

$$(2.8) \quad Cm^3 + Em^2 + Gm + A = 0,$$

wobei für die Hauptklassen I–X stets $C \neq 0$ gilt.

Für die weiteren Untersuchungen benötigen wir Resultate über kubische Gleichungen, wobei wir [10,98] folgen. Wir bilden die Größen

$$(2.9) \quad \Delta_1 = \frac{1}{9}(3CR - J^2), \quad \Delta_2 = \frac{1}{9}(9CB - JR), \quad \Delta_3 = \frac{1}{9}(3JB - R^2)$$

und hieraus die Diskriminante von (2.7), nämlich

$$(2.10) \quad \Delta = 4\Delta_1\Delta_3 - \Delta_2^2.$$

Je nachdem $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ oder $\Delta < 0$ gilt, sind die Nullstellen von (2.7) dann reell und verschieden, reell, darunter zwei gleiche oder eine ist reell und die beiden anderen konjugiert-komplex.

Besitzt (2.7) eine *dreifache Nullstelle*, dann gilt

$$(2.11) \quad \Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0.$$

Bildet man die analogen Ausdrücke für die Gleichung (2.8), d.h. sinngemäß

$$(2.12) \quad L_1 = \frac{1}{9}(3CG - E^2), \quad L_2 = \frac{1}{9}(9CA - EG), \quad L_3 = \frac{1}{9}(3EA - G^2)$$

und

$$(2.13) \quad L = 4L_1L_3 - L_2^2,$$

so kann man die *verallgemeinerten Zykliken 4. Ordnung der Haupttypen I–X* in der folgenden Tabelle 2.1 kennzeichnen:

Hauptklasse I	$\Delta > 0$	$L > 0$
Hauptklasse II	$\Delta > 0$	$L = 0, L_1 \neq 0, L_2 \neq 0$
Hauptklasse III	$\Delta > 0$	$L_1 = L_2 = 0$
Hauptklasse IV	$\Delta < 0$	$L > 0$
Hauptklasse V	$\Delta < 0$	$L = 0, L_1 \neq 0, L_2 \neq 0$
Hauptklasse VI	$\Delta < 0$	$L_1 = L_2 = 0$
Hauptklasse VII	$\Delta < 0$	$L < 0$
Hauptklasse VIII	$\Delta = 0, \Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0$	$L = 0, L_1 \neq 0, L_2 \neq 0$
Hauptklasse IX	$\Delta_1 = \Delta_2 = 0$	$L_1 = L_2 = 0$
Hauptklasse X	$\Delta = 0, \Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0$	$L_1 = L_2 = 0$

Tabelle 2.1.

Bei dieser Einteilung in Hauptklassen sehen wir von der Behandlung jener Fälle ab, die durch eine Vertauschung $f_1 \longleftrightarrow f_2$ entstehen. In diesen symmetrischen Fällen, die über die uneigentliche unimodulare Affinität $\{\bar{x} = y, \bar{y} = x, \bar{z} = z\}$ gekoppelt sind, wird jede gewonnene Normalform durch eine Vertauschung von x und y in eine weitere Normalform transformiert. Diese beiden Normalformen lassen sich zwar nicht durch eine G_5 -Transformation aufeinander abbilden, doch liefert die neue zugeordnete Normalform keine weiteren Erkenntnisse. Wir bezeichnen das Einteilungsprinzip gemäß Tabelle 2.1 als *erstes Charakteristikum*.

Als ein *weiteres Klassifikationselement* führen wir noch die sogenannten Begleitzykliden 3. Ordnung und die Hauptachsenfläche ein. Dazu betrachten wir die von den vollisotropen Ebenen 1. Art $x_1 = \gamma x_0$ aus der Zyklide (2.1) herausgeschnittenen Kubiken 1. Art (2.5), die sich nach Kürzen mit x_0 darstellen lassen als

$$\begin{aligned}
 (2.14) \quad F \equiv & \gamma^2 x_0 x_2^2 + A\gamma^3 x_0^3 + Bx_2^3 + Cx_3^3 + D\gamma^2 x_2 x_0^2 + E\gamma x_0 x_3^2 + \\
 & + Rx_2^2 x_3 + G\gamma^2 x_3 x_0^2 + H\gamma x_2^2 x_0 + Jx_2 x_3^2 + K\gamma x_2 x_3 x_0 + \\
 & + d\gamma^2 x_0^3 + ex_2^2 x_0 + fx_3^2 x_0 + g\gamma x_2 x_0^2 + hx_2 x_3 x_0 + j\gamma x_3 x_0^2 + \\
 & + a\gamma x_0^3 + bx_2 x_0^2 + cx_3 x_0^2 + Tx_0^3 = 0.
 \end{aligned}$$

Wir betrachten im Folgenden einen auf der Geraden $f_1(x_0 = x_1 = 0)$ laufenden Punkt $P(0 : 0 : p_2 : p_3)$ und bilden dazu jeweils den *Polarkegelschnitt* bezüglich der Kubik (2.14) gemäß [10, 78]. Dieser ist bekanntlich definiert über

$$(2.15) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} x_0^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} x_2^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} x_3^2 + \\ + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial x_2} x_0 x_2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial x_3} x_0 x_3 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} x_2 x_3 = 0,$$

wobei die partiellen Ableitungen im Punkt $P(0 : 0 : p_2 : p_3)$ zu nehmen sind. Wird $\gamma = x$ gesetzt, so bilden alle Polarkegelschnitte (2.14) eine Fläche, die sich nach Rückkehr zu affinen Koordinaten in der Gestalt

$$(2.16) \quad (2x^2y + Dx^2 + 3By^2 + Jz^2 + 2Hxy + Kxz + 2Ryz + gx + 2ey + hz + b)p_2 + \\ + (Gx^2 + Ry^2 + 3Cz^2 + Kxy + 2Exz + 2Jyz + jx + hy + 2fz + c)p_3 = 0$$

schreiben lässt. Die Gleichung (2.16) lässt sich in der bemerkenswerten Form

$$(2.17) \quad G_1 := \frac{\partial F}{\partial y} p_2 + \frac{\partial F}{\partial z} p_3 = 0$$

darstellen. Die Gleichung (2.16) stellt für jeden Punkt $P \in f_1$ eine *Zyklide 3. Ordnung* dar. Flächen dieser Art habe ich bezüglich der Transformationsgruppen $B_6^{(1)p}$ bzw. G_5 ausführlich in [22] und [23] untersucht, wobei ich eine systematische Klassifikationstheorie entwickelt habe.

Wir nennen diese Zyklide G_1 *Begleitzyklide 1. Art* der verallgemeinerten Zyklide 4. Ordnung (2.1). Von geometrischer Bedeutung bezüglich der Gruppe G_5 sind natürlich nur jene Begleitzykliden, die zu geometrisch ausgezeichneten Punkten auf f_1 gehören, z.B. zu den Punkten $T_i \in f_1$ durch die alle Kubiken 1. Art hindurchgehen. Besonders wichtig ist die zum absoluten Punkt $F(0 : 0 : 0 : 1)$ gehörige Begleitfläche; sie ist wegen $p_2 = 0$, $p_3 = 1$ die *Fläche 2. Ordnung*

$$(2.18) \quad \Sigma^* := \frac{\partial F}{\partial z} = Gx^2 + Ry^2 + 3Cz^2 + Kxy + 2Exz + 2Jyz + jx + hy + 2fz + c = 0,$$

die wir als *Hauptachsenfläche* Σ^* bezeichnen. Führt man eine völlig analoge Überlegung für einen Punkt $Q(0 : s_1 : 0 : s_3) \in f_2$ durch, so findet man die *Begleitzyklide 3. Ordnung* G_2 von *2. Art*, die sich in der Gestalt

$$(2.19) \quad G_2 := \frac{\partial F}{\partial x} s_1 + \frac{\partial F}{\partial z} s_3 = 0$$

darstellen lassen. Ausführlich lautet ihre Gleichung

$$\begin{aligned}
 (2.20) \quad G_2 \equiv & 2xy^2s_1 + 3Ax^2s_1 + 2Dxys_1 + Ez^2s_1 + 2Gxz s_1 + \\
 & + Hy^2s_1 + Kyzs_1 + 2dxs_1 + gys_1 + jzs_1 + as_1 + \\
 & + 3Cz^2s_3 + 2Exzs_3 + Ry^2s_3 + Gx^2s_3 + 2Jyzs_3 + \\
 & + Kxys_3 + 2fzs_3 + hys_3 + jxs_3 + cs_3 = 0.
 \end{aligned}$$

Für $s_1 = 0$, $s_3 = 1$, d.h. zum Punkt F stellt sich wieder die *Hauptachsenfläche* Σ^* ein, die somit sämtliche Polarkegelschnitte der Kubiken 1. und 2. Art bezüglich F trägt. Die zu den Fernpunkten $F_1(0 : 0 : 1 : 0)$ bzw. $F_2(0 : 1 : 0 : 0)$ von f_1 bzw. f_2 gehörigen Begleitzykliden lassen sich über

$$(2.21a,b) \quad G_1(F_1) \equiv \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad G_2(F_2) \equiv \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

darstellen, womit die ersten partiellen Ableitungen von F *gedeutet* sind. Wir bezeichnen die Hauptachsenfläche Σ^* als *zweites Charakteristikum* und fassen zusammen im

SATZ 2.2. *Die Polarkegelschnitte aller vollisotropen Kubiken 1. Art, bezüglich eines Punktes $P(0 : 0 : p_2 : p_3) \in f_1$ einer Zyklide 4. Ordnung (2.1) liegen auf einer Begleitzyklide 3. Ordnung G_1 , die sich durch (2.17) beschreiben lässt. Die Polarkegelschnitte aller vollisotropen Kubiken 2. Art einer Zyklide 4. Ordnung (2.1) bezüglich eines Punktes $Q(0 : s_1 : 0 : s_3) \in f_2$ liegen auf einer Begleitzyklide 3. Ordnung G_2 , die sich durch (2.19) beschreiben lässt. Zu den Fernpunkten $F_1 \in f_1$ und $F_2 \in f_2$ gehören Begleitzykliden 3. Ordnung, die sich durch die partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ bzw. $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ beschreiben lassen. Zum absoluten Punkt F gehört als Begleitfläche die Hauptachsenfläche Σ^* (2.18) die Fläche 2. Ordnung. Ist Σ^* kein Zylinder 2. Ordnung mit vollisotropen Erzeugenden, dann liegt die Zyklide (2.1) symmetrisch zu Σ^* bezüglich der vollisotropen Spiegelstrahlen.*

Zu jedem Punkt $T_1 \in f_1$ und der Nullstelle n_1 gehört eine Begleitzyklide G_1 mit der Darstellung

$$(2.22) \quad G_1 \equiv \frac{\partial F}{\partial y} + n_1 \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

und analog findet man zu $S_1 \in f_2$ mit einer Nullstelle m_1 die Begleitzyklide G_2

$$(2.23) \quad G_2 \equiv \frac{\partial F}{\partial x} + m_1 \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Genauso gilt (vgl. [25]) der folgende

SATZ 2.3. *Ist $F(x, y, z)$ eine verallgemeinerte Zyklide 4. Ordnung vom Typ I–X, dann lässt sich zu jedem Punkt $T_j \in f_1$ ($S_j \in f_2$) über die zugeordnete Nullstelle $n_j(m_j)(m_j)$ aus (2.7) bzw. (2.8) eine Begleitzyklide 3. Ordnung (2.22) bzw. (2.23) definieren. Eine verallgemeinerte Zyklide 4. Ordnung kann höchstens 18 singuläre Punkte besitzen, falls es keine Kurve aus singulären Punkten gibt. Singuläre Punkte von F sind dabei jene Flächenpunkte, die gleichzeitig auf den Begleitzykliden G_1, G_2 und der Hauptachsenfläche Σ^* liegen.*

Wir bezeichnen die Begleitzykliden 3. Ordnung G_1 bzw. G_2 , die zu den Nullstellen n bzw. m gehören als *drittes Charakteristikum*. Als *viertes Charakteristikum* benützen wir in der Normalformtheorie das *Transformationsverhalten der Koeffizienten* in (1.6) bei den Transformationen (1.4) der Grenzgruppe G_5 . Man findet

$$(2.24) \quad \begin{aligned} \bar{A} &= A + Cb_4^3 + Eb_4^2 + Cb_4 \\ \bar{B} &= B + Cb_5^3 + Jb_5^2 + Rb_5 \\ \bar{C} &= C \\ \bar{D} &= D + 2b_2 + 3Cb_4^2b_5 + 2Eb_4b_5 + Jb_4^2 + Kb_4 + Gb_5 \\ \bar{H} &= H + 2b_1 + 3Cb_5^2b_4 + 2Jb_4b_5 + Eb_5^2 + Kb_5 + Rb_4 \\ \bar{E} &= E + 3Cb_4 \\ \bar{R} &= R + 3Cb_5^2 + 2Jb_5 \\ \bar{G} &= G + 3Cb_4^2 + 2Eb_4 \\ \bar{J} &= J + 3Cb_5 \\ \bar{K} &= K + 6Cb_4b_5 + 2Jb_4 + 2Eb_5 \\ \bar{d} &= d + b_2^2 + 3Ab_1 + Db_2 + Gb_3 + fb_4^2 + jb_4 \\ \bar{e} &= e + b_1^2 + 3Bb_2 + Rb_3 + Hb_1 + fb_5^2 + hb_5 \\ \bar{f} &= f + 3Cb_3 + Jb_2 + Eb_1 \\ \bar{g} &= g + 4b_2b_1 + 2Db_1 + 2Hb_2 + Kb_3 + 2fb_4b_5 + hb_4 + jb_5 \\ \bar{h} &= h + 2b_2R + 2Jb_3 + 2b_1K + 2fb_5 \\ \bar{j} &= j + 2Eb_3 + 2b_2K + 2fb_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{a} &= a + 2b_1b_2^2 + 3Ab_1^2 + 2Db_1b_2 + Eb_3^2 + 2Gb_1b_2 + Hb_2^2 + \\
 &\quad + 2b_2Kb_3 + 2b_1d + 2b_2g + b_3j + cb_4 \\
 \bar{b} &= b + 2b_2b_1^2 + 3Bb_2^2 + Db_1^2 + 2Rb_3b_2 + 2Hb_1b_2 + Jb_3^2 + \\
 &\quad + 2Kb_1b_3 + 2b_2e + 2b_1g + b_3h + cb_5 \\
 \bar{c} &= 3b_3^2C + Rb_2^2 + Gb_1^2 + 2b_1b_2J + Kb_1b_2 + 2fb_3 + hb_2 + \\
 &\quad + jb_1 + c + 2Eb_1b_3 + 2Gb_1 \\
 \bar{T} &= b_1^2b_2^2 + Ab_1^3 + Bb_2^3 + Cb_3^3 + Db_1^2b_2 + Eb_1b_3^2 + Rb_2^2b_3 + \\
 &\quad + Gb_1^2b_3 + Hb_1b_2^2 + Jb_2b_3^2 + Kb_1b_2b_3 + db_1^2 + eb_2^2 + \\
 &\quad + fb_3^2 + gb_1b_2 + hb_2b_3 + jb_1b_3 + ab_1 + bb_2 + cb_3 + T.
 \end{aligned}$$

Die Gleichungen (2.24) zeigen, dass von den Koeffizienten in (2.1) nur C eine G_5 -Invariante ist, falls $C \neq 0$ gilt. Aus den Gleichungen (2.24) lassen sich allerdings weitere G_5 -Invarianten gewinnen, z.B.

$$\omega_1 := 3\bar{K}\bar{C} - 2\bar{E}\bar{J} = 3KC - 2EJ. \quad (2.25)$$

Die so gewonnenen Invarianten sind allerdings sehr kompliziert – und ihre Verwendung zum Aufbau einer Klassifikationstheorie der Zykliden 4. Ordnung auch nicht sinnvoll.

3. Der Vorbereitungssatz

Der *zentrale Gedanke* für den *Aufbau der Transformationstheorie* der verallgemeinerten Zykliden (1.6) ist der, dass man durch eine G_5 -Abbildung die Hauptachsenfläche Σ^* auf Normalform transformiert. Bei einer Transformation dieser Art wird die Bauart von (1.6) nicht geändert, nur die Koeffizienten ändern ihre Werte. Die Fläche Σ^* , die in eine Normalform Q_n nach [24] übergeht, ist nun auf ein ausgezeichnetes Koordinatensystem bezogen, das als *Q-Koordinatensystem* bezeichnet wird. In diesem Q -Koordinatensystem werden alle Koeffizienten in (1.6) als Formparameter geometrisch gedeutet. Diese Formparameter sind natürlich keine G_5 -Invarianten im Sinne von (2.24), andererseits legen sie natürlich die Gestalt der Zyklide und damit ihren Typus fest. Der Nachweis dieser Formparameterreigenschaft wird in [25] durchgeführt. Die Methode kann hier nur andeutungsweise skizziert werden, wobei wir $C \neq 0$ voraussetzen.

Sei n eine Nullstelle von (2.7), die zum Fernpunkt $T(0:0:1:n)$ gehört. Beachtet man, dass in der vollisotropen Ebene $x = 0$ eine ebene

isotrope Geometrie vorliegt, und bezeichnet φ den *isotropen Winkel*, den die Richtung UT im Q -Koordinatensystem mit der y -Achse des Koordinatensystems bildet, dann ist φ ein *Formparameter* und es gilt $\varphi = n$. Andererseits gilt nach den Vietàschen Wurzelsätzen für die Nullstellen n_1, n_2, n_3 von (2.7)

$$(3.1) \quad \frac{J}{C} = -(n_1 + n_2 + n_3), \quad \frac{R}{C} = n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3, \quad \frac{B}{C} = -n_1 n_2 n_3.$$

Da C eine G_5 -Invariante und damit ein Formparameter ist, und gemäß (3.1) die Ausdrücke $\frac{J}{C}$, $\frac{R}{C}$ und $\frac{B}{C}$ Formparameter sind, so sind damit J , R und B als Formparameter nachgewiesen. Analog folgert man aus der Gleichung (2.8), dass auch E , G und A Formparameter sind. Wir gehen im Folgenden einen Vorbereitungssatz an, der in Form einer Tabelle die Normalformen der Flächen 2. Ordnung bezüglich G_5 enthält. Die erste Spalte der Tabelle gibt die laufende Nummer an, die zweite Spalte den Typus gemäß [24], die dritte Spalte die *affine Normalform* und die letzte Spalte die Invarianten von Σ^* bzw. eventuelle Zusatzbedingungen; hierbei werden auch verschwindende Koeffizienten aufgelistet, soweit sie zum Verständnis später auftretender Normalformen von Belang sind. Es gilt der

SATZ 3.11. *Im pseudoisotropen Raum $I_3^{(1)p}$ existieren bezüglich der Grenzgruppe G_5 genau 60 Typen von Flächen 2. Ordnung Φ , deren Fernkurve den absoluten Punkt F nicht enthält. In den nachstehend genannten Normalformen dieser Flächen ist das zugrunde gelegte Koordinatensystem $\{U; x, y, z\}$ stets G_5 -invariant mit Φ verknüpft.*

Nr	Typ	Normalform	Affiner Typ	Bedingungen
1	Φ_1	$c_{11}x^2 + z^2 + 2c_{12}xy = 0$	Kegel	$c_{11} > 0$, $c_{12} \neq 0$, $c_{22} = 0$
2	Φ_2	$c_{11}x^2 + z^2 + 2c_{12}xy + \bar{D} = 0$	einschaliges Hyperboloid	$c_{11} > 0$, $c_{12} \neq 0$, $c_{22} = 0$, $\bar{D} < 0$
3	Φ_3	$c_{11}x^2 + z^2 + 2c_{12}xy + \bar{D} = 0$	zweischaliges Hyperboloid	$c_{11} > 0$, $c_{12} \neq 0$, $c_{22} = 0$, $\bar{D} > 0$
4	Φ_4	$c_{22}y^2 + z^2 + 2c_{12}xy = 0$	Kegel	$c_{22} > 0$, $c_{12} \neq 0$, $c_{11} = 0$
5	Φ_5	$c_{22}y^2 + z^2 + 2c_{12}xy + \bar{D} = 0$	einschaliges Hyperboloid	$c_{22} > 0$, $c_{12} \neq 0$, $c_{11} = 0$, $\bar{D} < 0$
6	Φ_6	$c_{22}y^2 + z^2 + 2c_{12}xy + \bar{D} = 0$	zweischaliges Hyperboloid	$c_{22} > 0$, $c_{12} \neq 0$, $c_{11} = 0$, $\bar{D} > 0$

7	Φ_7	$z^2 + 2c_{12}xy = 0$	Kegel	$c_{12} \neq 0, c_{22} = 0,$ $c_{11} = 0$
8	Φ_8	$z^2 + 2c_{12}xy + \overline{D} = 0$	einschaliges Hyperboloid	$c_{12} \neq 0, c_{22} = 0,$ $c_{11} = 0, \overline{D} < 0$
9	Φ_9	$z^2 + 2c_{12}xy + \overline{D} = 0$	zweischaliges Hyperboloid	$c_{12} \neq 0, c_{22} = 0,$ $c_{11} = 0, \overline{D} > 0$
10	Φ_{10}	$c_{11}x^2 + z^2 + 2c_{12}xy = 0$	Kegel	$c_{11} < 0, c_{22} = 0,$ $c_{12} \neq 0$
11	Φ_{11}	$c_{11}x^2 + z^2 + 2c_{12}xy + \overline{D} = 0$	einschaliges Hyperboloid	$c_{11} < 0, c_{12} \neq 0,$ $c_{22} = 0, \overline{D} < 0$
12	Φ_{12}	$c_{11}x^2 + z^2 + 2c_{12}xy + \overline{D} = 0$	zweischaliges Hyperboloid	$c_{11} < 0, c_{12} \neq 0,$ $c_{22} = 0, \overline{D} > 0$
13	Φ_{13}	$c_{22}y^2 + z^2 + 2c_{12}xy = 0$	Kegel	$c_{22} < 0, c_{12} \neq 0$
14	Φ_{14}	$c_{22}y^2 + z^2 + 2c_{12}xy = 0$	zweischaliges Hyperboloid	$c_{11} = 0, c_{12} \neq 0,$ $c_{22} < 0, \overline{D} > 0$
15	Φ_{15}	$c_{22}y^2 + z^2 + 2c_{12}xy + \overline{D} = 0$	einschaliges Hyperboloid	$c_{11} = 0, c_{12} \neq 0,$ $c_{22} < 0, \overline{D} < 0$
16	Φ_{16}	$c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + z^2 = 0$	nullteiliger Kegel	$c_{11} > 0, c_{22} > 0$
17	Φ_{17}	$c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + z^2 + \overline{D} = 0$	nullteiliges Ellipsoid	$c_{11} > 0, c_{22} > 0,$ $\overline{D} > 0$
18	Φ_{18}	$c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + z^2 + \overline{D} = 0$	einteiliges Ellipsoid	$c_{11} > 0, c_{22} > 0,$ $\overline{D} < 0$
19	Φ_{19}	$c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + z^2 + 2c_{12}xy = 0$	Kegel	$c_{11} > 0, c_{22} < 0,$ $c_{12} \neq 0$
20	Φ_{20}	$c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + z^2 + 2c_{12}xy + \overline{D} = 0$	einschaliges Hyperboloid	$c_{11} > 0, c_{12} \neq 0,$ $c_{22} < 0, \overline{D} < 0$
21	Φ_{21}	$c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + z^2 + 2c_{12}xy + \overline{D} = 0$	zweischaliges Hyperboloid	$c_{11} > 0, c_{12} \neq 0,$ $c_{22} < 0, \overline{D} > 0$
22	Φ_{22}	$c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + z^2 + 2c_{12}xy = 0$	Kegel	$c_{11} < 0, c_{22} > 0,$ $c_{12} \neq 0$
23	Φ_{23}	$c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + z^2 + 2c_{12}xy + \overline{D} = 0$	einschaliges Hyperboloid	$c_{11} < 0, c_{12} \neq 0,$ $c_{22} > 0, \overline{D} < 0$
24	Φ_{24}	$c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + z^2 + 2c_{12}xy + \overline{D} = 0$	zweischaliges Hyperboloid	$c_{11} < 0, c_{12} \neq 0,$ $c_{22} > 0, \overline{D} > 0$
25	Φ_{25}	$c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + z^2 + 2c_{12}xy = 0$	Kegel	$c_{11} < 0, c_{12} \neq 0,$ $c_{22} < 0,$ $c_{12}^2 - c_{11}c_{22} > 0$

26	Φ_{26}	$c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + z^2 + 2c_{12}xy + \overline{D} = 0$	einschaliges Hyperboloid	$c_{11} < 0, c_{12} \neq 0,$ $c_{22} < 0, \overline{D} > 0,$ $c_{12}^2 - c_{11}c_{22} > 0$
27	Φ_{27}	$c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + z^2 + 2c_{12}xy + \overline{D} = 0$	zweischaliges Hyperboloid	$c_{11} < 0, c_{12} \neq 0,$ $c_{22} < 0, \overline{D} < 0,$ $c_{12}^2 - c_{11}c_{22} > 0$
28	Φ_{28}	$c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + z^2 + 2c_{12}xy = 0$	Kegel	$c_{11} < 0, c_{22} < 0,$ $c_{12}^2 - c_{11}c_{22} < 0$
29	Φ_{29}	$c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + z^2 + 2c_{12}xy + \overline{D} = 0$	zweischaliges Hyperboloid	$c_{11} < 0, c_{22} < 0,$ $\overline{D} > 0,$ $c_{12}^2 - c_{11}c_{22} < 0$
30	Φ_{30}	$c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + z^2 + 2c_{12}xy + \overline{D} = 0$	einschaliges Hyperboloid	$c_{11} < 0, c_{22} < 0,$ $\overline{D} < 0,$ $c_{12}^2 - c_{11}c_{22} < 0$
31	Φ_{31}	$c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + z^2 + 2c_{12}xy = 0$	Kegel	$c_{11} > 0, c_{22} > 0,$ $c_{12}^2 - c_{11}c_{22} > 0$
32	Φ_{32}	$c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + z^2 + 2c_{12}xy + \overline{D} = 0$	einschaliges Hyperboloid	$c_{11} > 0, c_{22} > 0,$ $\overline{D} < 0,$ $c_{12}^2 - c_{11}c_{22} > 0$
33	Φ_{33}	$c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + z^2 + 2c_{12}xy + \overline{D} = 0$	zweischaliges Hyperboloid	$c_{11} > 0, c_{22} > 0,$ $\overline{D} > 0,$ $c_{12}^2 - c_{11}c_{22} > 0$
34	Φ_{43}	$z^2 - \overline{a}^2x^2 + \overline{A}y = 0$	hyper- bolisches Paraboloid	$\overline{A} \neq 0, \overline{a} \neq 0$
35	Φ_{44}	$z^2 - \overline{a}^2x^2 + \overline{D} = 0$	hyper- bolischer Zylinder	$c_{11} = -\overline{a}^2 < 0,$ $c_{12} = 0, c_{22} = 0,$ $\overline{D} \neq 0$
36	Φ_{45}	$z^2 - \overline{a}^2x^2 = 0$	reelles schneidendes Ebenenpaar	$c_{11} = -\overline{a}^2 < 0,$ $c_{12} = 0, c_{22} = 0$
37	Φ_{46}	$z^2 - \overline{a}^2y^2 + \overline{A}x = 0$	hyper- bolisches Paraboloid	$\overline{a} \neq 0, \overline{A} \neq 0,$ $c_{22} = -\overline{a}^2 < 0,$ $c_{12} = 0, c_{11} = 0$
38	Φ_{47}	$z^2 - \overline{a}^2y^2 + \overline{D} = 0$	hyper- bolischer Zylinder	$c_{22} = -\overline{a}^2 < 0,$ $c_{12} = 0, c_{11} = 0,$ $\overline{D} \neq 0$
39	Φ_{48}	$z^2 - \overline{a}^2y^2 = 0$	reelles schneidendes Ebenenpaar	$c_{22} = -\overline{a}^2 < 0,$ $c_{12} = 0, c_{11} = 0$

40	Φ_{49}	$\bar{b}z^2 - \bar{a}xz - yz + \bar{A}x = 0$	hyperbolisches Paraboloid	$\bar{A} \neq 0, \bar{a} \neq 0, \bar{b} \neq 0$
41	Φ_{50}	$\bar{b}z^2 + \bar{a}xz - yz + \bar{D} = 0$	hyperbolischer Zylinder	$\bar{D} \neq 0, \bar{b} \neq 0, \bar{a} \neq 0$
			schneidendes Ebenenpaar	
43	Φ_{73}	$z^2 + \bar{b}^2 x^2 + \bar{B}y = 0$	elliptisches Paraboloid	$\bar{B} \neq 0, \bar{b} \neq 0,$
44	Φ_{74}	$z^2 + \bar{b}^2 x^2 + \bar{D} = 0$	nullteiliger elliptischer Zylinder	$\bar{D} > 0, c_{11} = \bar{b}^2 > 0, c_{12} = 0, c_{22} = 0$
45	Φ_{75}	$z^2 + \bar{b}^2 x^2 + \bar{D} = 0$	elliptischer Zylinder	$\bar{D} < 0, \bar{b} \neq 0$
46	Φ_{76}	$z^2 + \bar{b}^2 x^2 = 0$	konjugiert-komplexes Ebenenpaar	$c_{11} = \bar{b}^2 > 0, c_{12} = 0, c_{22} = 0$
47	Φ_{77}	$z^2 + \bar{b}^2 y^2 + \bar{A}x = 0$	elliptisches Paraboloid	$c_{22} = \bar{b}^2 > 0, \bar{A} \neq 0$
48	Φ_{78}	$z^2 + \bar{b}^2 y^2 + \bar{D} = 0$	nullteiliger elliptischer Zylinder	$c_{22} = \bar{b}^2 > 0, \bar{D} > 0$
49	Φ_{79}	$z^2 + \bar{b}^2 y^2 + \bar{D} = 0$	elliptischer Zylinder	$c_{22} = \bar{b}^2 > 0, \bar{D} < 0$
50	Φ_{80}	$z^2 + \bar{b}^2 y^2 = 0$	konjugiert-komplexes Ebenenpaar	$c_{22} = \bar{b}^2 > 0, c_{11} = 0$
51	Φ_{85}	$z^2 + \bar{c}^2 y^2 - 2\bar{a}\bar{c}^2 xy + \bar{a}^2 \bar{c}^2 x^2 + \bar{A}x = 0$	elliptisches Paraboloid	$\bar{A} \neq 0, \bar{c} \neq 0, \bar{a} \neq 0$
52	Φ_{86}	$z^2 + \bar{c}^2 y^2 - 2\bar{a}\bar{c}^2 xy + \bar{a}^2 \bar{c}^2 x^2 + \bar{D} = 0$	nullteiliger Zylinder	$\bar{c} \neq 0, \bar{a} \neq 0, \bar{D} > 0$
53	Φ_{87}	$z^2 + \bar{c}^2 y^2 - 2\bar{a}\bar{c}^2 xy + \bar{a}^2 \bar{c}^2 x^2 + \bar{D} = 0$	elliptischer Zylinder	$\bar{c} \neq 0, \bar{a} \neq 0, \bar{D} < 0$
54	Φ_{88}	$z^2 + \bar{c}^2 y^2 - 2\bar{a}\bar{c}^2 xy + \bar{a}^2 \bar{c}^2 x^2 = 0$	konjugiert-komplexes Ebenenpaar	$\bar{c} \neq 0, \bar{a} \neq 0$
55	Φ_{89}	$z^2 + \bar{A}x = 0$	parabolischer Zylinder	$\bar{A} \neq 0, c_{11} = c_{22} = 0$

56	Φ_{90}	$z^2 + \overline{D} = 0$	konjugiert-komplexes Ebenenpaar	$\overline{D} > 0,$ $c_{11} = c_{22} = 0$
57	Φ_{91}	$z^2 + \overline{D} = 0$	reelles paralleles Ebenenpaar	$\overline{D} < 0,$ $c_{11} = c_{22} = 0$
58	Φ_{92}	$z^2 = 0$	Doppelebene	
59	Φ_{93}	$z^2 + \overline{B}y = 0$	parabolischer Zylinder	$\overline{B} \neq 0,$
60	Φ_{94}	$z^2 + \overline{A}x + \overline{B}y = 0$	parabolischer Zylinder	$\overline{A} \neq 0, \overline{B} \neq 0$

Tabelle 3.1.

Der Nachweis der G_5 -Invarianz des jeweiligen Q -Koordinatensystems für die einzelnen Flächentypen kann in [25] nachgelesen werden.

4. Normalformentheorie der Hauptklasse I

Für eine verallgemeinerte Zyklide (1.6) ergibt sich als Gleichung der Hauptachsenfläche Σ^*

$$(4.1) \quad Q \equiv Gx^2 + Ry^2 + 3Cz^2 + Kxy + 2Exz + 2Jyz + jx + hy + 2fz + c = 0.$$

Wegen $C \neq 0$ erkennt man an Hand der Tabelle 3.1, dass für Σ^* zunächst alle Flächentypen 2. Ordnung in Frage kommen, die dort aufgelistet sind. Auf Grund der Bauart dieser auf Normalform transformierten Flächen lassen sich jedoch alle Typen mit Ausnahme von Φ_{49} , Φ_{50} und Φ_{51} gemeinsam behandeln, wenn man vom Ansatz

$$(4.2) \quad Q_n \equiv c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2 + z^2 + \overline{A}x + \overline{B}y + \overline{D} = 0$$

ausgeht. Ein Vergleich mit (4.1) zeigt, dass dann gilt

$$(4.3) \quad \begin{aligned} C &= \frac{1}{3}, & G &= c_{11}, & R &= c_{22}, & K &= 2c_{12}, & E &= 0, & J &= 0, \\ f &= 0, & j &= \overline{A}, & h &= \overline{B}, & c &= \overline{D}. \end{aligned}$$

Für die Diskriminanten Δ und L bzw. die Größen L_1 , L_2 bzw. Δ_1 und Δ_2 berechnet man nun nach (2.9), (2.10) bzw. (2.12) und (2.13) der Reihe nach

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &= \frac{1}{9}c_{22}, & \Delta_2 &= \frac{1}{3}B, & \Delta_3 &= -\frac{1}{9}c_{22}^2 \\
 \Delta &= -\frac{4}{81}c_{22}^3 - \frac{1}{9}B^2 \\
 L_1 &= \frac{1}{9}c_{11}, & L_2 &= \frac{1}{3}A, & L_3 &= -\frac{1}{9}c_{11}^2 \\
 L &= -\frac{4}{81}c_{11}^3 - \frac{1}{9}A^2.
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

Für die Sondertypen Φ_{49} , Φ_{50} und Φ_{51} gilt

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{1}{3}\bar{b} \neq 0, & E &= \frac{1}{2}\bar{a} \neq 0, & J &= -\frac{1}{2}, & R &= G = K = 0, \\
 j &= \bar{A}, & c &= \bar{D} \neq 0, & h &= f = 0
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

und daraus findet man

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &= -\frac{1}{36}, & \Delta_2 &= \frac{1}{3}\bar{b}B, & \Delta_3 &= -\frac{1}{6}B, & \Delta &= \frac{1}{54}B - \frac{1}{9}\bar{b}^2B^2 \\
 L_1 &= -\frac{1}{36}\bar{a}^2, & L_2 &= \frac{1}{3}\bar{b}A, & L_3 &= \frac{1}{6}\bar{a}A, & L &= -\frac{1}{54}\bar{a}^3A - \frac{1}{9}\bar{b}^2A^2.
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

Damit kann man nunmehr an Hand der Flächentypen Φ_j und ihren Nebenbedingungen die *Normalformentheorie der Hauptklasse I* aufstellen.

Für die Hauptklasse I gilt nach Tabelle 2.1 $\Delta > 0$, $L > 0$, so dass die Sondertypen Φ_{85} – Φ_{88} wegen $\bar{c} \neq 0$, $\bar{a} \neq 0$ von vornherein ausscheiden. Für den *allgemeinen Flächentyp* Φ_j berechnet man die Ungleichungen

$$c_{22}^3 < -\frac{9}{4}B^2, \quad c_{11}^3 < -\frac{9}{4}A^2.
 \tag{4.7a,b}$$

Hieraus folgt zunächst, dass stets $c_{11} < 0$ und $c_{22} < 0$ gelten muss, und dass die Werte $B = 0$ oder $A = 0$ oder beides möglich sind. Wegen (4.2) müssen daher in den Normalformen von Σ^* die Glieder mit x^2 und y^2 vorkommen, und zwar beide mit einem negativen Koeffizienten versehen. Damit sind gemäß der Tabelle 3.1 nur folgende Untertypen möglich: Φ_{25} , Φ_{26} , Φ_{27} , Φ_{28} , Φ_{29} , Φ_{30} .

Für die Sonderformen Φ_{49} – Φ_{51} errechnet man nach (4.5) die Ungleichungen

$$6\bar{b}^2B^2 < B \quad \text{und} \quad 6\bar{b}^2A^2 < -\bar{a}^3A.
 \tag{4.8a,b}$$

Hieraus erkennt man, dass stets $A \neq 0$, $B \neq 0$ gelten muss. Weiters

zeigt (4.8a), dass sogar $B > 0$ folgt, woraus man die Ungleichung

$$(4.9) \quad 0 < B < \frac{1}{6\bar{b}^2}$$

ableitet. Die Ungleichung (4.8b) lässt sich auf die beiden Ungleichungen

$$(4.9a,b) \quad 0 < A < -\frac{\bar{a}^3}{6\bar{b}^2} \quad \text{bzw.} \quad 0 > A > -\frac{\bar{a}^3}{6\bar{b}^2}$$

reduzieren, die stets erfüllbar sind. Damit können nun *alle Normalformen* für *Zykliden der Hauptklasse I* zusammengestellt werden, wobei wir die Untertypen gemäß der Hauptachsenfläche $\Sigma^* = \Phi_j$ auflisten und für die eventuell verschwindenden Koeffizienten die Kroneckersymbole $\alpha_i^j, \beta_i^j \dots$ verwenden.

Untertyp Φ_{25} :

(4.10, Φ_{25})

$$\begin{aligned} F \equiv & x^2y^2 + \varrho_i^j Ax^3 + \sigma_i^j By^3 + \frac{1}{3}z^3 + \alpha_i^j Dx^2y + c_{22}y^2z + c_{11}x^2z + \\ & + \beta_i^j Hxy^2 + 2c_{12}xyz + \gamma_i^j dx^2 + \delta_i^j ey^2 + \varepsilon_i^j gxy + \eta_i^j ax + \\ & + \lambda_i^j by + \mu_i^j T = 0 \quad \text{mit } c_{11} < 0, \quad c_{22} < 0 \quad \text{und } c_{12}^2 - c_{11}c_{22} > 0. \end{aligned}$$

Da die Kronecker-Symbole unabhängig voneinander die Werte 0 oder 1 annehmen können, enthalten diese Untertypen genau $2^{10} = 1024$ Exemplare. Die einfachste Flächengleichung lautet

$$\begin{aligned} F \equiv & x^2y^2 + \frac{1}{3}z^3 + c_{22}y^2z + \\ & + c_{11}x^2z + 2c_{12}xyz = 0 \\ (4.10, \Phi_{25A}) \quad & \text{mit } c_{11} < 0, \quad c_{22} < 0 \\ & \text{und } c_{12}^2 - c_{11}c_{22} > 0. \end{aligned}$$

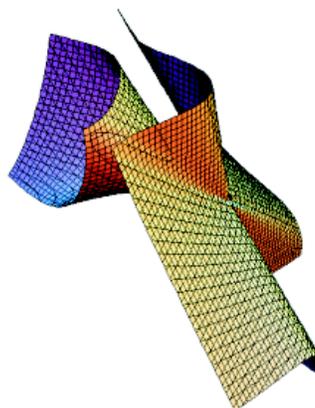


Abbildung 5.1

Wir konstruieren eine verallgemeinerte Zyklide 4. Ordnung der Hauptklasse I mit den Punkten $T_1(0:0:1:1)$, $T_2(0:0:1:2)$, $T_3(0:0:1:3)$, $S_1(0:1:0:1)$, $S_2(0:1:0:2)$ und $S_3(0:1:0:3)$. Ihre einfachste Gleichung lautet dann

(4.10, Φ_{25B})

$$F \equiv x^2y^2 - 2x^3 - 2y^3 + \frac{1}{3}z^3 - 2yz^2 - 2xz^2 + \frac{11}{3}zy^2 + \frac{11}{3}zx^2 = 0$$

und man rechnet leicht nach, dass die Hauptachsenfläche dann ein Kegel Φ_{25} ist.

Untertyp Φ_{26} :

$$(4.10, \Phi_{26}) \quad \begin{aligned} F \equiv & x^2y^2 + \varrho_i^j Ax^3 + \sigma_i^j By^3 + \frac{1}{3}z^3 + \alpha_i^j Dx^2y + \\ & + c_{22}y^2z + c_{11}x^2z + \beta_i^j Hxy^2 + 2c_{12}xyz + \gamma_i^j dx^2 + \\ & + \delta_i^j ey^2 + \varepsilon_i^j gxy + \eta_i^j ax + \lambda_i^j by + \overline{D}z + \mu_i^j T = 0 \\ & \text{mit } c_{11} < 0, c_{22} < 0, c_{12}^2 - c_{11}c_{22} > 0 \text{ und } \overline{D} > 0. \end{aligned}$$

Diese Untertyp enthält wieder 1024 Exemplare.

Untertyp Φ_{27} :

$$(4.10, \Phi_{27}) \quad \begin{aligned} F \equiv & x^2y^2 + \varrho_i^j Ax^3 + \sigma_i^j By^3 + \frac{1}{3}z^3 + \alpha_i^j Dx^2y + \\ & + c_{22}y^2z + c_{11}x^2z + \beta_i^j Hxy^2 + 2c_{12}xyz + \gamma_i^j dx^2 + \\ & + \delta_i^j ey^2 + \varepsilon_i^j gxy + \eta_i^j ax + \lambda_i^j by + \overline{D}z + \mu_i^j T = 0 \\ & \text{mit } c_{11} < 0, c_{22} < 0, c_{12}^2 - c_{11}c_{22} > 0 \text{ und } \overline{D} < 0. \end{aligned}$$

Untertyp Φ_{28} :

$$(4.10, \Phi_{28}) \quad \begin{aligned} F \equiv & x^2y^2 + \varrho_i^j Ax^3 + \sigma_i^j By^3 + \frac{1}{3}z^3 + \alpha_i^j Dx^2y + \\ & + c_{22}y^2z + c_{11}x^2z + \beta_i^j Hxy^2 + 2c_{12}xyz + \gamma_i^j dx^2 + \\ & + \delta_i^j ey^2 + \varepsilon_i^j gxy + \eta_i^j ax + \lambda_i^j by + \mu_i^j T = 0 \\ & \text{mit } c_{11} < 0, c_{22} < 0 \text{ und } c_{12}^2 - c_{11}c_{22} < 0. \end{aligned}$$

Untertyp Φ_{29} :

$$(4.10, \Phi_{29}) \quad \begin{aligned} F \equiv & x^2y^2 + \varrho_i^j Ax^3 + \sigma_i^j By^3 + \frac{1}{3}z^3 + \alpha_i^j Dx^2y + \\ & + c_{22}y^2z + c_{11}x^2z + \beta_i^j Hxy^2 + 2c_{12}xyz + \gamma_i^j dx^2 + \\ & + \delta_i^j ey^2 + \varepsilon_i^j gxy + \eta_i^j ax + \lambda_i^j by + \overline{D}z + \mu_i^j T = 0 \\ & \text{mit } c_{11} < 0, c_{22} < 0, c_{12}^2 - c_{11}c_{22} < 0 \text{ und } \overline{D} > 0. \end{aligned}$$

Untertyp Φ_{30} :

$$\begin{aligned}
 (4.10, \Phi_{30}) \quad F &\equiv x^2y^2 + \varrho_i^j Ax^3 + \sigma_i^j By^3 + \frac{1}{3}z^3 + \alpha_i^j Dx^2y + \\
 &+ c_{22}y^2z + c_{11}x^2z + \beta_i^j Hxy^2 + 2c_{12}xyz + \gamma_i^j dx^2 + \\
 &+ \delta_i^j ey^2 + \varepsilon_i^j gxy + \eta_i^j ax + \lambda_i^j by + \bar{D}z + \mu_i^j T = 0 \\
 &\text{mit } c_{11} < 0, \quad c_{22} < 0, \quad c_{12}^2 - c_{11}c_{22} < 0 \text{ und } \bar{D} < 0.
 \end{aligned}$$

Untertyp Φ_{49} :

$$\begin{aligned}
 (4.10, \Phi_{49}) \quad F &\equiv x^2y^2 + Ax^3 + By^3 + \frac{1}{3}\bar{b}z^3 + \alpha_i^j Dx^2y + \frac{1}{2}\bar{a}xz^2 + \\
 &+ \beta_i^j Hxy^2 - \frac{1}{2}yz^2 + \gamma_i^j dx^2 + \delta_i^j ey^2 + \varepsilon_i^j gxy + \\
 &+ \bar{A}xz + \eta_i^j ax + \lambda_i^j by + \mu_i^j T = 0 \\
 &\text{mit } 0 < B < \frac{1}{6\bar{b}^2}, \quad 0 < A < -\frac{\bar{a}^3}{6\bar{b}^2} \\
 &\text{bzw. } 0 > A > -\frac{\bar{a}^3}{6\bar{b}^2} \text{ und } \bar{a} \neq 0, \quad \bar{b} \neq 0, \quad \bar{A} \neq 0.
 \end{aligned}$$

Diese Untertypen umfassen $2^8 = 256$ Exemplare; die einfachste Flächengleichung lautet

$$\begin{aligned}
 (4.10, \Phi_{49A}) \quad F &\equiv x^2y^2 + Ax^3 + By^3 + \frac{1}{3}\bar{b}z^3 + \frac{1}{2}\bar{a}xz^2 - \frac{1}{2}yz^2 + \bar{A}xz = 0 \\
 &\text{mit } \bar{a} \neq 0, \quad \bar{b} \neq 0, \text{ und obigen Ungleichungen.}
 \end{aligned}$$

Untertyp Φ_{50} :

$$\begin{aligned}
 (4.10, \Phi_{50}) \quad F &\equiv x^2y^2 + Ax^3 + By^3 + \frac{1}{3}\bar{b}z^3 + \alpha_i^j Dx^2y + \frac{1}{2}\bar{a}xz^2 + \\
 &+ \beta_i^j Hxy^2 - \frac{1}{2}yz^2 + \gamma_i^j dx^2 + \delta_i^j ey^2 + \varepsilon_i^j gxy + \\
 &+ \eta_i^j ax + \lambda_i^j by + \bar{D}z + \mu_i^j T = 0 \\
 &\text{mit } 0 < B < \frac{1}{6\bar{b}^2}, \quad 0 < A < -\frac{\bar{a}^3}{6\bar{b}^2} \\
 &\text{bzw. } 0 > A > -\frac{\bar{a}^3}{6\bar{b}^2} \text{ und } \bar{a} \neq 0, \quad \bar{b} \neq 0, \quad \bar{D} \neq 0.
 \end{aligned}$$

Untertyp Φ_{51} :

$$\begin{aligned}
 (4.10, \Phi_{51}) \quad F &\equiv x^2y^2 + Ax^3 + By^3 + \frac{1}{3}\bar{b}z^3 + \alpha_i^j Dx^2y + \frac{1}{2}\bar{a}xz^2 + \\
 &+ \beta_i^j Hxy^2 - \frac{1}{2}yz^2 + \gamma_i^j dx^2 + \delta_i^j ey^2 + \varepsilon_i^j gxy + \\
 &+ \eta_i^j ax + \lambda_i^j by + \mu_i^j T = 0 \\
 &\text{mit } 0 < B < \frac{1}{6\bar{b}^2}, \quad 0 < A < -\frac{\bar{a}^3}{6\bar{b}^2} \\
 &\text{bzw. } 0 > A > -\frac{\bar{a}^3}{6\bar{b}^2} \text{ und } \bar{a} \neq 0, \bar{b} \neq 0.
 \end{aligned}$$

Insgesamt umfasst die Hauptklasse I somit 9 Untertypen mit insgesamt 6912 Exemplaren. Wir fassen zusammen im

SATZ 5.1. *Die verallgemeinerten Zykliden 4. Ordnung der Hauptklasse I lassen sich durch die Normalformen (4.10, Φ_{25})–(4.10, Φ_{30}) sowie (4.10, Φ_{49})–(4.10, Φ_{50}) beschreiben. Diese Hauptklasse besitzt 9 Untertypen mit insgesamt 6912 Exemplaren.*

Die Angabe der Normalform für die Hauptklassen II–X erfaßt im 2. Teil dieser Arbeit, dort wird dann somit die Transformationstheorie für die Hauptklasse XI–XXV vorgestellt, sowie durch 2 Taylor-Entwicklungen die Singularitätstheorie der verallgemeinerten Zykliden 4. Ordnung skizziert.

Literatur

- [1] BALABANOVA, P.: Linii v psevdooizotropno prostranstve bes metriki, *Nauchni trudove* **16** (1) (1978), 355–376 (bulgarisch).
- [2] VASIL'eva, Z. I., KONJAEVA, L. V. i LIBERMAN, L. I.: Kvadriki v izotropnom prostranstve, *Uch. zap. Kolomen. Ped. in-ta «Proektivnye metriki»* **8** (1964), 34–52.
- [3] BENZ, W.: Über die Grundlagen der Geometrie der Kreise in der pseudo-euklidischen (Minkowskischen) Geometrie, *Journal f. d. reine u. angew. Math.* **232** (1968), 41–76.
- [4] BENZ, W.: Vorlesungen über Geometrie der Algebren, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.
- [5] BIRMAN, G. S. and NOMIZU, K.: Trigonometry in Lorentzian Geometry, *Am. Math. Month.* **91** (1984), 543–549.
- [6] BIRMAN, G. S. and NOMIZU, K.: The Gauss–Bonnet Theorem for 2-dimensional Space-Times, *Michigan Math. J.* **31** (1984), 77–81.

- [7] BOEHM, W.: On cyclides in geometric modelling, *Computer Aided Geometric Design* **7** (1990), 243–255.
- [8] COOLIDGE, J. L.: A treatise on the circle and the sphere, Oxford, 1916.
- [9] ERGIN, A.: On the 1-parameter Lorentzian Motion, *Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara Ser. A1* **40** (1991), 59–66.
- [10] FLADT, K.: Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven, Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main, 1962.
- [11] FLADT, K. und BAUR, A.: Analytische Geometrie spezieller Flächen und Raumkurven, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1975.
- [12] HUSTY, M. und RÖSCHEL, O.: On a particular class of cyclides in isotropic respectively pseudoisotropic space, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* **46** (1984), 531–557.
- [13] HUSTY, M.: Eine Bemerkung zu den Dupinischen Zykliden des einfach isotropen bzw. pseudoisotropen Raumes, *Anz. d. Österr. Akad. Wiss.* **122** (1985), 171–174.
- [14] HUSTY, M. und RÖSCHEL, O.: Eine affinkinematische Erzeugung gewisser Flächen 4. Ordnung mit zerfallendem Doppelkegelschnitt I, *Glasnik Mat.* **22** (1987), 143–156.
- [15] HUSTY, M. und RÖSCHEL, O.: Eine affinkinematische Erzeugung gewisser Flächen 4. Ordnung mit zerfallendem Doppelkegelschnitt II, *Glasnik Mat.* **22** (1987), 429–447.
- [16] KLEIN, F.: Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Programm zum Eintritt in die philosophische Fakultät und den Senat der k. Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen, 1872 bzw. *Math. Ann.* **43** (1893), 63–100.
- [17] KOMMERELL, K.: Elementargeometrische Behandlung der Dupinschen Zyklide, *Zeitschrift für math. u. naturw. Unterricht* **49** (1912), 79–95.
- [18] KOMMERELL, K.: Das Grenzgebiet der elementaren und höheren Mathematik, Leipzig, 1936.
- [19] KRAMES, I.: Über die Kugelschnitte der Darboux-Zykliden vierter Ordnung, *Sitz.-Ber. d. Österr. Akad. Wiss. Wien* **182** (1974), 67–91.
- [20] MAYER, O.: Biaxiale Differentialgeometrie der Kurven und Regelflächen, *Ann. Sci. Univ. Jassy* **27** (1941), 327–410.
- [21] McLEAN, D.: A method of generating surfaces as a composite of cyclide patches, *Comput. J.* **28** (1985), 433–438.
- [22] MÉSZÁROS, F.: Die Zykliden 3. Ordnung im pseudoisotropen Raum I, *Österr. Akad. Wiss. Wien* **201** (1992), 21–38.
- [23] MÉSZÁROS, F.: Die Zykliden 3. Ordnung im pseudoisotropen Raum II, *Math. Pannonica* **4/2** (1993), 273–285.
- [24] MÉSZÁROS, F.: Fläche 2. Ordnung im pseudoisotropen Raum des $I_3^{(1)p}$, *RAD Hrvatske akad. znan. umj. mat.* **12** (1995), 87–111.
- [25] MÉSZÁROS, F.: Klassifikationstheorie der verallgemeinerten Zykliden 4. Ordnung im pseudoisotropen Raum, Habilitationsschrift an der MU Leoben, 2007.
- [26] MÜLLER, E. und KRUPPA, K.: Lehrbuch der Darstellenden Geometrie, Springer-Verlag, Wien, 1948.

- [27] PALMAN, D.: Drehzykliden 4. Ordnung (Typus I) des einfach isotropen Raumes, *Glasnik Mat.* **15** (1980), 133–148.
- [28] PALMAN, D.: Drehzykliden des einfach isotropen Raumes (Typus II), *Rad JAZU* **408** (1984), 51–59.
- [29] PALMAN, D.: Drehzykliden des einfach isotropen Raumes (Typus III), *Rad JAZU* **421** (1986), 9–25.
- [30] PETKANTSCHIN, B.: Parabolische Regelscharen in der zweiachsigen Geometrie, *Comptes Rendus de l'Académie Bulg.* **8** (1955), Nr. 1.
- [31] PETKANTSCHIN, B.: Regelscharen isotroper Geraden in der zweiachseigen Geometrie, *Izv. Na. Mat. Inst. na BAN* **2** (1) (1956), 69–83.
- [32] PROSKURINA, R. G.: Obrazy simmetrii i antisimmetrii trechmernogo psevdooizotropnogo prostranstva, *Ukrainskii geom. Sbornik* **14** (1973), 77–83.
- [33] PROSKURINA, R. G.: Interpretacii trechmernogo psevdooizotropnogo prostranstva, *Ukrainskii geom. Sbornik* **15** (1974), 80–95.
- [34] REVERUK, N. V.: Krivye vtorogo porjadka v psevdooizotropnoj geometrii, *Uch. Zap. Moskv. Ped. Instituta* **253** (1969), 160–177.
- [35] SACHS, H.: Zur Liniengeometrie isotroper Räume, Habilitationsschrift, Universität Stuttgart, 1972. 120 S. Privatdruck.
- [36] SACHS, H.: Sofia – eine Hochburg der axialen Geometrie, 1300 Jahre Bulgarien, *Südosteuropa-Studien* **30** Teil II (1982), 23–30.
- [37] SACHS, H.: Ebene isotrope Geometrie, Vieweg-Verlag, Braunschweig, Wiesbaden, 1987.
- [38] SACHS, H.: Zur Theorie der Zykliden des einfach isotropen Raumes I, *Glasnik Mat.* **24** (1989), 565–586.
- [39] SACHS, H.: Parabolische Schiebzykliden des einfach isotropen Raumes, *Geometriae Dedicata* **31** (1989), 301–320.
- [40] SACHS, H.: Verallgemeinerte parabolische Schiebzykliden des einfach isotropen Raumes I, *Sitz.-Ber. d. Österr. Akad. Wiss. Wien* **198** (1989), 227–246.
- [41] SACHS, H.: Isotrope Geometrie des Raumes, Vieweg-Verlag, Braunschweig, Wiesbaden, 1990.
- [42] STANILOV, Gr.: Kongruencii ot pravi v biaksialnata geometrija, *God. na Sof. un. mat. fak.* **57** (1962/63), 317–334.
- [43] STRUBECKER, K.: Beiträge zur Geometrie des isotropen Raumes, *Journ. f. d. reine u. angew. Math.* **178** (1938), 153–173.
- [44] STRUBECKER, K.: Differentialgeometrie des isotropen Raumes I: Theorie der Raumkurven, *Sitz.-Ber. d. Österr. Akad. Wiss. Wien* **150** (1941), 1–53.