Mathematica Pannonica
7/1 (1996), 3 – 22

ÜBER DIE KOEFFIZIENTEN DER NATÜRLICHEN ITERIERTEN EINER FORMALEN POTENZREIHE

Ludwig **Reich**

Institut für Mathematik, Karl–Franzens–Universität, Heinrichstraße 36/VI, 8010 Graz, Österreich

Hans Vogler zum 60. Geburtstag in Freundschaft zugeeignet

Received March 1995

MSC 1991: 13 F 25, 39 B 12

Keywords: Iteration of formal power series, semicanonical forms, Bell polynomials.

Abstract: Let $F(x) = C_1x + C_2x^2 + \dots$ be a formal power series in x whose coefficients are independent indeterminates over $\mathbb{C}$. Let $F^{[m]}(x)$, for $m \in \mathbb{N}$ be the m-th iterate of $F(x)$ with respect to substitution, and write $F^{[m]}(x) = \sum\limits_{\nu \geq 1} C_\nu^{[m]} x^\nu$. The coeffcient $C_\nu^{[m]}$ of $F^{[m]}(x)$ is a polynomial in $C_1, C_2, \dots, C_\nu$ with integer coefficients. Fix $m \geq 2$, and denote by $Z_m(C_1)$ the (irreducible) m-th cyclotomic polynomial over $\mathbb{Q}$. Then it is shown that the ideal of all polynomials over $\mathbb{Q}$ vanishing on the set of common zeros of $Z_m(C_1)$, $C_{m+1}^{[m]}, \dots, C_{jm+1}^{[m]}$ $(j \geq 1)$ (in a certain affine space $\mathbb{C}^{jm+\mu}$), $1 <$ $< \mu \leq m$, is a prime ideal (Satz 1), and that there exist certain polynomials $D_{m,j,\mu}(C_1)$ in C_1 over $\mathbb{Z}$ such that $D_{m,j,\mu}(C_1) \cdot C_{jm+\mu}^{[m]}$ belongs to this prime ideal, for $1 < \mu \leq m$. There are polynomial identities expressing this fact which are described in detail (Satz 2). The situation becomes easier if C_1 is specialized to a primitive root of 1 of order m. Then the above relations are generalized to the iterates $F^{[m]}(x)$ for $m \in \mathbb{Z}$, $m < 0$. Eventually we obtain from Satz 2 several types of identities for Bell polynomials. The main tools are taken from the theory of semicanonical forms of formal series with respect to conjugation.

1. Einleitung. Die Hauptergebnisse

Es sei $\mathbb{C}[[x]]$ der Ring der formalen Potenzreihen in einer Unbestimmten x über $\mathbb{C}, \Gamma$ die Gruppe der invertierbaren Potenzreihen $F(x) = \rho x + c_2 x^2 + \ldots$, $\rho \neq 0$, mit der Substitution als Gruppenoperation. Für $m \in \mathbb{N}$ definieren wir die „natürlichen" Iterierten der Ordnung m durch $F^1(x) = F(x)$, $F^m(x) = F^{m-1} \circ F(x)$ für $m \geq$ ≥ 2. Das Ziel der vorliegenden Note ist der Beweis gewisser algebraischer Relationen (idealtheoretischer Natur) zwischen den Koeffizienten $c_k^{[m]}$ von F^m, $F^m(x) = \sum_{\nu \geq 1} c_\nu^{[m]} x^\nu$. Diese werden in Satz 1, Satz 2 und Satz 3 formuliert. Nimmt man den Multiplikator von ρ von F als primitive m-te Einheitswurzel, so lassen sich diese Resultate noch etwas einfacher formulieren (Satz 4). Ferner werden wir in Satz 5 und Satz 6 ähnliche Darstellungen für die Koeffizienten $c_\nu^{[-m]}$ der ganzzahligen Iterierten $F^{-m}(x) = \sum_{\nu \geq 1} c_\nu^{[-m]} x^\nu$, $m \in \mathbb{N}$ formulieren und schließlich andeuten, wie die Hauptergebnisse (Satz 1 und Satz 2) als Identitäten für Bellsche Polynome geschrieben werden können, wobei drei verschiedene Typen solcher Relationen für Bellsche Polynome auftreten. Der Verfasser hofft, daß diese Relationen noch nicht bekannt sind. Als Hilfsmittel verwenden wir, auf den Spezialfall der Reihen in einer Unbestimmten zugeschnitten, die sogenannten semikanonischen Formen formaler Potenzreihentransformationen gegenüber Konjugation (s. [1]) und das Verhalten dieser Normalformen (eines festen Typs) bei Substitution (s. [3]). Zur Formulierung der Ergebnisse und auch für die Beweise ist es zweckmäßig, die allgemeine formale Potenzreihe $\hat{F}$ über $\mathbb{C}$ zu betrachten, deren Koeffizienten über $\mathbb{C}$ von einander unabhängige Unbestimmte C_ν sind, $\hat{F}(x) = \sum_{\nu \geq 1} C_\nu x^\nu$, d.h. also genauer formale Reihen, deren Koeffzienten dem Körper angehören, der aus $\mathbb{C}$ durch Adjunktion der Unbestimmten C_v entsteht. Die Koeffizienten der m-ten Iterierten von $\hat{F}, \hat{F}^m(x) = \sum_{\nu \geq 1} C_\nu^{[m]} x^\nu$, seien mit $C_\nu^{[m]}$ bezeichnet. Für das Rechnen mit formalen Reihen verweisen wir den Leser auf [4], ch. 1. Offensichtlich gilt:

Hilfssatz 1. a) *$C_\nu^{[m]}$ ist ein Polynom $C_\nu^{[m]}(C_1, \ldots, C_\nu)$ in $C_1, \ldots, C_\nu$ über $\mathbb{Z}$. Speziell gilt $C_1^{[m]} = C_1^m$.*

b) *Für jede Potenzreihe $F(x) = \rho x + c_2 x^2 + \ldots$ in $\mathbb{C}[[x]]$ und ihre*

m-te Iterierte $F^m(x) := \sum\limits_{\nu\geq 1} c_\nu^{[m]} x^\nu$ *gilt:*

$$c_\nu^{[m]} = C_\nu^{[m]}(\rho, c_1, \ldots, c_\nu),$$

d.h. $c_\nu^{[m]}$ *ergibt sich durch Substitution von* $\rho, c_2, \ldots, c_\nu$ *für* $C_1, C_2, \ldots$ $\ldots, C_\nu$ *in das Polynom* $C_\nu^{[m]}$.

Es sei nun $m \geq 2$. Mit $C^{(m,j,\mu)}$, $2 \leq \mu \leq m$, $j \geq 1$, kurz C, bezeichnen wir die Menge der Unbestimmten $C_1, C_2, \ldots, C_{jm+\mu}$; es sei ferner $\overline{C}^{(m,j,\mu)} := C^{(m,j,\mu)} \setminus \{C_{m+1}, \ldots, C_{jm+1}\}$; d.h. die Menge der Unbestimmten C_l, $1 \leq l \leq jm+\mu$, wobei für $l > 1$, $l \not\equiv 1 \pmod m$. Das Hauptziel der vorliegenden Note ist der Beweis des folgenden Darstellungssatzes.

Satz 1. a) *Es sei* $m \geq 2$, $j \geq 1$, $2 \leq \mu \leq m$. *Dann existieren nichtnegative Zahlen* $\alpha_0(m,j,\mu), \ldots, \alpha_j(m,j,\mu)$ *und Polynome* $\phi_{m,j,\mu}^{(\nu_1,\ldots,\nu_j)}$ *und* $\tilde{\phi}_{m,j,\mu}^{(0,\ldots,0)}$ *in* $\overline{C}^{(m,j,\mu)}$ *(— also unabhängig von* $C_{m+1}, \ldots, C_{jm+1}$ *—) über* $\mathbb{Z}$, *sodaß*

$$\left(C_1^{m-1}\right)^{\alpha_0(m,j,\mu)} \left(1 + C_1^m + \cdots + C_1^{(m-1)m}\right)^{\alpha_1(m,j,\mu)} \cdots$$

$$\cdots \left(1 + C_1^{jm} + \cdots + C_1^{(m-1)jm}\right)^{\alpha_j(m,j,\mu)} C_{jm+\mu}^{[m]} = \tag{1}$$

$$= \sum_{\nu_1+\cdots+\nu_j\geq 1} \phi_{m,j,\mu}^{(\nu_1,\ldots,\nu_j)} \left(C_{m+1}^{[m]}\right)^{\nu_1} \cdots \left(C_{jm+1}^{[m]}\right)^{\nu_j} + Z_m(C_1)\tilde{\phi}_{m,j,\mu}^{(0,\ldots,0)},$$

wobei $Z_m(C_1)$ *das m-te (irreduzible) Kreisteilungspolynom ist.*

b) *In der Relation* (1) *sind die rationalen Funktionen*

$$\left(C_1^{m-1}\right)^{-\alpha_0(m,j,\mu)} \left(1 + C_1^m + \ldots\right)^{-\alpha_1(m,j,\mu)} \cdots$$

$$\cdots \left(1 + C_1^{jm} + \ldots\right)^{-\alpha_j(m,j,\mu)} \cdot \phi_{m,j,\mu}^{(\nu_1,\ldots,\nu_j)}$$

durch $C_{m,j,\mu}^{[m]}$ *eindeutig bestimmt* ($\Phi_{m,j,\mu}^{(0,\ldots,0)} = Z(C_1) \cdot \tilde{\Phi}_{m,j,\mu}^{(0,\ldots,0)}$).

c) *Die Polynome* $\Phi_{m,j,\mu}^{(\nu_1,\ldots,\nu_j)}$ *und* $\tilde{\Phi}_{m,j,\mu}^{(0,\ldots,0)}$ *enthalten kein Absolutglied und keine nur von* C_1 *abhängigen Terme.*

d) *In der Relation* (1) *für* $C_{jm+\mu}^{[m]}$ *tritt auf der rechten Seite* $C_{jm+1}^{[m]}$ *nur im Monom* $\Phi_{m,j,\mu}^{(0,\ldots,0,1)} \cdot C_{jm+1}^{[m]}$ *auf, wobei* $\Phi_{m,j,\mu}^{(0,\ldots,1)} \neq 0$ *nur von* $C_1, \ldots$ $\ldots, C_m$ *abhängen kann. Ferner können die Unbestimmten* $C_{jm+2}, \ldots$ $\ldots, C_{jm+\mu}$ *nur in* $\tilde{\Phi}_{m,j,\mu}^{(0,\ldots,0)}$ *vorkommen, sind also stets mit* $Z_m(C_1)$ *multipliziert.*

Eng mit Satz 1 hängt zusammen der Satz 2. Wir fassen $C^{[m]}_{m+1}, \dots$ $\dots, C^{[m]}_{jm+1}$ als Polynome in $C^{(m,j,\mu)}$ mit $2 \leq \mu \leq m$ auf und bezeichnen mit $\mathcal{N}_{m,j,\mu}$ die Nullstellenmenge etwa in $\mathbb{C}^{jm+\mu}$ des Gleichungssystems (über $\mathbb{Q}$) $Z_m(C_1) = 0$, $C^{[m]}_{m+1} = 0, \dots, C^{[m]}_{jm+1} = 0$, mit $\mathcal{P}_{m,j,\mu}$ das Ideal in $\mathbb{Q}[C^{(m,j,\mu)}]$ aller auf $\mathcal{N}_{m,j,\mu}$ verschwindenden Polynome sowie mit $\mathfrak{p}_{m,j,\mu}$ das von $Z_m(C_1)$, $C^{[m]}_{m+1}, \dots, C^{[m]}_{jm+1}$ in $\mathbb{Q}[C^{(m,j,\mu)}]$ erzeugte Ideal. Dann gilt

Satz 2. a) *$\mathcal{N}_{m,j,\mu}$ ist irreduzibel, also $\mathcal{P}_{m,j,\mu}$ prim, $\mathcal{P}_{m,j,\mu} =$* Radikal $(\mathfrak{p}_{m,j,\mu})$.

b) *Für ein Polynom $Q(C)$ in $\mathbb{Q}[C^{(m,j,\mu)}]$ gilt: $Q(C)$ liegt in $\mathcal{P}_{m,j,\mu}$ genau dann, wenn es Polynome $\Phi^{(\nu_1,\dots,\nu_j)}$ und $\tilde{\Phi}^{(0,\dots,0)}$ in $\overline{C}^{(m,j,\mu)}$ über $\mathbb{Q}$, sowie nichtnegative ganze Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_j$ gibt, sodaß*

$$\begin{aligned} &\left(C_1^{m-1}\right)^{\alpha_0} \left(1 + C_1^m + \dots + C_1^{(m-1)m}\right)^{\alpha_1} \dots \\ &\dots \left(1 + C_1^{jm} + \dots + C_1^{(m-1)jm}\right)^{\alpha_j} Q(C) = \end{aligned} \tag{2}$$
$$= \sum_{\nu_1+\dots+\nu_j \geq 1} \Phi^{(\nu_1,\dots,\nu_j)} \left(C^{[m]}_{m+1}\right)^{\nu_1}, \dots, \left(C^{[m]}_{j,m+1}\right)^{\nu_j} + Z_m(C_1)\tilde{\Phi}^{(0,\dots,0)}$$

gilt.

2. Beweise der Hauptergebnisse. Weitere Relationen

Zum Beweis der Sätze 1 und 2, der im wesentlichen in einem erfolgt, schicken wir eine Reihe von Hilfssätzen voraus.

Hilfssatz 2. *Es sei ρ eine primitive m-te Einheitswurzel* ($m \geq 1$) *in $\mathbb{C}$. Es sei $F(x) \in \Gamma$, $F(x) = \rho x + c_2 x^2 + \dots$. Dann gilt: Es gibt ein $T \in \Gamma$, $T(x) = x + t_2 x^2 + \dots$, derart, daß $N(x) = T^{-1} \circ F \circ T(x) = = \rho x + \sum_{j \geq 1} d_{jm+1} x^{jm+1}$ gilt.* ($N(x)$ heißt semikanonische Form oder kurz *Normalform* bezüglich ρ).

Beweis. Dies ist ein Spezialfall der allgemeinen Normalformentheorie formaler Potenzreihenabbildungen (vgl. [1], bzw. speziell [2]) für eine Unbestimmte. Die hier relevanten multiplikativen Relationen sind von der Form $\rho^k = \rho$ ($k \geq 2$), und dies ist genau dann der Fall, wenn $k = = jm + 1$. Somit treten in den semikanonischen Formen abgesehen vom Linearteil nur die „Zusatzmonome" x^{jm+1} auf, d.h.

$$N(x) = T^1 \circ F \circ T(x) = \rho x + \sum_{j\geq 1} d_{jm+1} x^{jm+1}. \qquad \Diamond$$

Hilfssatz 3. *Es sei $m \geq 1$, und für $k = 1, 2, \ldots, r$ $N_k(x) = \sigma_k x + \sum_{j\geq 1} d^{(k)}_{jm+1} x^{jm+1}$ d.h. jedes N_k habe die Struktur der Normalform bezüglich $\rho = e^{2\pi i/m}$ (gemäß Hilfssatz 2). Dann gilt*

$$(N_1 \circ \ldots \circ N_k)(x) = \sigma_1 \ldots \sigma_k x + \sum_{j\geq 1} \phi_{jm+1} x^{jm+1}.$$

Ist insbesondere $N_k(x) = N(x) = \rho x + \sum_{j\geq 1} d_{jm+1} x^{jm+1}$, dann gilt für die m-te Iterierte $N^m(x)$, $N^m(x) = \rho^m x + \sum_{j\geq 1} d^{[m]}_{jm+1} x^{jm+1}$, d.h. $d^{[m]}_l = 0$ für $l \not\equiv 1 (\operatorname{mod} m)$.

Beweis. Dies ist ein Spezialfall des sogenannten Satzes über die „Substitution von Zusatzmonomen in Zusatzmonomen", vgl. z.B. [3], p. 51, Hilfssatz 3. Wir benötigen außerdem noch genauere Kenntnis der Bauart der im Hilfssatz 1 einführten Polynome $C^{[1]}_k(C_1, \ldots, C_k)$ über $\mathbb{Z}$. $\Diamond$

Hilfssatz 4. *Für die in Hilfssatz 1 eingeführten Polynome $C^{[1]}_k(C_1, \ldots, C_k)$ über $\mathbb{Z}$ gilt:*

a) $C^{[l]}_k = C_1^{l-1}(1 + C_1^{k-1} + \cdots + C_1^{(l-1)(k-1)})C_k + Q_{k,l}(C_1, \ldots, C_{k-1})$ *mit einem Polynom $Q_{k,l}$ über $\mathbb{Z}$ in $C_1, \ldots, C_{k-1}$ ohne Absolutglied.*

b) *Speziell haben wir für $l = m$ (≥ 1), $k = jm + 1$*

$$C^{[m]}_{jm+1} = C_1^{m-1}(1 + C_1^{jm} + \ldots C_1^{(m-1)jm})C_{jm+1} + \tilde{Q}_{m,j}(C_1, \ldots, C_{jm}),$$

mit einem Polynom $\tilde{Q}_{m,j}$ über $\mathbb{Z}$ ohne Absolutglied.

c) *Für $2 \leq \mu \leq m$ gilt*

$$C^{[m]}_{jm+\mu} = P_{m,j,\mu}(C_1, \ldots, C_m) C_{jm+1} + \\ + R_{m,j,\mu}(C_k | 1 \leq k \leq jm + \mu, k \neq jm + 1)$$

mit Polynomen über $\mathbb{Z}$ in den angeschriebenen Argumenten, d.h. in $R_{m,j,\mu}$ kommt C_{jm+1} nicht vor, in $P_{m,j,\mu}$ tritt nur $C_1, \ldots, C_m$ auf.

Beweis. Vollständige Induktion nach (m, j). $\Diamond$

Grundlegend für den Beweis der Formel (1) in Satz 1 ist

Hilfssatz 5. *Es sei ρ eine primitive m-te Einheitswurzel, $F(x) = \rho x + c_2 x^2 + \ldots$. Dann ist entweder $F^m(x) = x$, oder es existiert ein $r \geq 1$, sodaß $F^m(x) = x + c^{[m]}_{rm+1} x^{rm+1} + \ldots$ mit $c^{[m]}_{rm+1} \neq 0$, d.h. also $c^{[m]}_2 = \cdots = c^{[m]}_{rm} = 0, c^{[m]}_{rm+1} \neq 0$.* Mit anderen Worten: *Gilt für die Reihe*

$F(x) = \rho x + c_2 x^2 + \ldots$ $Z_m(\rho) = 0$, $c^{[m]}_{m+1} = 0, \ldots, c^{[m]}_{(r-1)m+1} = 0$ $(r \geq 1)$, so gilt $c^{[m]}_l = 0$ für alle l mit $2 \leq l \leq rm$.

Beweis. Nach Hilfssatz 2 gibt es ein $T \in \Gamma$, $T(x) = x + t_2 x^2 + \ldots$, sodaß $N(x) := T^{-1} \circ F \circ T(x) = \rho x + \sum_{j \geq 1} d_{jm+1} x^{jm+1}$. Nach Hilfssatz 3 ergibt sich für die Iterierte $N^m(x) = x + \sum_{j \geq 1} d^{[m]}_{jm+1} x^{jm+1}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. $d^{[m]}_{jm+1} = 0$ für alle $j \geq 1$, also $N^m(x) = x$. Dann gilt $F^m(x) = T^{-1} \circ N^m \circ T^{-1}(x) = x$.

2. Es existiert ein $r \geq 1$, sodaß $d^{[m]}_{km+1} = 0$ für $1 \leq k < r$, aber $d^{[m]}_{rm+1} \neq 0$. Nach Hilfssatz 3 gilt $d^{[m]}_l = 0$ für $l > 1$ $l \not\equiv 1 \pmod m$. Somit erhalten wir $N^m(x) = x + d^{[m]}_{rm+1} x^{rm+1} + \ldots$, $d^{[m]}_{rm+1} \neq 0$. Für F^m gilt $T \circ N^m \circ T^{-1} = F^m$. Da der rm-Jet von $N^m(x)$, $\sum_{\nu=1}^{mr} d^{[m]x^\nu}_\nu$, mit x übereinstimmt, wirkt T durch Konjugation auf diesem Abschnitt als Identität. Somit hat $F^m(x) - x$ eine Ordnung, die nicht kleiner als $rm + 1$ ist. Angenommen, diese Ordnung wäre $\nu_0 > rm + 1$. Das eben angewendete Argument würde dann aber zeigen, daß $N^m(x) - x = T^{-1} \circ F^m \circ T(x) - x$ eine Ordnung hätte, die nicht kleiner ist als ν_0, was ein Widerspruch ist. Somit erhalten wir $F^m(x) = x + c^{[m]}_{r\,m+1} x^{rm+1} + \ldots$, mit $c^{[m]}_{rm+1} \neq 0$, $c^{[m]}_l = 0$, $2 \leq l \leq rm$. Ist also $Z_m(\rho) = 0$, $c^{[m]}_{m+1} = 0, \ldots, c^{[m]}_{(r-1)r\,m+1} = 0$, für ein $r \geq 1$, dann ist entweder $F^m(x) = x$ oder es existiert ein $s \geq 1$ sodaß $c^{[m]}_{sm+1} \neq 0$, $c^{[m]}_l = 0$ für $2 \leq l \leq sm$. Dann gilt aber $s \geq r$, d.h. es ist $c^{[m]}_l = 0$ für $2 \leq l \leq rm$. $\Diamond$

Wir benötigen sodann die „Entwicklung eines Polynoms $P(C) \in \mathbb{C}[C^{(m,j,\mu)}]$ nach den Polynomen $C^{[m]}_{m+1}, C^{[m]}_{2m+1}, \ldots, C^{[m]}_{jrm+1}$".

Hilfssatz 6. a) *Es sei $P(C)$ ein Polynom in $\mathbb{C}[C^{(m,j,\mu)}]$. Dann gibt es ganze nichtnegative Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_j$ und Polynome $\Phi^{(\nu_1,\ldots,\nu_j)}$ in $\overline{C}^{(m,j,\mu)}$, sodaß*

$$C_1^{\alpha_0}\left(1 + C_1^m + \cdots + C_1^{(m-1)m}\right)^{\alpha_1} \ldots$$

$$\ldots\left(1 + C_1^{jm} + \cdots + C_1^{(m-1)jm}\right)^{\alpha_j} P(C) = \tag{3}$$

$$= \sum_{\nu_1+\cdots+\nu_j\geq 0} \Phi^{(\nu_1,\dots,\nu_j)} \left(C_{m+1}^{[m]}\right)^{\nu_1}, \dots, \left(C_{jm+1}^{[m]}\right)^{\nu_j}.$$

b) *In der Relation* (3) *sind die Quotienten* $C_1^{-\alpha_0}(1+C_1^m+\dots)^{-\alpha_1}\cdot$ $\dots(1+C_1^{jm}+\dots)^{-\alpha_j}\Phi^{(\nu_1,\dots,\nu_j)}$ *für alle* $(\nu_1,\dots,\nu_j), \nu_k \geq 0$, *durch* $P(C)$ *eindeutig bestimmt.* (Ist $P(C)=0$, so nehmen wir $\alpha_0=\cdots=\alpha_j=0$, $\Phi^{(\nu_1,\dots,\nu_j)}=0$, für alle $(\nu_1,\dots,\nu_j)$).

c) *Hat* $P(C)$ *Koeffizienten in* $\mathbb{Q}$ *bzw.* $\mathbb{Z}$, *dann trifft dies auch für alle* $\Phi^{(\nu_1,\dots,\nu_j)}$ *zu.*

Beweis. a) Wenn keine der Unbestimmten $C_{jm+1},\dots,C_{m+1}$ in $P(C)$ wirklich auftritt, so ist $\alpha_0=\cdots=\alpha_j=0$, $\Phi^{(0,\dots,0)}=P(C)$, $\Phi^{(\nu_1,\dots,\nu_j)}=0$ für $\nu_1+\cdots+\nu_j>0$ in der gesuchten Entwicklung. Es trete also eine der Unbestimmten C_{km+1} $(k\geq 1)$ in $P(C)$ wirklich auf, und es sei C_{jm+1}, diese mit dem höchsten Index. Wir ordnen $P(C)$ nach Potenzen von C_{jm+1}, es sei etwa $P(C)=A_{j,r_j}C_{jm+1}^{r_j}+\sum_{l=0}^{r_j-1}A_{j,l}C_{jm+1}^l$, wobei C_{jm+1} in keinem der Polynome $A_{j,k}$ wirklich vorkommt, $r_j\geq$ ≥ 1, und $A_{j,r_j}\neq 0$ ist. Wir setzen nun, gemäß Hilfssatz 4 b in dieser Darstellung

$$\begin{aligned} C_{jm+1} = & \frac{1}{C_1^{m-1}\left(C_1+C_1^{jm}+\cdots+C_1^{(m-1)jm}\right)}C_{jm+1}^{[m]} - \\ & -\frac{1}{C_1^{m-1}\left(1+C_1^{jm}+\cdots+C_1^{(m-1)jm}\right)}\tilde{Q}_{m,j}(C_1,\dots,C_{jm}) \end{aligned}$$

und erhalten $P(C)$ als Quotienten eines Polynoms $P^{(j)}$, in $C_1, C_2,\dots$ $\dots, C_{jm+1}^{[m]},\dots,C_{jm+\mu}$ (— wobei C_{jm+1} nicht mehr auftritt —) und eines Polynoms der speziellen Form $[C_1^{m-1}(1+C_1^{jm}+\cdots+C_1^{(m-1)jm})]^{\alpha_j}$. Änlich verfahren wir mit $P^{(j)}$ bezüglich der Variablen $C_{(j-1)m+1}$ (wenn sie wirklich auftritt) und kommen zu einer Relation

$$\begin{aligned} &\left[C_1^{m-1}\left(1+C_1^{jm}+\cdots+C_1^{(m-1)jm}\right)\right]^{\alpha_j}\cdot \\ &\cdot\left[C_1^{m-1}\left(1+C_1^{(j-1)m}+\cdots+C_1^{(m-1)(j-1)m}\right)\right]^{\alpha_{j-1}}P(C) = \\ &= P^{(j-1)}\left(C\setminus\left\{C_{jm+1},C_{(j-1)m+1}\right\},C_{jm+1}^{[m]},C_{(j-1)m+1}^{[m]}\right) \end{aligned}$$

mit einem Polynom $P^{(j-1)}$ in den angeschriebenen Argumenten. Auf diese Weise erreichen wir eine in a) behauptete Entwicklung, wobei $\alpha_0=\alpha_1+\cdots+\alpha_j$.

b) Wir kommen nun zur Untersuchung der Eindeutigkeit der Entwicklung nach $C_{m+1}^{[m]}, \ldots, C_{jm+1}^{[m]}$. Es sei $P(C) \in \mathbb{C}[C_1 \ldots, C_{jm+\mu}]$ ($m \geq$ ≥ 2, $j \geq 1$, $2 \leq \mu \leq m$) und es gelte

$$\begin{aligned}&\left(C_1^{m-1}\right)^{\alpha_1}\left(1 + C_1^m + \cdots + C_1^{(m-1)m}\right)^{\alpha_j} \ldots\\ &\ldots\left(1 + C_1^{jm} + \cdots + C_1^{(m-1)jm}\right)^{\alpha_0} \cdot P(C) =\\ &= \sum_{(\nu_1,\ldots,\nu_j)} \Phi^{(\nu_1,\ldots,\nu_j)}\left(C_{m+1}^{[m]}\right)^{\nu_1} \ldots \left(C_{jm+1}^{[m]}\right)^{\nu_j},\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}&\left(C_1^{m-1}\right)^{\beta_0}\left(1 + C_1^m + \cdots + C_1^{(m-1)m}\right)^{\beta_1} \ldots\\ &\ldots\left(1 + C_1^{jm} + \cdots + C_1^{(m-1)jm}\right)^{\beta_j} \cdot P(C) =\\ &= \sum_{(\nu_1,\ldots,\nu_j)} \Psi^{(\nu_1,\ldots,\nu_j)}\left(C_{m+1}^{[m]}\right)^{\nu_1} \ldots \left(C_{jm+1}^{[m]}\right)^{\nu_j},\end{aligned}$$

wobei α_k, β_k nicht negative ganze Zahlen und $\Phi^{(\nu_1,\ldots,\nu_j)}$, $\Psi^{(\nu_1,\ldots,\nu_j)}$ Polynome in den C_k sind, und $k \not\equiv 1 \pmod m$ für $k > 1$.

Wir benutzen die Abkürzungen

$$\tilde{\phi}^{(\nu_1,\ldots,\nu_j)} = \frac{\phi^{(\nu_1,\ldots,\nu_j)}}{\left(C_1^{m-1}\right)^{\alpha_0}\left(1 + C_1^m + \ldots\right)^{\alpha_1} \ldots \left(1 + C_1^{jm} + \ldots\right)^{\alpha_j}}$$

und

$$\tilde{\Psi}^{(\nu_1,\ldots,\nu_j)} = \frac{\Psi^{(\nu_1,\ldots,\nu_j)}}{\left(C_1^{m-1}\right)^{\beta_0}\left(1 + C_1^m + \ldots\right)^{\beta_1} \ldots \left(1 + C_1^{jm} + \ldots\right)^{\beta_j}},$$

sodaß also

$$\begin{aligned}P(C) &= \sum_{(\nu_1,\ldots,\nu_j)} \tilde{\phi}^{(\nu_1,\ldots,\nu_j)}\left(C_{m+1}^{[m]}\right)^{\nu_1} \ldots \left(C_{jm+1}^{[m]}\right)^{\nu_j} =\\ &= \sum_{(\nu_1,\ldots,\nu_j)} \tilde{\Psi}^{(\nu_1,\ldots,\nu_j)}\left(C_{m+1}^{[m]}\right)^{\nu_1} \ldots \left(C_{jm+1}^{[m]}\right)^{\nu_j}\end{aligned} \tag{4}$$

Ferner verwenden wir die übliche Anordnung $\succ$ von Monomen $x_1^{\nu_1} \ldots x_j^{\nu_j}$ bzw. Multiindices $(\nu_1, \ldots, \nu_j) \succ (\mu_1, \ldots, \mu_j)$, falls ein k, $1 \leq k \leq j$, existiert, sodaß $\nu_j = \mu_j$, $\nu_{j-1}, \ldots, \nu_{k+1} = \mu_{k+1}$, aber $\nu_k > \mu_k$. Wir ordnen $P(C)$ nach Monomen

$$P(C) = \sum_{(\mu_1,\ldots,\mu_j)} P_{\mu_1,\ldots,\mu_j}\,(C_{m+1})^{\mu_1}\ldots(C_{jm+1})^{\mu_j}, \tag{4'}$$

wobei $P_{\mu_1,\ldots,\mu_j}$ durch $P(C)$ eindeutig bestimmte Polynome in den C_k, mit $k \not\equiv 1 \pmod m$ für $k > 1$ sind. Es sei zunächst $P(C) = 0$, d.h. $P_{\mu_1,\ldots,\mu_j} = 0$ für alle $(\mu_1,\ldots,\mu_j)$. Dann sind auch alle $\tilde{\phi}^{(\mu_1,\ldots,\mu_j)}$, und $\tilde{\Psi}^{(\mu_1,\ldots,\mu_j)}$ Null. Nehmen wir nämlich an, daß etwa $\tilde{\phi}^{(k_1,\ldots,k_j)} \neq 0$ sei, und $(k_1,\ldots,k_j)$ der in der Ordnung höchste Multiindex mit dieser Eigenschaft. Dann folgte, wie leicht einzusehen ist,

$$\begin{aligned} P_{(k_1,\ldots,k_j)} = (C^{m-1})^{(k_1+\ldots k_j)}(1 + C^m + \cdots + C_1^{(m-1)m})^{k_1}\ldots \\ \ldots(1 + C_1^{jm} + \cdots + C_1^{(m-1)jm})^{k_j}\,\tilde{\phi}^{(k_1,\ldots,k_j)} \neq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Sodann sei $P(C) \neq 0$, und es sei $(k_1,\ldots,k_j)$ der höchste Multiindex, für den $P_{k_1,\ldots,k_j} \neq 0$. Dann sieht man, mit analogen Überlegungen, wie sie zu (5) führen, daß $P_{\mu_1,\ldots,\mu_j} = 0$, falls $(\mu_1,\ldots,\mu_j) \succ (k_1,\ldots,k_j)$; und daß auch hier für $\tilde{\phi}^{(k_1,\ldots,k_j)}$ (5) gilt, und daß $\tilde{\Phi}^{(k_1,\ldots,k_j)} = \tilde{\Psi}^{(k_1,\ldots,k_j)}$ durch $P(C)$ eindeutig bestimmt ist. Es sei sodann $(k_1',\ldots,k_j')$ der zu $(k_1,\ldots,k_j)$ nächst kleinere Multiindex. Eine analoge Rechnung wie bisher zeigt, daß

$$\begin{aligned} P_{k_1',\ldots,k_j'} &= \left(C_1^{m-1}\right)^{k_1'+\cdots+k_j'}\left(1 + C_1^m + \cdots + C_1^{(m-1)m}\right)^{k_1'}\ldots \\ &\quad\ldots\left(1 + C_1^{jm} + \cdots + C_1^{(m-1)jm}\right)^{k_j'}\cdot\tilde{\phi}^{(k_1',\ldots,k_j')} + R_{(k_1',\ldots,k_j')} = \\ &= \left(C_1^{m-1}\right)^{k_1'+\cdots+k_j'}(1 + C_1^m + \cdots + C_1^{(m-1)m})^{k_1'}\ldots \\ &\quad\ldots\left(1 + C_1^{jm} + \cdots + C_1^{(m-1)jm}\right)^{k_j'}\cdot\tilde{\Psi}^{(k_1',\ldots,k_j')} + R_{(k_1',\ldots,k_j')}, \end{aligned}$$

wobei $R_{(k_1',\ldots,k_j')}$, ein durch $\tilde{\phi}^{(k_1,\ldots,k_j)} = \tilde{\Psi}^{(k_1,\ldots,k_j)}$, d.h. durch $P(C)$ eindeutig festgelegtes Polynom ist. Denn wegen der Bauart der Polynome $C_{km+1}^{[m]}$, leisten bei Einsetzen der $C_{km+1}^{[m]}$ in die Darstellungen (3) nur $\tilde{\phi}^{(k_1,\ldots,k_j)} = \tilde{\Psi}^{(k_1,\ldots,k_j)}$ und $\tilde{\phi}^{(k_1',\ldots,k_j')}$ (bzw. $\tilde{\Psi}^{(k_1',\ldots,k_j')}$) einen Beitrag. Man erkennt also, daß auch $\tilde{\phi}^{(k_1',\ldots,k_j')} = \tilde{\Psi}^{(k_1',\ldots,k_j')}$ durch $P(C)$ eindeutig bestimmt ist, und daß es sich dabei um rationale Funktionen handelt, deren Nenner die angegebene Form aufweist. So fortfahrend beweist man die Behauptung b).

c) Es habe $P(C)$ Koeffzienten in $\mathbb{Q}$ (bzw. $\mathbb{Z}$). Der in a) beschriebene Algorithmus zeigt, daß es dann eine Relation (2) gibt, in der die $\phi^{(\nu_1,\ldots,\nu_j)}$ Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{Z}$ haben für jede mögliche Wahl von

$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_j$, wenn dies für $P(C)$ zutrifft. $\Diamond$

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zum **Beweis von Satz 1 und Satz 2**. Wir beginnen mit Satz 2 b). Es sei zunächst $Q(C) \in \mathcal{P}_{m,j,\mu}$. Wir betrachten die Entwicklung von $Q(C)$ nach $C^{[m]}_{m+1}, \dots, C^{[m]}_{jm+\mu}$ gemäß Hilfssatz 6:

$$(C_1^{m-1})^{\alpha_0} \left(1 + C_1^m + \cdots + C_1^{(m-1)m}\right)^{\alpha_1} \dots$$

$$\dots \left(1 + C_1^{jm} + \cdots + C_1^{(m-1)jm}\right)^{\alpha_j} Q(C) =$$

$$= \sum_{\nu_1 + \cdots + \nu_j > 0} \phi^{(\nu_1, \dots, \nu_j)} \left(C^{[m]}_{m+1}\right)^{\nu_1} \dots (C^{[m]}_{jm+1})^{\nu_j} + \phi^{(0,\dots,0)},$$

wobei $\phi^{(\mu_1,\dots,\mu_j)}$ Polynome nur in C_k mit $k \not\equiv 1 \pmod m$ für $k > 1$ über $\mathbb{Q}$ sind. Da $Q(C)$ auf $\mathcal{N}_{m,j,\mu}$ verschwindet, so folgt: $\phi^{(0,\dots,0)} = 0$ auf $\mathcal{N}_{m,j,\mu}$. Zu $\mathcal{N}_{m,j,\mu}$ gehört jedenfalls folgende Menge: Wir wählen $C_1 = \rho$ mit $Z_m(\rho) = 0$. Sodann werden die c_k mit $k \not\equiv 1 \pmod m$ für $k > 1$ in Q beliebig spezialisiert und die Größen c_{km+1} aus $C^{[m]}_{km+1}(\rho, c_2, \dots, c_{km+1}) = = 0$ rekursiv bestimmt. Denn (nach Hilfssatz 4b)) gilt dann $0 = C^{[m]}_{m+1}(\rho, c_2, \dots, c_m) = \rho^{m-1} m c_{m+1} \tilde{Q}_{m,1}(\rho, c_2, \dots, c_m)$, da ρ primitive m-te Einheitswurzel ist, somit

$$c_{m+1} = -\frac{1}{m} \rho \tilde{Q}_{m,1}(\rho, c_2, \dots, c_m).$$

Also rekursiv

$$c_{km+1} = -\frac{1}{m} \rho \tilde{Q}_{m,k}(\rho, c_2, \dots, c_{km}),$$

wenn c_{jm+1} für $1 \leq l < k$ schon aus $C^{[m]}_{lm+1} = 0$ bestimmt sind. Somit folgt $\phi^{(0,\dots,0)}(\rho, c_2, \dots, c_k, c_{jm+\mu}) = 0$ für alle Familien rationaler Zahlen $(c_2, \dots, c_k, \dots, c_{jm+\mu})$ mit $k \not\equiv 1 \pmod m$ für $k > 1$. Wir ordnen nun das Polynom $\phi^{(0,\dots,0)}$ nach Monomen $C_2^{k_2} \dots C_{jm+\mu}^{k_{jm+\mu}}$:

$$\phi^{(0,\dots,0)} = \sum_{(k_1,\dots,k_{jm+\mu})} \theta_{(k_1,\dots,k_{jm+\mu})}(C_1) C_2^{k_2} \dots C_{jm+\mu}^{k_{k_{jm+\mu}}}.$$

Da $\phi^{(0,\dots,0)}(\rho, c_2, \dots, c_k, \dots, c_{jm+\mu}) = 0$ für alle Familien $(c_2, \dots, c_k, \dots \dots, c_{jm+\mu})$, so folgt auch für Unbestimmte $C_2, \dots, C_{jm+\mu}$ $\phi^{(0,\dots,0)}(\rho, C_2, \dots, C_k, \dots, C_{jm+\mu}) = 0$, also $\theta_{(k_2,\dots,k_{jm+\mu})}(\rho) = 0$ für alle $(k_2, \dots, k_{jm+\mu})$. Da $\theta_{(k_1,\dots,k_{jm+1})}$ rationale Koeffizienten hat, so folgt $Z_m(C_1) | \theta_{(k_2,\dots,k_{jm+\mu})}(C_1)$, somit $\phi^{(0,\dots,0)} = Z_m(C_1) \cdot \tilde{\phi}^{(0,\dots,0)}$. Wenn aber umgekehrt in der Entwicklung von $Q(C)$ $\Phi^{(0,\dots,0)}$ durch $Z_m(C_1)$

teilbar ist, so verschwindet wegen $(\rho^{m-1})^{\alpha_0}(1+\rho^m+\dots)^{\alpha_1}\dots(1+ +\rho^{jm}+\dots)^{\alpha_j}=\frac{1}{\rho}\alpha_0 m^{\alpha_1+\dots+\alpha_j}\neq 0$ $Q(C)$ auf $\mathcal{N}_{m,j,\mu}$, gehört also zu $\mathcal{P}_{m,j,\mu}$.

Wir beweisen nun Satz 2a). Es seien $A(C)$, $B(C)$ zwei Polynome in $\mathbb{Q}[C_1,\dots,C_{jm+\mu}]$, deren Prudukt zu $\mathcal{P}_{m,j,\mu}$ gehört. Es sei

$$\left(C_1^{m-1}\right)^{\alpha_0}(1+C_1^m+\dots)^{\alpha_1}\dots(1+C_1^{mj}+\dots)A(C)=$$
$$=\sum_{\nu_1+\dots+\nu_j\geq 1}\phi^{(\nu_1,\dots,\nu_j)}\left(C_{m+1}^{[m]}\right)^{\nu_1}\dots\left(C_{jm+1}^{[m]}\right)^{\nu_j}+\phi^{(0,\dots,0)}$$

bzw.

$$\left(C_1^{m-1}\right)^{\beta_0}(1+C_1^m+\dots)^{\beta_1}\dots(1+C_1^{mj}+\dots)B(C)=$$
$$=\sum_{\nu_1+\dots+\nu_j\geq 1}\Psi^{(\nu_1,\dots,\nu_j)}\left(C_{m+1}^{[m]}\right)^{\nu_1}\dots\left(C_{jm+1}^{[m]}\right)^{\nu_j}+\Psi^{(0,\dots,0)}$$

die Entwicklung von $A(C)$ bzw. $B(C)$ gemäß Hilfssatz 6 a). Durch Multiplizieren der linken Seiten und der rechten Seiten gewinnen wir die Entwiclung von $A(C)\cdot B(C)$, also

$$\left(C_1^{m-1}\right)^{\alpha_0+\beta_0}(1+C_1^m+\dots)^{\alpha_1+\beta_1}\dots(1+C_1^{mj}+\dots)A(C)\cdot B(C)=$$
$$=\sum_{\nu_1+\dots+\nu_j\geq 1}\theta^{(\nu_1,\dots,\nu_j)}\left(C_{m+1}^{[m]}\right)^{\nu_1}\dots\left(C_{jm+1}^{[m]}\right)^{\nu_j}+\theta^{(0,\dots,0)},$$

wobei $\theta^{(0,\dots,0)}=\Phi^{(0,\dots,0)}\cdot\Psi^{(0,\dots,0)}$ gilt. Da $A\cdot B\in\mathcal{P}_{m,j,\mu}$, so gilt nach Satz 2 b): $Z_m(C_1)|\theta^{(0,\dots,0)}$ also $Z_m(C_1)|\Phi^{(0,\dots,0)}$ oder $Z_m(C_1)|\Psi^{(0,\dots,0)}$, also nach Satz 2 b) $A\in\mathcal{P}_{m,j,\mu}$ oder $B\in\mathcal{P}_{m,j,\mu}$, was zu beweisen war.

Nun zum Beweis von Satz 1. Aus Hilfssatz 5 schließen wir, daß die Polynome $C_{jm+\mu}^{[m]}$, $2\leq\mu\leq m$, auf $\mathcal{N}_{m,j,\mu}$ verschwinden, also in $\mathcal{P}_{m,j,\mu}$ liegen. Demgemäß hat nach Satz 2 b) die Entwicklung von $C_{jm+\mu}^{[m]}$ nach den $C_{km+1}^{[m]}$, $1\leq k\leq j$, die Form (1) die Polynome $\phi_{m,j,\mu}^{(\nu_1,\dots,\nu_j)}$ haben nach Hilfssatz 6 c) ganzzahlige Koeffizienten, und da $Z_m(C_1)$ den höchsten Koeffizienten 1 besitzt, so liegen auch die Koeffizienten von $\tilde{\phi}_{m,j,\mu}^{(0,\dots,0)}$ in $\mathbb{Z}$. Satz 1 b) folgt unmittelbar aus Hilfssatz 6 b).

Um Satz 1 c) zu beweisen, betrachten wir eine Potenzreihe der Form $F(x)=C_1x+\sum_{j\geq 1}C_{jm+1}x^{jm+1}$, deren Koeffzienten $C_1,C_{m+1},\dots$ über $\mathbb{Q}$ unabhängige Unbestimmte sind während $c_k=0$ für $k>1$, $k\not\equiv 1 \pmod m$. Nach Hilfssatz 3 hat dann $F^m(x)$ die Gestalt $F^m(x)=C_1^m x+$

$+\sum\limits_{j\geq 1} C^{[m]}_{jm+1}x^{jm+1}$ also $C^{[m]}_1 = 0$ für > 1, $l \not\equiv 1 \pmod m$ und nach Hilfssatz 4 b) gilt: $C^{[m]}_{jm+1} = C_1^{m-1}(1+C_1^{jm}+\dots+C_1^{(m-1)jm})C_{jm+1} + \tilde{Q}_{m,j}(C_1,0,\dots,C_{m+1},\dots,0)$. Die Relationen (1) lauten hier ($2 \leq \mu \leq j$) $0 = \sum\limits_{\nu_1,\dots,\nu_j} \phi^{(\nu_1,\dots,\nu_j)}_{m,j,\mu}(C_1,0,\dots,0)(C^{[m]}_{m+1})^{\nu_1}\dots(C^{[m]}_{jm+1})^{\nu_j}$.

Nehmen wir an, es sei für einen Multiindex $(k_1,\dots,k_j)$ $\phi^{(k_1,\dots,k_j)}_{m,j,\mu}(C_1,0\dots,0) \neq 0$, und es sei dies schon der höchste mit dieser Eigenschaft. Setzen wir dann die spezialisierten Ausdrücke für $C^{[m]}_{km+1}$ in die vorstehende Relation ein, so erhalten wir eine nichttriviale algebraische Relation für die Unbestimmten $C_1, C_{m+1},\dots,C_{jm+1}$, da wir einen höchsten Term $\neq 0$, nämlich $(C_1^{m-1})^{k_1+\dots+k_j}(1+C_1^m+\dots)^{k_1}\dots(1+C_1^{jm}+\dots)^{k_j}\phi^{(k_1,\dots,k_j)}(C_1,0,\dots,0)C^{k_1}_{m+1}\dots C^{k_j}_{jm+1}$ finden. Das ist aber unmöglich, somit muß $\phi^{(\nu_1,\dots,\nu_j)}_{m,j,\mu}(C_1,0,\dots,0) = 0$ sein für alle Multiindices $(\nu_1,\dots,\nu_j)$. Den elementaren Beweis für Satz 1 d) überlassen wir dem Leser. $\Diamond$

Aus Satz 1 läßt sich eine Reihe weiterer Relationen für die Koeffizienten der m-ten Iterierten herleiten, deren Beweis durch einfache Eliminationen erfolgt. Es gilt etwa (mit den Voraussetzungen und Notationen wie bisher)

Satz 3. a) *Es gibt für $2 \leq \lambda,\ \mu \leq m,\ \lambda \neq \mu$ Polynome $A^{(\lambda)}_{m,j,\lambda,\mu} \neq 0$ in $C_1,\dots,C_m$ und Polynome $D^{(\nu_1,\dots,\nu_j)}_{m,j,\lambda,\mu}$ und $\tilde{D}^{(0,\dots,0)}_{m,j,\lambda,\mu}$ in C_1 und C_k mit $k \not\equiv 1 \pmod m$ für $k > 1$, alle über $\mathbb{Z}$, sodaß gilt*

$$\begin{aligned}
&A^{(\lambda)}_{m,j,\lambda,\mu}\cdot C^{[m]}_{jm+\lambda} - A^{(\mu)}_{m,j,\lambda,\mu}\cdot C^{[m]}_{jm+\mu} = \\
(6)\qquad &= \sum_{\nu_1+\dots+\nu_{j-1}\geq 1} D^{(\nu_1,\dots,\nu_{j-1})}_{m,j,\lambda,\mu}\cdot\left(C^{[m]}_{m+1}\right)^{\nu_1}\dots \\
&\dots\left(C^{[m]}_{(j-1)m+1}\right)^{\nu_{j-1}} + Z_m(C_1)\cdot\tilde{D}^{(0,\dots,0)}_{m,j,\lambda,\mu},
\end{aligned}$$

wobei C_{jm+k}, $2 \leq k \leq m$, nur in $\tilde{D}^{(0,\dots,0)}_{m,j,\lambda,\mu}$ auftreten können. Dies bedeutet also, daß die Differenz auf der linken Seite schon in dem von $Z_m(C_1)$ und $C^{[m]}_{lm+1}$, $2 \leq l \leq j-1$ erzeugten Ideal liegt.

b) *Ist insbesondere $j = 1$, so gilt speziell ($2 \leq \mu \leq m$):*

$$\begin{aligned}
&\left(C_1^{m-1}\right)^{\alpha_0(m,\mu)}\left(1+C_1^m+\dots+C_1^{(m-1)m}\right)^{\alpha_1(m,\mu)}\cdot C^{[m]}_{m+\mu} = \\
(7)\qquad &= p_{m,\mu}(C_1,C_2,\dots,C_m)C^{[m]}_{m+1} + q_{m,\mu}(C_1,\dots,C_{m+\mu})\cdot Z_m(C_1),
\end{aligned}$$

wobei $p_{m,\mu}$, $q_{m,\mu}$ Polynome über $\mathbb{Z}$ sind und in $q_{m,\mu}$ C_{m+1} nicht auftritt.

2. Potenzreihen, deren Multiplikator eine primitive m-te Einheitswurzel ist

Wir kommen nun zum Spezialfall der Reihen $F(x) = \rho x + c_2 x^2 + + \dots$, deren Multiplikator ρ eine primitive m-te Einheitswurzel ist. Es ist wieder zweckmäßig, die allgemeine Reihe $\dot{F}(x) = \rho x + C_2 x^2 + \dots + + C_k x^k + \dots$ mit Multiplikator ρ einzuführen, bei der $C_2, C_3, \dots$ über $\mathbb{C}$ unabhängige Unbestimmte sind. Die Koeffizienten ihrer m-ten Iterierten $\dot{F}^{[m]}(x)$ sind gegeben durch

$$C_k^{[m]}(\rho, C_2, \dots, C_k) \in \mathbb{Z}(\rho)\,[C_2, \dots, C_k]\,,$$

die wir kurz mit $\dot{C}_k^{[m]}$ bezeichnen. Da $Z_m(\rho) = 0$, so ergibt die Relation (1)

$$\dot{C}_{jm+\mu}^{[m]} = \rho^{\alpha_0} \frac{1}{m^{\alpha_0}} \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_j \geq 1} \dot{\Phi}_{jm+\mu}^{[m]} (\dot{C}_{m+1}^{[m]})^{\nu_1} \dots (C_{jm+1}^{[m]})^{\nu_j}, \tag{8}$$

wobei

$$\dot{\Phi}_{m,j,\mu}^{(\nu_1,\dots,\nu_j)} = \Phi_{m,j,\mu}^{(\nu_1,\dots,\nu_j)}(\rho, C_2 \dots)$$

und

$$\dot{C}_{km+1}^{[m]} = \frac{1}{m} C_{k+1} + Q_{m,k}(\rho, C_2, \dots, C_{km}). \tag{9}$$

Analog zu den Sätzen 1 und 2 gilt nun ($j \geq 1$, $2 \leq \mu \leq m$)

Satz 4. a) *Das von $\dot{C}_{m+1}^{[m]}, \dots, \dot{C}_{jm+1}^{[m]}$, in $\mathbb{Z}(\rho)[C_2, \dots, C_{jm+\mu}]$ erzeugte Ideal ist ein Primideal $\dot{\mathcal{P}}_{m,j,\mu}$.*

b) *In Analogie zu* (1) *gilt* (8), *wobei $\dot{\Phi}_{m,j,\mu}^{(\nu_1,\dots,\nu_j)}$ Polynome in den C_k, $2 \leq k \leq jm$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}\left[\rho, \frac{1}{m}\right]$ sind mit $k \not\equiv 1 \pmod{m}$. Somit hängt $\dot{C}_{jm+\mu}^{[m]}$ nicht von $C_{jm+2}, \dots, C_{jm+\mu}$ ab. Das Polynom $\dot{C}_{jm+\mu}^{[m]}$ liegt also im Ideal $\dot{\mathcal{P}}_{m,j,\mu}$.*

c) *Die Darstellung* (8) *von $\dot{C}_{jm+\mu}^{[m]}$ ist eindeutig bestimmt.*

Den **Beweis** von Satz 4 können wir kurz fassen, da viele Einzelheiten wie beim Beweis von Satz 1 und Satz 2 und sogar technisch einfacher zu führen sind. Insbesondere folgt (8) unmittelbar aus (1). Zum Beweis von Satz 4 a) benötigen wir Modifikationen von Hilfssatz 6 und Satz 2 b), nämlich Hilfssatz 7 und Hilfssatz 8.

Hilfssatz 7. a) *Es sei $P(C)$ ein Polynom $\mathbb{C}[C_2,\dots,C_{jm+\mu}]$. Dann gibt es Polynome $\dot{\Phi}^{(\nu_1,\dots,\nu_j)}$ in C_k, $2\le k\le jm+\mu$ mit $k\not\equiv 1\ (\operatorname{mod} m)$ sodaß*

$$P(C)=\sum_{\nu_1+\dots+\nu_j\ge 0}\dot{\Phi}^{(\nu_1,\dots,\nu_j)}(\dot{C}^{[m]}_{m+1})^{\nu_1}\dots\left(\dot{C}^{[m]}_{jm+1}\right)^{\nu_j}.$$

b) *Diese Darstellung („Entwicklung von $P(C)$ nach $(\dot{C}^{[m]}_{m+1}),\dots$ $\dots,(\dot{C}^{[m]}_{jm+1})$") ist durch $P(C)$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Der Beweis ist ähnlich wie der Beweis von Hilfssatz 6, auf Grund der Formel (9). $\Diamond$

Hilfssatz 8. *Das Polynom $P(C)\in\mathbb{Q}(\rho)[C_2,\dots,C_{jm+\mu}]$ liegt genau dann im Ideal $\dot{\mathcal{P}}_{m,j,\mu}$, wenn in seiner Entwicklung nach $\dot{C}^{[m]}_{m+1},\dots$ $\dots,\dot{C}^{[m]}_{jm+1}$ $\dot{\Phi}^{(0,\dots,0)}$ gilt.*

Beweis. Ähnlich wie beim Beweis von Satz 2b) sieht man, daß $P(C)\in$ $\in\dot{\mathcal{P}}_{m,j,\mu}$ die Gleichung $\dot{\Phi}^{(0,\dots,0)}=0$ auf der Menge der gemeinsamen Nullstellen (in $\mathbb{C}^{jm+\mu}$) von $\dot{C}^{[m]}_{m+1},\dots,\dot{C}^{[m]}_{jm+1}$, impliziert. In der Menge dieser Nullstellen findet man (mittels (9)) eine Teilmenge, bei der die Koordinaten c_ν für $\nu\not\equiv 1\ (\operatorname{mod} m)$ $(\nu>1)$ beliebig gewählt werden können. Somit gilt für alle Familien $c=(c_\nu,\nu>1,\nu\not\equiv 1(\operatorname{mod} m))$ komplexer Zahlen $\dot{\Phi}^{(0,\dots,0)}(c)=0$, also $\dot{\Phi}^{(0,\dots,0)}=0$ identisch. $\Diamond$

Es bleibt jetzt noch Satz 4 a) zu beweisen. Es seien $A(C)$, $B(C)$ zwei Polynomen in $\mathbb{Q}(\rho)(C_2,\dots,C_{jm+\mu})$ deren Produkt in $\dot{\mathcal{P}}_{m,j,\mu}$ liegt. Wir benutzen die Entwicklungen

$$A(C)=\sum_{\nu_1+\dots+\nu_j\ge 0}\dot{\Phi}^{(\nu_1,\dots,\nu_j)}\left(\dot{C}^{[m]}_{m+1}\right)^{\nu_1},\dots,\left(\dot{C}^{[m]}_{jm+1}\right)^{\nu_j},$$

$$B(C)=\sum_{\nu_1+\dots+\nu_j\ge 0}\dot{\Phi}^{(\nu_1,\dots,\nu_j)}\left(\dot{C}^{[m]}_{m+1}\right)^{\nu_1},\dots,\left(\dot{C}^{[m]}_{jm+1}\right)^{\nu_j}.$$

Wegen der Eindeutigkeit dieser Entwicklungen hat $A(C)\cdot B(C)$ eine solche, in der der von den $\dot{C}^{[m]}_{km+1}$ freie Term $\dot{\Phi}^{(0,\dots,0)}\dot{\Psi}^{(0,\dots,0)}$ ist. Nach Hilfssatz 8 gilt $\dot{\Phi}^{(0,\dots,0)}\cdot\dot{\Psi}^{(0,\dots,0)}=0$ was für ein Polynom über $\mathbb{Q}(\rho)$ $\dot{\Phi}^{(0,\dots,0)}=0$ oder $\dot{\Psi}^{(0,\dots,0)}=0$ bedeutet; also $A\in\dot{\mathcal{P}}_{m,j,\mu}$ oder $B\in\dot{\mathcal{P}}_{m,j,\mu}$. Auch die Relationen (6) und (7) in Satz 3 vereinfachen sich nun, da die mit $Z_m(C_1)$ multiplizierten Ausdrücke verschwinden. Eine gesonderte Formulierung erübrigt sich. Wir haben nur den Spezialfall $(2\le\mu\le m)$ $\dot{C}^{[m]}_{m+\mu}=p_{m+\mu}(C_2,\dots,C_m)\cdot\dot{C}^{[m]}_{m+1}$ hervor, mit $p_{m+\mu}\in$ $\in\mathbb{Z}\left(\rho,\frac{1}{m}\right)[C_2,\dots,C_m]$. $\Diamond$

3. Die Koeffizienten der Iterierten mit negativen Exponenten. Relationen für Bellsche Polynome

Die in Satz 1 aufgestellten Relationen (1) für die Koeffizienten der natürlichen Iterierten F^m einer formalen Reihe $F(x) = \rho x + c_2x^2 + + \dots, \rho \neq 0$, lassen sich in etwas modifizierter Form auch für die Koeffizienten von F^{-n} $(n \geq 1)$ übertragen. (Dabei ist F^{-n} als Element der Gruppe Γ zu verstehen.) Um diese Übertragung, die auf zwei Arten möglich ist, durchzuführen, benötigen wir den

Hilfssatz 9. *Es sei $\hat{F}(x) = C_1x + C_2x^2 + \dots$ die allgemeine formale Reihe über $\mathbb{C}$. Die inverse Reihe sei $\hat{F}^{-1}(x) = \overline{C}_1x + \overline{C}_2x^2 + \dots$. Dann gilt*

(i) $\overline{C}_1 = C_1^{-1}$.

(ii) *Für $l \geq 2$ sind die Koeffizienten $\overline{C}_r$ Polynome über $\mathbb{Z}$ in $\overline{C}_1 = = C_1^{-1}, C_2, \dots, C_r$, und es gilt genauer*

$$\begin{aligned}\overline{C}_r &= -C_1^{-(r+1)}C_r + S_r(\overline{C}_1, C_2, \dots, C_{r-1}) = \\ &= -C_1^{-(r+1)}\overline{S}_r(\overline{C}_1, C_2, \dots, C_r)\end{aligned} \tag{10}$$

mit Polynomen S_r, $\overline{S}_r$ über $\mathbb{Z}$.

(iii) *Für die Koeffizienten der Inversen $F^{-1}(x) = \overline{c}_1x + \overline{c}_2x^2 + + \dots$ einer Reihe $F(x) = \rho x + c_2x^2 + \dots$ aus Γ gilt $\overline{c}_1 = \rho^{-1}$, $\overline{c}_r = = \rho^{-(r+1)}\overline{S}_r(\rho^{-1}, c_2, \dots, c_r)$, $r \geq 2$.*

(iv) *Im Polynom $\overline{C}_r$ in $\overline{C}_1, C_2, \dots, C_r$ (für $r \geq 2$) gibt es keine nur von $\overline{C}_1$ abhängigen Terme und kein Absolutglied.*

(v) *Ist $F(x) = \rho x + \sum_{r \geq r_0} c_rx^r \in \Gamma$ mit $r_0 \geq 2$, so gilt auch*

$$F^{-1}(x) = \rho^{-1}x + \sum_{r \geq r_0} \overline{c}_rx^r \in \Gamma.$$

Beweis. (ii) Aus $\hat{F}^{-1}(x) \circ \hat{F}(x) = x$ folgt $\overline{C}_1 \cdot C_1 = 1, \overline{C}_1 = C_1^{-1}$, und für $r \geq 2$

$$0 = \overline{C}_1C_r + \overline{C}_rC_1^r + R_r(C_1, \dots, C_{r-1}, \overline{C}_1, \dots, \overline{C}_{r-1}), \tag{11}$$

mit einem Polynom R_r über $\mathbb{Z}$. Wir finden z.B. $\overline{C}_2 = -C_1^{-3}C_2$, $\overline{C}_3 = = -C_1^{-4}(C_3 - 2C_1^{-1}C_2)$. Es sei nun $r > 2$ und (11) schon als richtig erkannt für $\overline{C}_2, \dots, \overline{C}_{r-1}$. Für R_r erhalten wir aus $\hat{F}^{-1}(x) \circ \hat{F}(x) = x$ und mittels der Induktionsannahme

$$(12)\qquad \begin{aligned} R_r &= \sum_{k=2}^{r-1} \overline{C}_k \cdot \sum_{j_1+\cdots+j_k=r} C_{j_1}\ldots C_{jk} = \\ &= -\sum_{k=2}^{r-1} C_1^{-(k+1)} \overline{S}_k(C_1^{-1}, C_2, \ldots, C_k) \sum_{j_1+j_k=r} C_{j_1}\ldots C_{j_k} \end{aligned}$$

In jedem Summanden der k-ten inneren Summe kann der Faktor C_1 höchstens (k-1)-mal vorkommen, denn $j_1 = j_2 = \cdots = j_k = 1$ impliziert $C_{j_1}\ldots C_{j_k} = C_1^k$, was nicht mit x^r multipliziert sein kann. Dabei ist R_r ein Polynom in $C_1^{-1}, C_2, \ldots, C_r$, aus dem sich außerdem C_1^{-2} herausheben läßt. Somit ergibt sich aus (11)

$$\begin{aligned} \overline{C}_r &= -C_1^{-(r+1)} C_r - C_1^{-r} R_r = \\ &= -C_1^{-(r+1)} C_r + C_1^{-(r+1)} T_r(\overline{C}_1, C_2, \ldots, C_{r-1}) = \\ &= -C_1^{(r+1)} \overline{S}_r(C_1, C_2, \ldots, C_r) \end{aligned}$$

mit Polynomen T_r und $\overline{S}_r$ über $\mathbb{Z}$.

(iii) ist evident.

(iv) Wir untersuchen nochmals die Darstellung (12) von R_r. In jedem Summanden $C_{j_1}, \ldots, C_{j_k}$ muß wenigstens ein Faktor C_i mit $i > 1$ auftreten, da ja $j_1 = \cdots = j_k = 1$ wegen $j_1 + \cdots + j_k = k < r$ nicht sein kann. Damit aus (11) folgt leicht die Behautung.

(v) Es sei $F \in \Gamma$, $F(x) = \rho x + \sum\limits_{r \geq r_0} c_r x^r$ mit einem $r_0 \geq 2$. Nach den bisher bewiesenen Aussagen des Hilfssatzes erhalten wir für $2 \leq$ $\leq r < r_0$

$$\overline{c}_r = \rho^{-(r+1)} \overline{S}_r(\rho^{-1} 0, \ldots, 0),$$

somit nach (iv) $\overline{c}_r = 0$, $2 \leq r < r_0$. $\Diamond$

Es sei nun $m \geq 2$. Da $\hat{F}^{-m} = (\hat{F}^{-1})^m$, so finden wir nach Hilfssatz 4 für

$$\hat{F}^{-m}(x) = \sum_{k \geq 1} C_k^{[-m]} x^k \cdot C_k^{[-m]} =$$

$$= \overline{C}^{m-1} \left(1 + \overline{C}^{k-1} + \cdots + \overline{C}_1^{(m-1)(k-1)}\right) \cdot \overline{C}_k + Q_{k,m}(\overline{C}_1, \ldots, \overline{C}_{k-1}).$$

Substituieren wir darin (10), $\overline{C}_r = -C_1^{-(r+1)} C_r + S_r(\overline{C}_1, C_2, \ldots, C_{r-1})$, so finden wir für $k \geq 2$, $m \geq 2$:

$$C_k^{-[m]} = \overline{C}_1^{m+k}\left(1+\overline{C}_1^{k-1}+\cdots+\overline{C}_1^{(m-1)(k-1)}\right)C_k+ \tag{13}$$
$$+\overline{Q}_{m,k}(\overline{C}_1, C_2, \ldots, C_{k-1}),$$

mit einem Polynom $\overline{Q}_{m,k}$ über $\mathbb{Z}$.

(13) zeigt, daß die Koeffizienten $C_k^{[-m]}$ als Polynome in $\overline{C}_1, C_2, \ldots$ $\ldots, C_k$ eine Struktur aufweisen, die eng verwandt ist der Struktur der Polynome $C_k^{[1]}$ in $C_1, C_2, \ldots, C_k$ (s. Hilfssatz 4). Aus (13) und daraus, daß die $C_k^{[-m]}$ die Koeffzienten der natürlichen Iterierten $(\hat{F}^{-1})^m$ sind, ergibt sich, daß sich die Beweismethode von Satz 1 und Satz 2 sinngemäß auf die vorliegende Situation übertragen läßt. Wir erhalten daher

Satz 5. *Es sei* $\hat{F}(x) = \sum\limits_{\nu=1} C_\nu x^\nu$, $\hat{F}^{-m}(x) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} C_\nu^{[-m]} x^\nu$ *wobei die* C_ν *über* $\mathbb{C}$ *unabhängige Unbestimmte sind. Es sei* $j \geq 1$, $2 \leq \mu \leq m$. *Dann gilt:*

a) *Es gibt nicht negative ganze Zahlen* $\beta_0(m,j,\mu), \ldots, \beta_j(m,j,\mu)$ *und Polynome* $\Delta_{m,j,\mu}^{(\nu_1,\ldots,\nu_j)}$ *und* $\tilde{\Delta}_{m,j,\mu}^{(0,\ldots,0)}$ *über* $\mathbb{Z}$ *in* $\overline{C}_1$ *und* C_k, $k \not\equiv 1 \pmod m$, $2 \leq k \leq jm+\mu$, *derart daß*

$$\overline{C}_1^{\beta_0(m,j,\mu)}\left(1+\overline{C}_1^{m}+\cdots+\overline{C}_1^{(m-1)m}\right)^{\beta_1(m,j,\mu)}\cdot$$
$$\cdot\left(1+\overline{C}_1^{jm}+\cdots+\overline{C}_1^{(m-1)jm}\right)^{\beta_j(m,j,\mu)}\cdot C_{jm+\mu}^{[-m]} =$$
$$= \sum_{\nu_1+\cdots+\nu_j\geq 1} \Delta_{m,j,\mu}^{(\nu_1,\ldots,\nu_j)}\left(C_{m+1}^{[-m]}\right)^{\nu_1}\ldots(C_{jm+1}^{[-m]})^{\nu_j} + Z_m(\overline{C}_1)\tilde{\Delta}_{m,j,\mu}^{(0,\ldots,0)},$$

wobei die C_k *mit* $jm+2 \leq k \leq jm+\mu$ *nur in* $\tilde{\Delta}_{m,j,\mu}^{(0,\ldots,0)}$ *auftreten können.*

b) *In der Darstellung* (14) *sind die Quotienten* $\overline{C}_1^{-\beta_0(m,j,\mu)}(1+$ $+\overline{C}_1^{m}\ldots)^{-\beta_1(m,j,\mu)}(1+\overline{C}_1^{jm}+\ldots)^{-\beta_j(m,j,\mu)}\Delta_{m,j,\mu}^{(\nu_1,\ldots,\nu_j)}$ *durch* $C_{jm+\mu}^{[-m]}$ *eindeutig bestimmt.*

c) *Es sei* $\mathcal{Q}_{m,j,\mu}$ *das Ideal aller Polynome in* $\mathbb{Q}[\overline{C}_1, C_2, \ldots$ $\ldots, C_{jm+\mu}]$, *die auf den gemeinsamen Nullstellen von* $Z_m(\overline{C}_1)$, $C_{m+1}^{[-m]}, \ldots, C_{jm+1}^{[-m]}$ *verschwinden. Dann ist* $\mathcal{Q}_{m,j,\mu}$ *ein Primideal.*

Auch die Charakterisierung der Polynome in $\mathcal{Q}_{m,j,\mu}$ mittels einer Entwicklung nach $C_{m+1}^{[-m]}, \ldots, C_{jm+1}^{[-m]}$ läßt sich analog zu (2) beweisen. Die Spezialisierung von $\overline{C}_1$ auf eine primitive m-te Einheitswurzel führt zu einer Vereinfachung von Satz 5.

Nach (13) existiert eine kleinste nicht negative ganze Zahl δ_{m+k} sodaß $D_k^{[m]} := C_1^{\delta_{m+k}} C_k^{[-m]}$ $(k \geq 2)$ ein Polynom in $C_1, C_2, \ldots, C_k$

über $\mathbb{Z}$ ist. Für dieses Polynom $D_k^{[m]}$ lassen sich Entwicklungen der Form (1) nach $Z_m(C_1)$, $C_{m+1}^{[-m]}, \ldots, C_{jm+1}^{[-m]}$ ableiten. Nach Hilfssatz 5 und Hilfssatz 9, (iv) gilt nämlich: Gilt $Z_m(\rho) = 0$, $C_{m+1}^{[-m]}(\rho, c) = 0, \ldots$ $\ldots, C_{jm+1}^{[-m]}(\rho, c) = 0$ für die Koeffzienten von $F(x) = \rho x + c_2 x^2 + \ldots$, so auch $C_l^{[m]}(\rho, c) = 0$ für $2 \leq l \leq (j+1)m$, somit auch $C_l^{[-m]}(\rho^{-1}, c) =$ $= 0$ für $2 \leq l \leq (j+1)m$. Dies bedeutet, zusammen mit (13), daß die Polynome $D_{jm+\mu}^{[m]}$ $(1 \leq \mu \leq m)$ im Ideal $\mathcal{P}_{m,j,\mu}$ liegen, und daß daher Entwiclungen der Form (2) für sie gelten. Wir fassen zusammen:

Satz 6. *Es mögen die Voraussetzungen und Bezeichnungen von Satz* 5 *gelten; es sei* $m \geq 2$, $j \geq 1$, $1 \leq \mu \leq m$. *Dann gibt es nicht negative ganze Zahlen* $\gamma_0(m, j, \mu), \ldots, \gamma_j(m, j, \mu)$ *und Polynome* $B_{m,j,\mu}^{(\nu_1,\ldots,\nu_j)}$ *und* $\tilde{B}_{m,j,\mu}^{(0,\ldots,0)}$ *über* $\mathbb{Z}$ *in* C_1, C_k *mit* $k \not\equiv 1 \pmod m$, $2 \leq k \leq jm + \mu$, *sodaß*

$$C_1^{\gamma_0(m,j,\mu)} \left(1 + C_1^m + \cdots + C_1^{(m-1)m}\right)^{\gamma_1(m,j,\mu)} \cdots$$

$$\cdots \left(1 + C_1^{jm} + \cdots + C_1^{(m-1)jm}\right)^{\gamma_j(m,j,\mu)} C_{m,j,\mu}^{[-m]} =$$

$$= \sum_{\nu_1+\cdots+\nu_j \geq 1} B_{m,j,\mu}^{(\nu_1,\ldots,\nu_j)} \left(C_{m+1}^{[-m]}\right)^{\nu_1} \cdots \left(C_{jm+1}^{[-m]}\right)^{\nu_j} + Z_m(C_1) \tilde{B}_{m,j,\mu}^{(0,\ldots,0)},$$

wobei die C_k *mit* $2 \leq k \leq (j+1)m$ *nur in* $\tilde{B}_{m,j,\mu}^{(0,\ldots,0)}$ *auftreten können.* (Es sei hervorgehoben, daß diese Relationen auch für den Index $jm+1$ interessant sind).

Wir schließen mit einem Hinweis auf Identitäten für Bellsche Polynome, die aus Relationen (1) folgen. Für die Definition und bekannte Eigenschaften dieser Polynome verweisen wir auf [5], pp. 133-140. Wir nehmen in (1) $m = 2$ (— die α_k hängen auch von j ab —):

$$C_1^{\alpha_0} \left(1 + C_1^2\right)^{\alpha_1} \cdots \left(1 + C_1^{2j}\right)^{\alpha_j} C_{2j+2}^{[2]} = \tag{15}$$

$$= \sum_{\nu_1+\cdots+\nu_j \geq 1} \Phi_{2,j,2}^{(\nu_1,\ldots,\nu_\mu)} (C_1, C_2, C_4, \ldots, C_{2j}) \left(C_3^{[2]}\right)^{\nu_1} \cdots \left(C_{2j+1}^{[2]}\right)^{\nu_j} +$$

$$+ (1 + C_1) \tilde{\Phi}_{2,j,2}^{(0,\ldots,0)} (C_1, C_2, C_4, \ldots, C_{2j+2}).$$

Die Darstellung der Koeffzienten der zweiten Iterierten $\hat{F}^2$ durch Bellsche Polynome lautet

$$C_\nu^{[2]} = \frac{1}{\nu!} \sum_{1 \le \lambda \le \nu} \lambda! C_\lambda B_{\nu,\lambda}(C_1, 2!C_2, \dots, (\nu - \lambda + 1)! C_{\nu-\lambda+1}). \tag{16}$$

Setzt man die Ausdrücke (16) (— Linearformen in den Bellschen Polynomen —) in (15) ein, so erhält man den ersten Typus von Identitäten, die wir hier erwähnen. Unter der Substitution $C_1 \to -1$ ergeben sich etwas einfachere Relationen zwischen den Polynomen $B_{\nu,\lambda}(-1, u_2, \dots \dots, u_{\nu-\lambda+1})$. Sodann betrachten wir $\hat{F}^3(x)$, und beachten, daß einerseits $\hat{F}^3(x) = \hat{F}^2 \circ \hat{F}(x)$, andererseits $\hat{F}^3(x) = \hat{F} \circ \hat{F}^2(x)$. Aus der ersten Gleichung ergibt sich für die Koeffizienten von $\hat{F}^3$:

$$\begin{aligned} C_n^{[3]} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{1 \le \lambda \le k \le n} \lambda! k! C_\lambda B_{n,k}(C_1, 2!C_2, \dots \\ \dots, (n-k+1)! C_{n-k+1}) \cdot B_{k,\lambda}(C_1, 2!C_2, \dots, (k-\lambda+1)! C_{k-\lambda+1}), \end{aligned} \tag{17}$$

also Bilinearformen in den Bellschen Polynomcn. Aus (1) ergibt sich mit $m = 3$, $\mu = 2, 3$:

$$\begin{aligned} C_{3j+\mu}^{[3]} = \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_j \ge 1} \Phi_{3,j,\mu}^{(\nu_1,\dots,\nu_\mu)}(C_1, C_2, C_3, C_5, C_6 \dots)(C_4^{[3]})^{\nu_1} \dots \\ \dots (C_{3j+1}^{[3]})^{\nu_j} + (C_1^2 + C_1 + 1) \tilde{\Phi}_{3,j,\mu}^{(0,\dots,0)}(C_1, C_2, C_3, C_5, C_6 \dots). \end{aligned} \tag{18}$$

Setzt man (17) in (18) ein, so ergibt sich ein weiterer Typus von Identitäten für Bellsche Polynome, die sich vereinfachen, wenn für C_1 eine primitive dritte Einheitswurzel substituiert wird.

Schließlich verwenden wir $\hat{F}^3 = \hat{F} \circ \hat{F}^2$, und erhalten

$$\begin{aligned} C_n^{[3]} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{1 \le k \le n} k! C_k B_{n,k} \Bigg(\sum_{1 \le \lambda \le l} \lambda! C_\lambda B_{l,\lambda}(C_1), \dots \\ \dots, \sum_{1 \le \lambda \le n-k+l} \lambda! C_\lambda B_{n-k+1,\lambda}(C_1, \dots) \Bigg), \end{aligned} \tag{19}$$

wobei also Bellsche Polynome in Bellsche Polynome substituiert werden. Substituiert man (19) in (18), so erhält man einen dritten Typus von Identitäten für diese Polynome.

Literatur

[1] SCHWAIGER, J. und REICH, L.: Über die Lösungen der Funktionalgieichungen $F \circ T = T \circ G$ für formale Potenzreihen, *Aequationes Math.* **20** (1980), 224–243.

[2] SCHWAIGER, J.: Roots of power series in one variable, *Aequationes Math.* **29** (1985), 40–43.

[3] REICH, L.: Über analytische und fraktionelle Iteration formal-biholomorpher Abbildungen und Differenzenrechnung, *Publicationes Math. (Debrecen)* **27** (1980), 49–60.

[4] HENRICI, P.: Applied and computational Complex Analysis, vol. 1 John Wiley & Sons, New York, 1974.

[5] COMTET, L.: Advanced Combinatorics, Revised and enlarged edition. D. Reidel, Dordrecht, 1974.