Mathematica Pannonica
21/1 (2010), 89–113

INVERSION IN MINKOWSKISCHER GEOMETRIE

Nikolina **Kovačević**

Faculty of Mining, Geology and Petroleum Engineering, University of Zagreb, 10 000 Zagreb, Pierottijeva 6, Croatia

Vlasta **Szirovicza**

Faculty of Civil Engineering, University of Zagreb, 10 000 Zagreb, Kačićeva 26, Croatia

Received: March 2009

MSC 2000: 51 A 05, 51 M 15

Keywords: Pseudo-Euclidean plane, circular curves, inversion, equiform conic.

Abstract: A Minkowski (pseudo-Euclidean) plane $\mathbb{M}^2$ is a real affine plane $\mathbb{A}^2$ where the metric is introduced by an absolute $\{f, F_1, F_2\}$, where f is the line at infinity of $\mathbb{A}^2 \subset \mathbb{P}^2$ and F_1, F_2 are two real points lying on it.

In this paper a notion of curve circularity is introduced in $\mathbb{M}^2$. As a novelty, the equiform classification of conics is given by synthetic method on the base of the analytic background. Also, we define various types of inversions in $\mathbb{M}^2$ and investigate some of their properties.

1. Einleitung

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung der Abhandlungen [3], [7], [12], in denen die wichtigste aller ebenen quadratischen Transformationen, die Inversion, in verschiedenen projektiv-metrischen Ebenen studiert wird. Da die projektive Geometrie erweitert sich zur affinen, diese affin-metrische Geometrie durch Auszeichnung einer uneigentlichen Absolutgeraden, bzw.

E-mail addresses: nkovacev@rgn.hr, szvlasta@grad.hr

der Orthogonalitätsinvolution auf ihr, werden wir in dieser Arbeit die Minkowskische Geometrie durch projektive Verhältnisse einführen. Dieser Zutritt ist in Geometrie von F. Klein nach den Arbeiten von A. Cayley eingeführt.

Eine reelle affine Ebene $\mathbb{A}^2 \subset \mathbb{P}^2$, welche über eine *Absolutfigur* $\mathcal{F}_{\mathbb{M}} \equiv \{f, F_1, F_2\}$ – bestehend aus einer Geraden f als *Absolutgeraden* und zwei reelle verschiedene Punkten $F_1, F_2 \in f$ als *Absolutpunkte* – metrisiert wird, heißt die *Minkowskische* (pseudo-Euklidische) *Ebene* $\mathbb{M}^2$. Die Geometrie dieser Ebene wurde auf verschiedene Weise in [1], [6], [9], [10] gegeben.

1.1. Analytische Hilfsmittel

Unser zukunftiges Ziel ist einige neue Ergebnisse zur ebenen Kurventheorie in der Minkowskischen Geometrie vorzustellen. Um dieses Ziel zu erreichen, werden wir einen Koordinatensymplex einführen. Wir benutzen hauptsächlich die projektive Koordinaten nach dem Vorbild [5].

Sei eine projektive Ebene $\mathbb{P}^2$ mit einem bestimmten *Koordinatensymplex* $\mathcal{A} \equiv \{(A_i), A, (b^i), b\}$ mit normierenden Einheitspunkt $A(\mathbf{a})$ und Einheitsgeraden $b(\overline{b})$ gegeben. Mit $A_0(\mathbf{a}_0), A_1(\mathbf{a}_1), A_2(\mathbf{a}_2)$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ bezeichnen wir die Basisvektoren des zugehörigen dreidimensionalen reellen Vektorraumes $V = V^3(\mathbb{R})$, die die Ecken dem Koordinatensymplex $\mathcal{A}$ darstellen.

Diese Basis bestimmt in einem zu V dualen Vektorraum $\mathcal{V}$ eine duale Basis $b^0(\overline{b}^0), b^1(\overline{b}^1), b^2(\overline{b}^2)$, d.h. die Formen mit $\mathbf{a}_i\overline{b}^j = \delta_i^j$, $\overline{b} = \overline{b}^0 + \overline{b}^1 + \overline{b}^2$, wobei $i, j = 0, 1, 2$ und δ_i^j das Kronecker-Symbol ist. Weiters bezeichnen wir mit $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots$ die Elementen von V und nennen ihre Proportionalitätsklassen $\big($z.B. $(\mathbf{x}) \sim (c\mathbf{x})\big)$ die *Punkte*. Mit $\overline{u}, \overline{v}, \ldots$ bezeichnen wir die Elementen von $\mathcal{V}$ und nennen die entsprechenden Klassen die *Geraden*. Nullvektor und Nullform sind ausgeschlossen. Der Wert der linearen Funktional $\overline{u}$ auf dem Vektor $\mathbf{x}$ wird mit $\mathbf{x}\overline{u}$ bezeichnet. Ein Punkt $X(x^i\mathbf{a}_i)$ ist *inzident* zu einer Geraden $u(\overline{b}^j u_j)$ im Zeichnen $X|u$, genau dann, wenn $0 = \mathbf{x}\overline{u} = x^i u_j$ nach der Koordinatendarstellungen mit Einstein–Schouten Indexkonventionen gilt.

Man kann eine *Produktoperation* (wie das Vektorprodukt), $\wedge$-*Produkt*, von V auf $\mathcal{V}$, bzw. von $\mathcal{V}$ auf V, auf die nächste Weise definieren

$$(1.1) \qquad (x^i) \wedge (y^i) := (u_i), \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} u_0 &= x^1y^2 - x^2y^1, \\ u_1 &= x^2y^0 - x^0y^2, \\ u_2 &= x^0y^1 - x^1y^0. \end{aligned}$$

Der bekannte Entwicklungssatz gibt zwei Varianten; für jeden $X(\mathbf{x})$, $Y(\mathbf{y}) \in V(\mathbf{x} \neq \mathbf{y})$ und jede $u(\overline{u}), v(\overline{v}) \in \mathcal{V}$.

Hilfssatz 1. *Es gelten die Formeln:*

1) $(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \wedge \overline{u} = (\mathbf{x}\overline{u})\mathbf{y} - (\mathbf{y}\overline{u})\mathbf{x} := \mathbf{z}$,
2) $(\overline{u} \wedge \overline{v}) \wedge \mathbf{x} = \overline{v}(\mathbf{x}\overline{u}) - \overline{u}(\mathbf{x}\overline{v}) := \overline{w}$.

1.2. Minkowskische Ebene

Die Absolutfigur $\mathcal{F}_{\mathbb{M}}$ der Ebene $\mathbb{M}^2$ wird wie üblich durch

$$(1.2) \qquad f\Big(\overline{f} \sim (1,0,0)^T\Big) \quad F_1\Big(\mathbf{f}_1 \sim (0,1,1)\Big), \quad F_2\Big(\mathbf{f}_2 \sim (0,-1,1)\Big)$$

gegeben. Hier T weist auf die Transponierte (Spaltenmatrix) hin, wie es für Geraden üblich ist. Die reelle Gerade f wird als die *Absolutgerade* und die Punkte F_1, F_2 werden als *die Absolutpunkte* von $\mathbb{M}^2$ genannt. Die feste hyperbolische Punktinvolution $\mathcal{I}_{\mathbb{M}}$, die auf der Absolutgeraden f mit

$$(1.3) \qquad \mathcal{I}_{\mathbb{M}} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}, \quad X(0, x^1, x^2) \mapsto Y(0, x^2, x^1)$$

gegeben ist, nennen wir *Orthogonalitätsinvolution* der Minkowskischen Ebene. Die Doppelpunkte dieser Involution sind die Absolutpunkte F_1, F_2.

Ein Punkt wird als *ein isotroper Punkt* genannt, wenn der auf der Absolutgeraden f liegt, d.h. jeder isotroper Punkt hat die Koordinaten $J(0, j^1, j^2)$, $j^1, j^2 \in \mathbb{R}$. Jede Gerade, welche einen der Absolutpunkte enthält, wird als *eine isotrope Gerade* bezeichnet und hat die Form $i(u, 1, \pm 1)^T$, $u \in \mathbb{R}$. Zwei Geraden heißen *parallel*, wenn sie denselben isotropen Punkt besitzen.

Die Verbindungsgeraden jedes nicht isotropen Punktes $X(1, x^1, x^2)$ bilden mit dem Absolutpunktepaar *ein isotropes Geradenpaar* $\{u_1, u_2\}$.

Zwei nicht isotropen Geraden $u(u_i)$, $v(v_i)$ heißen *orthogonal*, in Zeichnen $u \perp v$, wenn sie mit dem isotropen Geradenpaar ihres Schnittpunktes harmonische Quadrupel bilden, d.h. $u \perp v \iff v_2u_2 - v_1u_1 = 0$.

Alle Automorphien von $\mathbb{M}^2$, die die Absolutfigur $\{f, F_1, F_2\}$ festhalten, bilden eine 4-parametrige Gruppe, *die allgemeine Minkowskische (pseudoeuklidische) Ähnlichkeitsgruppe* $\mathcal{G}_4$, die die Untergruppe aller projektiven Transformationen ist. Die zugehörige Geometrie $\{\mathbb{M}^2, \mathcal{G}_4\}$ heißt *die allgemeine Minkowskische Ähnlichkeitsgeometrie*, [9]. Sie enthält die *eigentlichen Minkowskischen Ähnlichkeiten* die für sich eine Gruppe $\mathcal{G}_4^+$ bilden, die geometrisch dadurch gekennzeichnet sind, daß die Absolutpunkten F_1, F_2 einzeln festlassen und darum gleichsinnige (die Orientierung erhaltende) Affinitäten sind.

2. Der Zirkularitätsgrad einer Kurve

Jede zirkuläre Kurve der euklidischen Ebene $\mathbb{E}^2$ enthält immer das imaginäre Absolutpunktepaar[1]. Die zirkuläre Kurve der isotropen Ebene enthält den einzigen absoluten Punkt, [11]. Im pseudoeuklidischen Fall werden wir die Zirkularität einer Kurve auf die nächste Weise definieren:

Definition 1. Eine algebraische Kurve n-ter Ordnung heißt *zirkulär* in der Ebene $\mathbb{M}^2$, wenn sie wenigstens einen der Absolutpunkte F_1, F_2 enthält.

Besitzt eine algebraische Kurve n-ter Ordnung $\mathcal{K}_n$ in $\mathbb{M}^2$ den Absolutpunkt F_1 als einen r-fachen $(r \geq 0)$ Schnittpunkt und den Absolutpunkt F_2 als einen t-fachen $(t \geq 0)$ Schnittpunkt mit der Absolutgeraden f (im algebraischen Sinne), so ist $\mathcal{K}_n$ vom *Zirkularitätsgrad* m bezeichnet, wobei $m = r + t$ ist, d.h. $\mathcal{K}_n$ wird als *m-zirkuläre Kurve* vom *Zirkularitätstyp* (r, t) bezeichnet. Die Kurven die keine Absolutpunkte enthalten, werden als 0-zirkuläre bezeichnet. Offensichtlich, jede Kurve n-ter Ordnung ist immer vom Zirkularitätsgrad $m \leq n$.

Definition 2. Eine algebraische Kurve $\mathcal{K}_n$ n-ter Ordnung heißt *vollständig zirkulär* in der Ebene $\mathbb{M}^2$, wenn die Absolutpunkte die einzige Schnittpunkte der Kurve mit der Absolutgeraden f sind.

Also, eine algebraische Kurve n-ter Ordnung ist vollständig zirkular, wenn ihr Zirkularitätsgrad maximal ist, d.h. $m = n$. Für $n = 1$ finden wir die isotropen Geraden als die einzigen vollständig zirkulären Kurven 1. Ordnung.

[1]Da einer Kegelschnitt und eine Gerade immer zwei Schnittpunkte (eventuell Doppelpunkt) über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ haben, benutzen wir komplexe Elemente nur als Sprechweise, im algebraischen Sinne.

Da die Transformationen aus $\mathcal{G}_4$ die Absolutfigur als ganzes festhalten, sind die eingeführten Begriffe des Zirkularitätsgrades und Zirkularitätstypes einer Kurve $\mathcal{G}_4$ *invariant*.

2.1. Klassifizierung der Kegelschnitte in Minkowskiebene

Die Klassifikation der Kurven 2. Ordnung in der pseudoeuklidischen Bewegungsgeometrie, also in $\mathbb{M}^2$, wurde bereits von N. Reweryk [8] durchgeführt, wobei ihre Normalformen beschrieben wurden. Reweryk unterschied 10 Typen der nichtzerfallenden und 12 Typen der zerfallenden Kegelschnitte[2]. Dieses Ergebnis können wir in folgender Tabelle zusammenfassen, wobei die KS-e nach dem Zirkularitätsgrad und Zirkularitätstyp auch präsentiert werden. Nach der obenen Definition wird man leicht ersehen daß die Kegelschnitte vom $0, 1$ oder 2 Zirkularitätsgrad sein können. In letzter Spalte der Tabelle ist die Darstellung der KS-e in projektiver Sicht gegeben.

Ersichtlich gibt es in $\mathbb{M}^2$ zwei Typen der vollständig zirkulären Kegelschnitte die wir in weiteren spezielle Parabeln vom Zirkularitätstyp $(2, 0)$ und Zykeln vom Zirkularitätstyp $(1, 1)$ nennen.

2.2. Äquiforme Klassifizierung der Kegelschnitte in $\mathbb{M}^2$

Als neuere Initiative wollen wir die Kegelschnitte weiters auf dem Grund der Orthogonalität $\mathcal{I}_{\mathbb{M}}$, als des wichtigsten Kennzeichens der äquiformen Geometrie von $\mathbb{M}^2$, klassifizieren. Zunächst führen wir die elementare Kurventheorie auch in der Minkowskiebene analog zur euklidischen Kurventheorie auf der Grundlage zu einem Kegelschnitt zugeordneten Polarität ein.

Gegeben sei ein Kegelschnitt $\mathcal{A}(a_{ij})$ mit der Gleichnug

$$x^i a_{ij} x^j = 0, \quad a_{ij} = a_{ji} \tag{2.1}$$

[2]Auch eine Klassifikation gab F. Mészáros in [4] durch Dualisierung der Absolutfigur zu $\{f_1, f_2, F\}$.

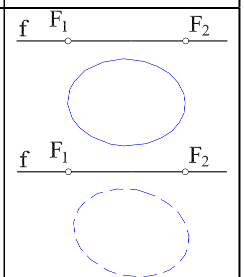
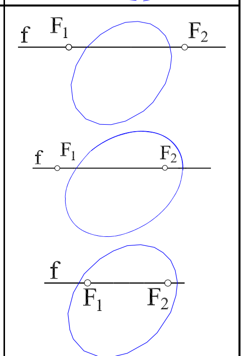
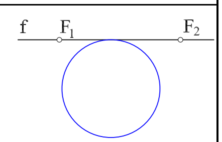
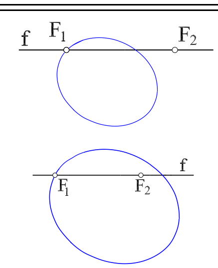
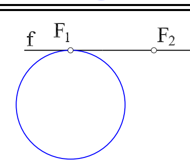
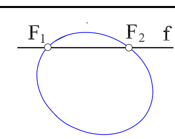
Zirk. Grad	*Kegellschnitt Zirk. Typ*	*Typ*	
0	Ellipse	reelle imaginäre	
	Hyperbel	1. Art 2. Art 3. Art	
	Parabel		
1	Spezielle Hyperbel (1, 0)	1. Art 2. Art	
2	Spezielle Parabel (2, 0)		
	Zykel (1, 1)		

Tabelle 1

in $\mathbb{M}^2$. Damit kann man eine zugehörige involutorische projektive Korrelation mit

$$\pi_{\mathcal{A}} : V \ni \mathbf{q}(q^i) \to \pi_{\mathcal{A}}(\mathbf{q}) := \overline{q}(q_j) \in \mathcal{V}, \quad (q_j) \sim (q^i a_{ij}) \tag{2.2}$$

erklären, die wir *Polarität* nennen, d.h. für jeden Punkt Q schließen wir eine Gerade q an, ihre *Polare* in bezug auf den Kegelschnitt $\mathcal{A}$. Der Punkt Q wird dann der *Pol* der Polaren q gennant. Natürlich gilt es $\mathbf{x}\overline{y} = \mathbf{y}\overline{x}$ für beliebige $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Ist ein beliebiger Punkt inzident mit ihrer Polare, liegt er auf dem Kegelschnitt $\mathcal{A}$. Zwei Punkte $\mathbf{x}(x^i), \mathbf{y}(y^i)$ sind in bezug auf den Kegelschnitt $\mathcal{A}(a_{ij})$ *konjugiert*, wenn es $x^i a_{ij} y^j = 0$, d.h. $\mathbf{x}\pi_{\mathcal{A}}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}\overline{y} = 0$ gilt.

Weiters, definiert man den, zum Kegelschnitt $\mathcal{A}(a_{ij})$ gehörigen *Mittelpunkt* $F(\mathbf{f})$, als der Pol

$$\mathbf{f}(f^i) := \pi_{\mathcal{A}}(\overline{f}) \tag{2.3}$$

der Absolutgeraden $f(\overline{f})$ bei der zu (2.2) inversen Abbildung (b^{ij}) für die $a_{ij}b^{jk} = \delta_i^k$ gilt. Die Polaren der isotropen Punkten werden *Durchmesser* genannt, d.h. der Mittelpunkt F des KS-es ist der Geradenscheitel ihren Durchmessern. Zwei Durchmesser sind *konjugiert*, wenn sie auf den Polaren der zwei konjugierten isotropen Punkte in bezug auf den Kegelschnitt $\mathcal{A}(a_{ij})$ liegen. Da das Absolutpunktepaar der Minkowskiebene reell ist, kann man einige neue Begriffe in $\mathbb{M}^2$ einführen. In dieser Arbeit werden wir die Polare eines Absolutpunktes F_i, $\mathbf{f}_i(f_i^j)$, bezüglich gegebenes Kegelschnittes $\mathcal{A}(a_{ij})$ die *Absolutpolare* $\overline{f_i}$ nennen und

$$\pi_{\mathcal{A}}(\mathbf{f}_i) := \overline{f_i}, \quad i = 1, 2 \tag{2.4}$$

mit Linienkoordinaten $f_i^j a_{jk} =: f_{ik}$ bezeichnen.

Jeder nicht zerfallender Kegelschnitt $\mathcal{A}(a_{ij})$ induziert auf der Absolutgeraden f eine, aus konjugierten Punkten gebildete, Punktinvolution $\phi_{\mathcal{A}}$,

$$\phi_{\mathcal{A}} : \mathbf{x} \mapsto \Big(\pi_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) \wedge f\Big) := \phi_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in V, \quad \mathbf{x}\overline{f} = 0 \tag{2.5}$$

wobei $\pi_{\mathcal{A}}$ mit (2.2) eindeutig bestimmt ist. Die Doppelpunkte dieser Punktinvolution sind die isotrope Punkte des KS-es $\mathcal{A}$. Betrachten wir nur die Kegelschnitte $\mathcal{A}$, deren induzierte Punktinvolution $\phi_{\mathcal{A}}$ in Verbindung mit der Orthogonalitätsinvolution $\mathcal{I}_{\mathbb{M}}$ (1.3) ist. Stimmen die Doppelpunkte der Punktinvolution $\phi_{\mathcal{A}}$ mit $\mathcal{I}_{\mathbb{M}}$, oder sind sie in Harmonität, unterscheiden wir zwei Fälle.

Offensichtlich ist im ersten Fall der gegebene Kegelschnitt $\mathcal{A}(a_{ij})$ ein *Zykel* $\mathcal{Z}$, der sogenannte Minkowskischer (pseudoeuklidischer) Kreis, und $\phi_{\mathcal{A}} \equiv \mathcal{I}_{\mathbb{M}}$. Die Gleichnug des Zykels (aus $F_1, F_2 \in \mathcal{A}$)

$$a_{00}x^0x^0 + a_{11}x^1x^1 - a_{11}x^2x^2 + 2a_{01}x^0x^1 + 2a_{02}x^0x^2 = 0$$

mit dem Mittelpunkt $F(a_{00}, a_{01}, a_{02})$ geht durch die Translation (wenn $a_{11} \neq 0$) in Zykel

$$\mathcal{Z} \ldots \alpha x^0x^0 - x^1x^1 + x^2x^2 = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \tag{2.6}$$

mit dem Mittelpunkt $F(1, 0, 0)$ über.

Im zweiten Fall bilden die Absolutpunkte F_1, F_2 mit den Doppelpunkten der $\phi_{\mathcal{A}}$ eine harmonische Quadrupel. Für die Doppelverhältnis $(F_1, F_2, Y, Z) = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\gamma}{\delta}$ muß man $Y = \alpha F_1 + \beta F_2$, $Z = \gamma F_1 + \delta F_2$ aufschreiben und lösen. Von $y^1 = \alpha - \beta$, $y^2 = \alpha + \beta$ und $z^1 = \gamma - \delta$, $z^2 = \gamma + \delta$ kommen die Lösungen

$$\alpha = \frac{y^1 + y^2}{2}, \quad \beta = -\frac{y^1 - y^2}{2}, \quad \gamma = \frac{z^1 + z^2}{2}, \quad \delta = -\frac{z^1 - z^2}{2}.$$

Die Harmonität $(F_1, F_2, Y, Z) = -1$ impliziert für verschiedene Punkte

$$-1 = \frac{y^2 - y^1}{y^1 + y^2} \cdot \frac{z^2 - z^1}{z^1 + z^2},$$

woraus folgt $2(y^2z^2 - y^1z^1) = 0$. Weiterhin, da die Punkte Y, Z angeschlossene durch $\phi_{\mathcal{A}}$ sind, bzw. $Z = \phi_{\mathcal{A}}(Y)$, bekommen wir, wegen der Symmetrie, aus

$$y^1a_{11}y^1 + 2y^1a_{12}y^2 + y^2a_{22}y^2 = 0$$

die Gleichheit $a_{22} = a_{11}$. Daraus lautet die allgemeine Gleichung dieses Kegelschnittes $\mathcal{A}(a_{ij})$ mit dem Mittelpunkt $F(a_{00}, a_{10}, a_{20})$

$$a_{00}x^0x^0 + a_{11}x^1x^1 + a_{11}x^2x^2 + 2a_{01}x^0x^1 + 2a_{02}x^0x^2 + 2a_{12}x^1x^2 = 0.$$

Mittels der Translation erreichen wir die Gleichnug dieses KS-es mit dem Mittelpunkt $F(1, 0, 0)$

$$a_{00}x^0x^0 + a_{11}x^1x^1 + a_{11}x^2x^2 + 2a_{12}x^1x^2 = 0. \tag{2.7}$$

Im allgemeinen, werden wir die zwei Unterfälle unterscheiden; ob für die Koeffizienten der zugehörigen symmetrischen Bilinearform der induzierten Punktinvolution $\phi_{\mathcal{A}}$ $\Delta > 0$ oder $\Delta < 0$ gilt, wobei $\Delta = (a_{11}^2 - a_{12}^2)$.

Im ersten Fall handelt sich um eine Hyperbel 2. Art. Die Gleichung dieser besonderen Hyperbel, wenn $a_{11} = 0$, ist mit

$$\mathcal{H} \ldots \alpha x^0 x^0 + 2x^1 x^2 = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \tag{2.8}$$

gegeben.

Im zweiten Fall sind die Absolutpunkte F_1, F_2 ein Punktepaar der elliptischen Involution. Der gegebene Kegelschnitt ist eine Ellipse die durch Gleichung, wenn $a_{12} = 0$,

$$\mathcal{E} \ldots \alpha x^0 x^0 + x^1 x^1 + x^2 x^2 = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}^- \tag{2.9}$$

gegeben ist.

Wir fassen diese Erzeugungen in der folgenden Definition mit Hilfe der durch (2.5) und (1.3) bestimmten Punktinvolutionen zusammen:

Definition 3. Ein Kegelschnitt $\mathcal{A}(a_{ij})$ wird als ein *gleichseitiger* (oder *glecihförmiger*) Kegelschnitt bezeichnet, wenn die zugehörige Punktinvolution $\phi_\mathcal{A}$ mit der Orthogonalitätsinvolution $\mathcal{I}_\mathbb{M}$ kommutiert, bzw. gilt es

$$\phi_A \circ \mathcal{I}_\mathbb{M} = \mathcal{I}_\mathbb{M} \circ \phi_\mathcal{A}.$$

Nach der Def. 3 erkennt man leicht aus obigen Betrachtungen, daß es in Minkowskischer Ebene drei Typen von gleichseitigen Kegelschnitten gibt[3]; *Zykeln*, *gleichseitige Hyperbeln* und *gleichseitige Ellipsen.* Weiters, aus (2.4) und (2.7) folgt auch

Satz 2. *Die Absolutpolaren der Absolutpunkten zu jedem gleichseitigen Kegelschnitt sind die isotrope Geraden, und umgekehrt.*

Bemerkung 1. Da der Begriff ein gleichseitiger oder ein gleichförmiger Kegelschnitt auch in der Analogie zur euklidischer Ebene ist, können wir nach [8] in einer metrischen Ebene den Begriff *die Achsen* eines Kegelschnittes in $\mathbb{M}^2$ einführen[4]. Dann bekommen wir auch eine besondere Eigenschaft den gleichseitigen Kegelschnitten: Die Achsen jeder gleichseitigen Ellipsen sind von der gleichen Länge.

---

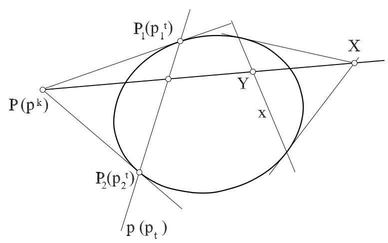
[3] Einige Beiträge zur ebenen Minkowskischen Geometrie gab auch H. Schaal in [10]. Er beobachtete nur die gleichseitigen Hyperbeln.

[4] N. Reweryk gab in [8] als die Normalform den Hyperbeln 2. Art nur die Normalform den gleichseitigen Hyperbeln.

3. Inversion in $\mathbb{M}^2$

3.1. Projective Punktinversion

Zunächst werden wir die allgemeine Formeln der projektiven Punktinversion bekommen. Das ermöglicht uns, eine metrische Ebene $\mathbb{M}^2$ in seiner Einbettungsebene $\mathbb{P}^2$ kennzuzeichnen und die Formeln in $\mathbb{M}^2$ herzuleiten.



Figur 2

Sei ein nicht entarteter Kegelschnitt $\mathcal{A}(a_{ij})$ und ein Punkt P, d.h.

$$\mathcal{A}\ldots \quad x^i a_{ij} x^j = 0, \quad P(\mathbf{p} \sim p^k \mathbf{a}_k), \tag{3.1}$$

in $\mathbb{P}^2$ gegeben. Wir definieren eine involutorische Abbildung, wobei die angeschlossene Punkte konjugiert bezüglich des Grundkegelschnittes $\mathcal{A}$ sind und dabei auf der Geraden eines Geradenbüschels mit dem Scheitel P liegen. Diese Abbildung wird als *allgemeine Inversion* genannt, [7]. Jede Gerade des Geradenbüschels (P) ist als Inversionsstrahl bezeichnet. Der Kegelschnitt $\mathcal{A}(a_{ij})$ und der Geradenscheitel P werden der *Grundkegelschnitt* und der *Inversionspol* genannt. Die Polare $p(p_l)$ von $P(p^k)$ wird nach (2.2) $(p_l) \sim (a_{lk}p^k)$ und die Geraden durch $P(p^k)$ sind $u(u_r)$ mit $p^r u_r = 0$.

Ein beliebiger Punkt $X(x^i) \neq P(p^k)$ hat seine Polare $x(x_j \sim a_{jk}x^k)$. Mit der Hilfe (1.1) definieren wir sein Inversionsbild $Y := X^{\mathcal{A}}$

$$X(x^i) \mapsto Y\Big(y^s \sim \big[(x^i) \wedge (p^j)\big] \wedge \big[(a_{lr}x^r)\big]\Big). \tag{3.2}$$

Nach Hilfssatz 1 erhalten wir:

$$X(\mathbf{x}) \mapsto Y\Big(\mathbf{y} \sim \big[(\mathbf{x} \wedge \mathbf{p}) \wedge \overline{x}\big] \sim \big[(\mathbf{x}\overline{x})\mathbf{p} - (\mathbf{p}\overline{x})\mathbf{x}\big]\Big), \quad \text{i.e.} \quad Y := X^{\mathcal{A}}$$

wobei $\overline{x} := \pi_{\mathcal{A}}(\mathbf{x})$ ist. Durch (2.2) bekommen wir die folgende Formen:

$$\begin{aligned} y^0 &\sim (x^i a_{ij} x^j)p^0 - (p^r a_{rs} x^s)x^0, \\ y^1 &\sim (x^i a_{ij} x^j)p^1 - (p^r a_{rs} x^s)x^1, \\ y^2 &\sim (x^i a_{ij} x^j)p^2 - (p^r a_{rs} x^s)x^2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Aus (3.3) folgt daß die Inversion eine involutorische biquadratische Abbildung mit gewissen Ausnahmepunkten ist. Die Polare p trägt eine von den konjugierten Punkten im Bezug auf Grundkegelschnitt $\mathcal{A}$ gebildete Punktinvolution, dessen Doppelpunkte mit $P_1(\mathbf{p}^1)$ und $P_2(\mathbf{p}^2)$ bezeichnet werden, [7].

Die drei Punkte (P, P_1, P_2) sind die *Grundpunkte* und ihre Verbindungsgeraden sind die *Grundgeraden* der Inversion. Die auf ihren Verbindungsgeraden liegenden Punkten sind die einzigen singulären Punkten der Inversion.

Aus (3.3) sieht man gleich, daß die Punkte des Grundkegelschnittes die einzigen festen Punkte der Transformation sind

$$X(\mathbf{x}) \in \mathcal{A}(a_{ij}), \quad x^i a_{ij} x^j = 0 \Longleftrightarrow Y(y^i) = X^{\mathcal{A}}, \quad y^i \sim x^i.$$

Andere bekannten Eigenschaften der Inversion kann man in [2], [7], [12] finden.

Bemerkung 2 (Euklidische Ebene $\mathbb{E}^2$)**.** Man bekommt aus (3.3), für Einheitskreis als Grundkegelschnitt der Inversion mit Zentrum $S(0,0) = P$, die übliche Gleichungen der euklidischen Kreisinversion.

Man kann aber eine Kreisinversion (Zykelinversion) in $\mathbb{E}^2$ mit einem idealen (unendlich fernen) Pol mit interessanten Eigenschaften auch definieren. Siehe unsere Ellipseninversionen in Abschnitt § 3.5.

3.2. Inversion in der Minkowskiebene

Weiters wird die Formel (3.3) für verschiedenen Typen der Inversion im $\mathbb{M}^2$ angewandt und die Bedingungen untersucht, um die zirkuläre Kegelschnitte des bestimmten Zirkularitätsgrades zu erreichen. Dabei ist die Betonung an die Erzeugung der vollständig zirkulären KS-e gegeben, d.h. spezielle Parabeln und Zykeln.

Definition 4. Eine quadratische Inversion welche die Absolutfigur $\mathcal{F}_{\mathbb{M}}$ von $\mathbb{M}^2$ als Ganze festhält, wird als eine *$\mathcal{M}$-Inversion der Minkowskischen Ebene* bezeichnet.

Aus der Tatsache daß die gleichseitigen Kegelschnitte die einzige Kegelschnitte sind, derer Konjugiertheit mit der Orthogonalitätsinvolution $\mathcal{I}_{\mathbb{M}}$ in Verbindung ist (Abschnitt § 2.2), folgt das der Grundkegelschnitt der Inversion ein gleichseitiger Kegelschnitt sein soll. Es gibt zwei Möglichkeiten beim Wahl der Lage des Inversionspoles P;

- Ist der Inversionspol P ein beliebiger isotroper Punkt wird die Absolutgerade f sich selbst als Inversionsstrahl zugeordnet. Es wird eine $\mathcal{M}$-Inversion.
- Anderseits, kann die Absolutgerade f zum Pol P, der der Mittelpunkt des Grundkegelschnittes ist, zugeordnet sein. Der entstehende Typ der Inversion ist keine $\mathcal{M}$-Inversion in unserem originalen Sinne.

Im folgenden werden drei Typen der Inversionen; *Zykelinversion*, *Hyperbelinversion* und *Ellipseninversion*, untersucht. Da die Parabel kein gleichseitiger Grundkegelschnitt ist, wird Parabelinversion nicht betrachtet.

Wie bekannt aus [7] und [2], und es von der Formel (3.3) auch folgt, entspricht jeder Geraden $v(v^i)$ ein Kegelschnitt $\mathcal{K}_2$ welcher durch die Grundpunkten P, P_1, P_2 und die Schnittpunkten G_1, G_2 der Geraden v mit Grundkegelschnitt $\mathcal{A}_2$, eindeutig bestimmt ist. Enthält v einen der Grundpunkte, zerfällt der erzeugte Kegelschnitt in die zwei Geraden, wobei eine die zugehörige Polare des Grundpunktes ist, und die andere durch die Schnittpunkte des $\mathcal{K}_2$ und v bestimmt ist, d.h. $G_1 \wedge G_2$. Ist die Absolutgerade f eine als Inversionsstrahl zugeordnete Gerade, stimmen die isotrope Punkte des erzeugten Kegelschnittes mit dem Inversionspol P und dem Inversionsbild des einzigen isotropen Punktes der Geraden v überein, [7], [2].

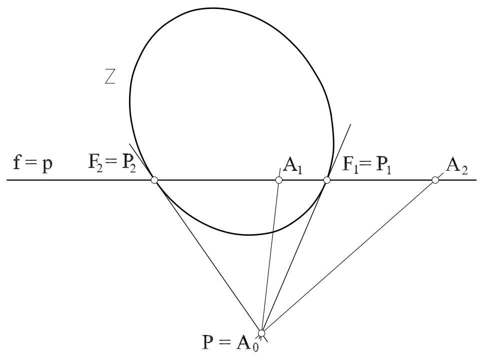
3.3. Zykelinversion in $\mathbb{M}^2$

Werden die Absolutpunkte durch eine Inversion einzeln fix bleiben, $(F_i \Longleftrightarrow F_i, i = 1, 2)$, sollen sie auf dem Grundkegelschnitt $\mathcal{A}$ liegen. Deswegen soll $\mathcal{A}$ ein Zykel sein und man kann nach (2.6) eine Einheitszykel als Grundkegellschnitt $\mathcal{Z}$ mit

$$\mathcal{Z} \ldots \quad \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = -z^0 z^0 + z^1 z^1 - z^2 z^2 = 0 \tag{3.4}$$

auswählen. Jedes durch Zykelinversion angeschlossene isotrope Punktepaar wird durch die Absolutpunkte harmonisch getrennt. Nach der Wahl des Poles P, gibt es zwei Typen der Zykelinversion:

Typ 1 – ***Zykelinversion zum Mittelpunkt.*** Der Inversionspol P stimmt mit dem Pol der Absolutgeraden in bezug auf den Grundkegelschnitt, d.h. mit dem Mittelpunkt F des Einheitszykel, überein (Fig. 3).



Figur 3

Aus (2.3) folgen die Koordinaten für den Pol $P(1,0,0)$. Die Inversionsformeln (3.3) gehen für den Grundkegelschnitt $\mathcal{Z}$ und Pol P in die nächsten Formen überein:

$$
\begin{aligned}
y^0 &\sim \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle\, 1 - (-1 \cdot x^0)x^0 = x^1x^1 - x^2x^2, \\
y^1 &\sim \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle\, 0 - (-1 \cdot x^0)x^1 = x^0x^1, \\
y^2 &\sim \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle\, 0 - (-1 \cdot x^0)x^2 = x^0x^2.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Im affinen Koordinaten bekommt man für $X(x,y) \mapsto Y(\widehat{x}, \widehat{y})$ die Gleichungen

$$\widehat{x} = \frac{x}{xx - yy}, \quad \widehat{y} = \frac{y}{xx - yy}$$

wobei $x = \frac{x^1}{x^0}$ und $y = \frac{x^2}{x^0}$. Die Absolutpunkte $F_1(0,1,1)$ und $F_2(0,-1,1)$, die Punkten der Asymptoten des Einheitszykels $\mathcal{Z}(a_{ij})$, stimmen mit der Grundpunkten P_1, P_2 überein.

Die Inversion, als eine involutorische Transformation, bildet eine Gerade

$$v \ldots y^0v_0 + y^1v_1 + y^2v_2 = 0 \tag{3.6}$$

mittels (3.5) in den Kegelschnitt $(x^1x^1 - x^2x^2)v_0 + x^0x^1v_1 + x^0x^0v_2 = = 0$ $(x^0 \neq 0)$ durch den Mittelpunkt $P(1,0,0)$ des Grundzykels $\mathcal{Z}$ ab. In affinen Koordinaten zeigt dieser Kegelschnitt

$$\left(x + \frac{v_1}{2v_0}\right)^2 - \left(y - \frac{v_2}{2v_0}\right)^2 = \frac{1}{4v_0v_0}(v_1v_1 - v_2v_2)$$

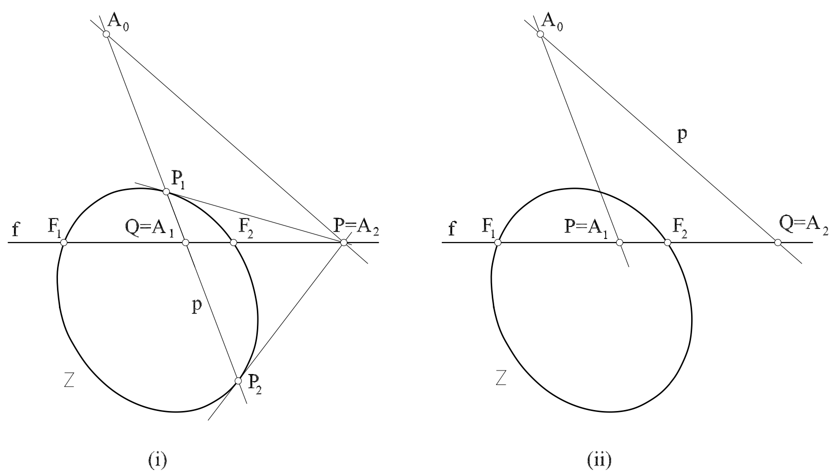
den Form eines Zykels von $\mathbb{M}^2$. Wenn $(v_1v_1 - v_2v_2) = 0$ gilt, ist v eine isotrope Gerade.

Satz 3. *Die Zykelinversion zum Mittelpunkt bildet jeden den Pol P nicht enthaltende Gerade in einen Zykel ab. Die Zykeln durch Inversionspol P verwandeln sich in die Geraden.*

Dieser Typ der Inversion ist ein Minkowskischer Analogon der euklidischen Inversion. Obwohl dieser Inversionstyp keine $\mathcal{M}$-Inversion nach unserer Def. 4 ist, ist es eine natürliche Erweiterung der euklidischen Inversion in Minkowskiebene, [1].

Typ 2 – *Zykelinversion zu einem Isotroperpunkt.* Der Pol P ist ein isotroper Punkt. Abhängig von den harmonischen Lagen der Absolutpunkten F_1, F_2 und der singulären Punkten der Transformation (der Pol P und der Punkt $Q := p \wedge f$) ist es möglich drei Untertypen zu unterscheiden.

2.1. Der Pol P ist ein beliebiger isotroper von den Absolutpunkten verschiedener Punkt. Ob der Grundzykel auf der Polaren p eine hyperbolische oder elliptische Involution induziert, unterscheiden wir zwei Fälle;



Figur 4

Eine elementare Rechnung bestimmt für den Pol $P(0, p^1, p^2)$ und Einheitszykel $\mathcal{Z}$ als Grundkegelschnitt die Abbildungsformeln

$$
\begin{aligned}
y^0 &\sim -p^1 x^0 x^1 + p^2 x^0 x^2, \\
y^1 &\sim -p^1(x^0x^0 + x^2x^2) + p^2 x^1 x^2, \\
y^2 &\sim -p^2(x^0x^0 - x^1x^1) - p^1 x^1 x^2.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Die Koordinaten des singulären Punktes Q sind in diesem Fall $Q(0, p^2, p^1)$. Wir können sofort für einen gewählten Position des Poles P die Formeln bekommen; z.B. ist der Pol P der Isotroperpunkt der y-Achse, bekommen wir aus (3.7) im ersten hyperbolischen Fall (Fig. 4 (i), $p^1=0$) die Gleichungen

$$X(x,y)\mapsto Y(\widehat{x},\widehat{y}):\quad \widehat{x}=x,\quad \widehat{y}=\frac{xx-1}{y}.$$

Dabei sind die Grundpunkte P_1, P_2 mit Koordinaten $(1,1,0)$ und $(1,-1,0)$ gegeben.

Im zweiten elliptischen Fall (Fig. 4 (ii), $p^2=0$) bekommen wir (P ist der Isotroperpunkt der x-Achse) die Gleichungen

$$X(x,y)\mapsto Y(\widehat{x},\widehat{y}):\quad \widehat{x}=\frac{yy+1}{x},\quad \widehat{y}=y.$$

Nach (3.7) kann man leicht die Bedingungen, um die zirkuläre Kegelschnitte des bestimmten Zirkularitätsgrad zu erreichen, untersuchen. Die Gerade (3.6) geht mittels (3.7) in den Kegelschnitt $\mathcal{K}_2$

$$\begin{aligned}&p^1\Big(v_1(x^0x^0+x^2x^2)+x^1(v_0x^0+v_2x^2)\Big)-\\&-p^2\Big(v_2(x^1x^1-x^0x^0)+x^2(v_0x^0+v^1x^1)\Big)=0.\end{aligned}$$

Für $p^1=0$ (wenn $v_0v_0-v_1v_1\neq 0$ und $v_2\neq 0$) bekommen wir eine *Hyperbel* die im affinen Koordinaten mit

$$xx+y\left(\frac{v_0+v_1x}{v_2}\right)=1$$

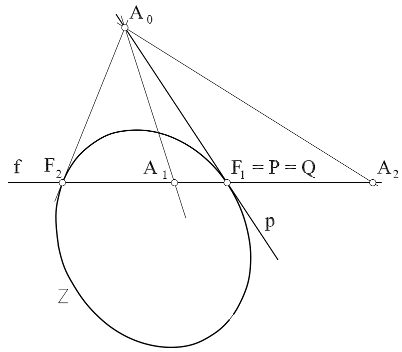
gegeben ist. Die erste Ausnahme ergibt sich, wenn v eine isotrope Gerade ist ($|v_1|=|v_2|=1$). Man erhält dann die Gleichung *einer spezieller Hyperbel 1. oder 2. Art*

$$xx+y(v_0\pm x)=1.$$

Die zweite Ausnahme ergibt sich, wenn v den Punkt $Q(0,1,0)$ enthaltende Gerade ist ($v_1=0$) und die beide isotrope Punkte des erzeugten KS-es stimmen mit dem Inversionspol P überein. Der erzeugte Kegelschnitt ist dann *eine Parabel* mit der Gleichung

$$y=\frac{v_2}{v_0}(1-xx).$$

2.2. Im speziellen Fall kann der isotrope Inversionspol P mit einer der Absolutpunkte (z.B. $P=F_1(0,1,1)$) übereinstimmen (Fig. 5). Damit stimmt seine Polare p mit der Absolutpolaren f_1 des Grundzykels $\mathcal{Z}$ über. Alle Grundpunkte fallen in den Inversionspol P ein.



Figur 5

Diesmal bekommen wir aus (3.7) für den Pol $P(0,1,1)$ die Formeln in nichthomogenen Koordinaten

$$X(x,y) \mapsto Y(\widehat{x},\widehat{y}): \quad \widehat{x} = \frac{-1+xy-yy}{y-x}, \quad \widehat{y} = \frac{-1+xx-xy}{y-x}.$$

Beim diesen Fall bildet sich jede Gerade v nach (3.7) ($p^1 = p^2 = 1$) in *eine spezielle Hyperbel* mit der Gleichung

$$(v_2x+v_1y)(y-x)+v_0(x+y)+v_1+v_2=0$$

ab. Enthält die Gerade v den Absolutpunkt F_2 ($v_1 = v_2$), bekommt man *ein Zykel* mit der Gleichung

$$\left(x-\frac{v_0}{2v_1}\right)^2 - \left(y+\frac{v_0}{2v_1}\right)^2 = 2v_1.$$

Abhängig von der Lage des Pols P zum Zykel $\mathcal{Z}$ können wir zusammenfassen:

Satz 4. *Gegeben sei eine $\mathcal{M}$-Inversion $\rho\{\mathcal{Z},P\}$ in $\mathbb{M}^2$; $\mathcal{Z}$ sei ein Grundzykel und P ein isotroper Inversionspol. Als Inversionsbild jeder beliebigen Geraden entsteht ein Kegelschnitt $\mathcal{K}_2$:*

(1) *Ist P ein von den Absolutpunkten verschiedener Isotroperpunkt, wird $\mathcal{K}_2$ eine der drei Hyperbelarten oder eine Parabel. Ist die anfängliche Gerade isotrop, wird $\mathcal{K}_2$ eine der zwei speziellen Hyperbelarten.*

(2) *Liegt der Inversionspol P auf dem Grundzykel $\mathcal{Z}$, wird $\mathcal{K}_2$ eine der zwei speziellen Hyperbelarten oder ein Zykel.*

Enthält die Gerade einen der Grundpunkten, zerfällt der erzeugte Kegelschnitt in zwei Geraden.

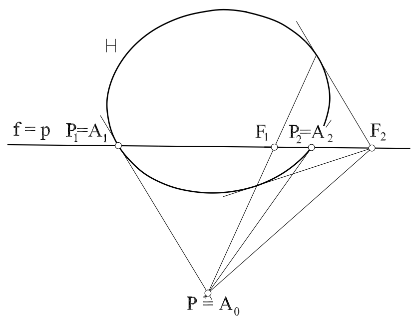
3.4. Hyperbelinversion in $\mathbb{M}^2$

Sind die Absolutpunkte des Grundkegelschnittes ein zugeordnetes Punktepaar einer hyperbolischen Involution, soll der Grundkegelschnitt (2.7) mit $a_{11} = 0$ eine gleichseitige Einheitshyperbel $\mathcal{H}$ sein

$$\mathcal{H} \ldots \langle z, z \rangle = -z^0 z^0 + 2z^1 z^2 = 0.$$

Nach der Wahl des Pols P entstehen zwei Grundtypen:

Typ 1 – *Hyperbelinversion zum Mittelpunkt.* Der Inversionspol P stimmt mit dem Mittelpunkt F von $\mathcal{H}$ überein (Fig. 6). Die Grundpunkte P_1, P_2 sind die isotrope Punkte von $\mathcal{H}$.



Figur 6

Das Koordinatensymplex ist gewählt, daß die Grundpunkte P_1, P_2 mit den Simplexecken A_1, A_2 übereinstimmen. Dann erhalten wir, für den Inversionspol $P(1,0,0)$ und für $\mathcal{H}$, die Formeln des Inversionsbildes $Y(y^i)$

$$\begin{aligned} y^0 &\sim 2x^1 x^2, \\ y^1 &\sim x^0 x^1, \\ y^2 &\sim x^0 x^2, \end{aligned} \tag{3.8}$$

woraus folgt

$$X(x,y) \mapsto Y(\widehat{x}, \widehat{y}) : \quad \widehat{x} = \frac{1}{2y}, \quad \widehat{y} = \frac{1}{2x}.$$

Zu einer Geraden $v(v_i)$ gehört ($v_0 \neq 0$) der Kegelschnitt

$$2v_0 x^1 x^2 + v_1 x^1 + v_2 x^2 = 0$$

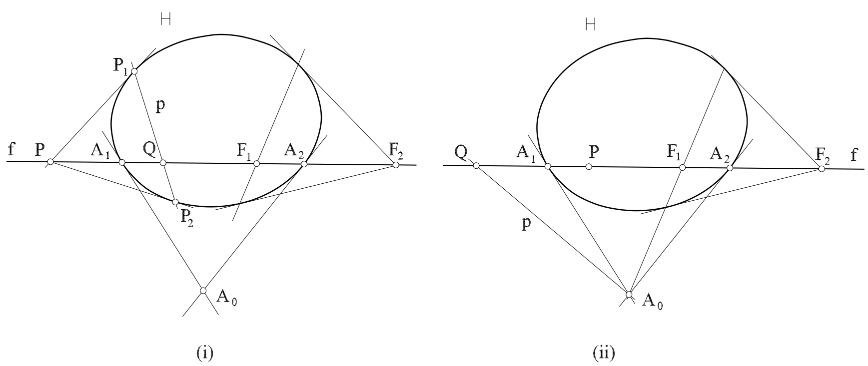
durch den Uhrsprung. Nach Def. 3 und (2.7) folgt, daß der erzeugte KS eine *gleichseitige Hyperbel* ist.

Satz 5. *Die Hyperbelinversion zum Mittelpunkt bildet eine Gerade in eine gleichseitige Hyperbel mit P_1, P_2 als isotropen Punkten des erzeugten KS-es ab.*

Enthält die Gerade einen der Grundpunkten, zerfällt der erzeugte Kegelschnitt in zwei Geraden.

Typ 2 – *Hyperbelinversion zu einem Isotroperpunkt.* Wir haben hier insgesamt fünf Untertypen abhängig von Lagen der Punkten F_1, F_2, P, Q.

2.1. Der Inversionspol $P(0, p^1, p^2)$ ist ein beliebiger isotroper, von den Absolutpunkten verschiedener, Punkt ($|p^1| \neq |p^2|$). Auch hier unterscheiden wir zwei Möglichkeiten, abhängig die auf der Polaren p induzierte Involution eliptisch oder hyperbolisch in bezug auf die Grundhyperbel ist.



Figur 7

Wählt man eine Einheitshyperbel $\mathcal{H}$ als Grundkegelschnitt, nehmen die homogene Koordinaten des Inversionsbildes $Y(y^i)$ (3.3) die Formen

$$
\begin{aligned}
y^0 &\sim -p^1x^0x^2 - p^2x^0x^1, \\
y^1 &\sim -p^1x^0x^0 + p^1x^1x^2 - p^2x^1x^1, \\
y^2 &\sim -p^2x^0x^0 + p^2x^1x^2 - p^1x^2x^2
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

über. Aus (3.9) ist ersichtlich, daß das Absolutpunktepaar ein zugeordnetes Punktepaar dieser Inversion ist.

Wenn der Pol P keiner auf der Grundhyperbel $\mathcal{H}$ liegender isotroper Punkt ($p^1p^2 \neq 0$) ist, wählt man für $p^1 = 1$. Hier kann p^2 positiv oder negativ sein.

(i) Ist $p^2 < 0$, wird die auf der Polaren p induzierte Involution in bezug auf die Grundhyperbel $\mathcal{H}$ hyperbolisch (Fig. 7 (i)). Für $Y(\widehat{x}, \widehat{y})$

entstehen die Gleichungen

$$\widehat{x} = \frac{1 - xy + p^2xx}{y + p^2x}, \quad \widehat{y} = \frac{p^2 - p^2xy + yy}{y + p^2x}. \tag{3.10}$$

Die Fundamentalpunkte P_1 und P_2 sind mit $(\pm\sqrt{(-2p^2)^{-1}}, \pm\sqrt{-2^{-1}p^2}$ gegeben. Andere singuläre Punkte dieser Hyperbelinversion liegen auf der Geraden $p(0, p^2, p^1)^T$ die die Polare des Inversionspols P ist.

(ii) Ist $p^2 > 0$, wird die auf Polaren p induzierte Involution in bezug auf die Grundhyperbel $\mathcal{H}$ elliptisch (Fig. 7 (ii)) und gelten dieselbe Formeln wie bei der Hyperbelinversion zum Isotroperpunkt 2.1 (i).

Das Inversionsbild jeder beliebigen Geraden v ist ein Kegelschnitt der im allgemeinen Fall der Hyperbelinversion zum Isotroperpunkt mit der Gleichung

$$\begin{aligned} p^1\Big(v_1(x^1x^2 - x^0x^0) - x^2(v_0x^0 + v_2x^2)\Big) + \\ + p^2\Big(v_2(x^1x^2 - x^0x^0) - x^1(v_0x^0 + v^1x^1)\Big) = 0 \end{aligned}$$

gegeben ist.

Für $p^1 = 1$ bekommt man eine *Hyperbel*. Ihre Gleichung lautet in affinen Koordinaten

$$(p^2x - y)(v_1x - v_2y) + v_0(p^2x + y) + (v_1 + v_2p^2) = 0. \tag{3.11}$$

Die erste Ausnahme ergibt sich, wenn v eine isotrope Gerade ist (man wählt $|v_1| = |v_2| = 1$). Man erhält dann die Gleichung *einer speziellen Hyperbel*

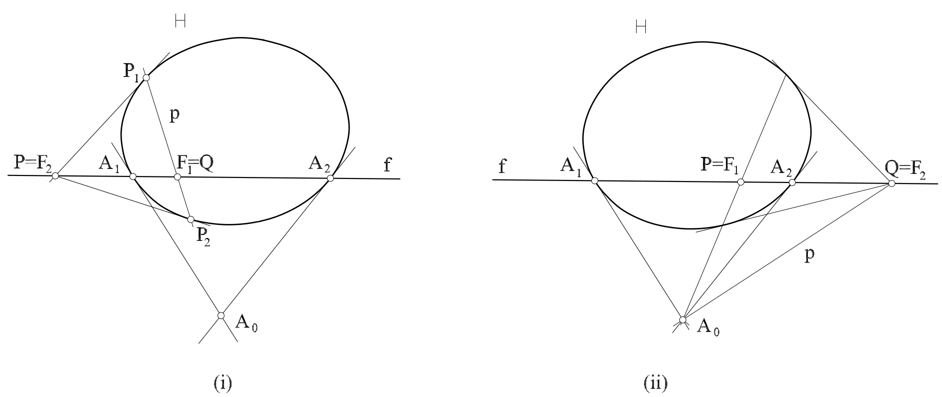
$$p^2xx \pm yy - xy(1 \pm p^2) + v_0y = p^2(\mp 1 - v_0) - 1. \tag{3.12}$$

Es ist ersichtlich daß das Inversionsbild jeder den F_1 enthaltenden Geraden eine F_2 enthaltende spezielle Hyperbel ist. Die zweite Ausnahme entsteht, wenn man den Punkt $Q(0, 1, -p^2)$ enthaltende Gerade $v(v_i)$ abbildet (man wählt $v_1 = v_2p^2$). Man bekommt die Gleichung *einer Parabel*

$$v_2(p^2x - y)^2 - v_0(p^2x + y) + 2v_2p^2 = 0. \tag{3.13}$$

2.2. Im speziellen Fall kann der Pol $P(0, p^1, p^2)$ mit einem der Absolutpunkte übereinstimmen ($|p^1| = |p^2|$). Damit wird die Polare p eine isotrope Gerade (z.B. ist $P \equiv F_1$, stimmt der Punkt Q mit anderem Absolutpunkt $Q \equiv F_2$ überein).

Man kann zwei Fälle unterscheiden, ob der Grundkegelschnitt auf der Polaren p eine elliptische oder hyperbolische Involution induziert. Im ersten Fall stimmt der Pol P mit dem Absolutpunkt F_2, und im zweiten mit dem Absolutpunkt F_1 überein.



Figur 8

(i) Induziert der Grundkegelschnitt $\mathcal{H}(h_{ij})$ auf der Polaren p eine hyperbolische Involution (Fig. 8 (i)), folgen aus (3.9) mit $P(0,-1,1) \equiv$ $\equiv F_2$ die Gleichungen des Inversionsbildes $Y(\widehat{x}, \widehat{y})$

$$\widehat{x} = \frac{1 - xy - xx}{y - x}, \quad \widehat{y} = \frac{-1 + xy + yy}{y - x}. \tag{3.14}$$

Die Fundamentalpunkte P_1 und P_2 sind mit $(\pm\sqrt{2^{-1}}, \pm\sqrt{2})$ gegeben.

(ii) Ist die induzierte Involution auf der Polaren p elliptisch und ist der Pol P mit $P(0,1,1) \equiv F_1$ gegeben (Fig. 8 (ii)), bekommt man für die Koordinaten des Inversionsbildes $Y(\widehat{x}, \widehat{y})$ die Formeln

$$\widehat{x} = \frac{1 - xy + xx}{x + y}, \quad \widehat{y} = \frac{1 - xy + yy}{x + y}. \tag{3.15}$$

Nach der Einordnung der Koordinaten des Pols $P(0,1,-1) \equiv F_2$ in (3.11), ist ersichtlich daß das Inversionsbild jeder beliebigen Geraden $v(v^i)$ ein Kegelschnitt, mindestens vom Zirkularitätsgrad eins, mit der Gleichung

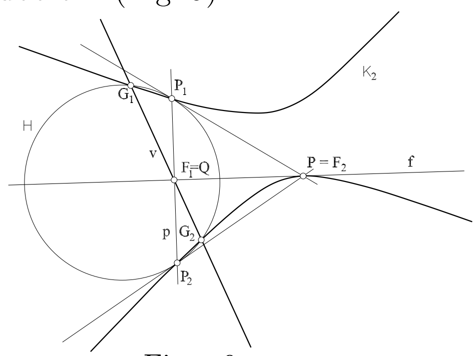
$$v_1xx - v_2yy + xy(v_1 - v_2) + v_0(x - y) - (v_1 - v_2) = 0$$

ist. Diese Gleichung hat die Gestalt der *speziellen Hyperbel* die durch den Absolutpunkt F_2 läuft.

Um eine vollständig zirkuläre Kurve zu bekommen, muß man eine isotrope Gerade abbilden. Nach kurzer Rechnung bekommt man die Gleichung *einer speziellen Parabel*

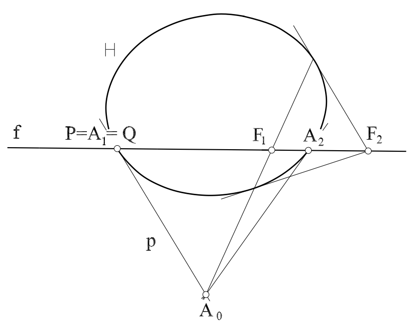
$$v_1(x + y)^2 + v_0(x - y) - 2v_1 = 0$$

als Inversionsbild einer den $Q \equiv F_1$ enthaltenden Geraden $v(v_i), v_1 + v_2 = = 0$. Die beide isotrope Punkte des erzeugten KS-es stimmen mit dem Inversionspol $P = F_2$ überein (Fig. 9).



Figur 9

2.3. Liegt der Pol P auf dem Grundkegelschnitt $\mathcal{H}(h_{ij})$, stimmen alle Grundpunkte der Inversion überein (Fig 10).



Figur 10

Wenn wir für den Pol den Punkt $P(0, 1, 0)$ nehmen, bekommen wir die Gleichungen der Inversion durch

$$\begin{aligned} y^0 &\sim -x^0x^2, \\ y^1 &\sim -x^0x^0 + x^1x^2, \qquad (3.16) \\ y^2 &\sim -x^2x^2, \end{aligned}$$

bzw.

$$X(x,y) \mapsto Y(\widehat{x},\widehat{y}): \quad \widehat{x} = \frac{1-xy}{y}, \quad \widehat{y} = y.$$

Jede mit $v(v^i)$ gegebene Gerade bildet in einen durch den Pol P laufenden KS ab. Aus (3.16) folgt die Gleichung dieses KS-es

$$v_2yy + v_0y - v_1xy + v_1 = 0$$

die *eine Hyperbel* ist. Enthält die Gerade v einen der Absolutpunkten wird die erzeugte Hyperbel eine spezielle Hyperbel mit der Gleichung

$$\pm yy + v_0y - xy + 1 = 0.$$

Da das Absolutpunktepaar ein zugeordnetes Punktepaar der Inversion ist, ist das Inversionsbild einer den F_1 enthaltenden Geraden ein KS, der den Absolutpunkt F_2 durchläuft.

Wir fassen das im folgenden Satz zusammen:

Satz 6. *Gegeben sei eine $\mathcal{M}$-Inversion $\rho\{\mathcal{H}, P\}$ in $\mathbb{M}^2$; $\mathcal{H}$ sei eine Grundhyperbel und P ein isotroper Inversionspol. Als Inversionsbild jeder beliebigen Geraden entsteht ein Kegelschnitt $\mathcal{K}_2$:*

(1) *Ist P ein von den Absolutpunkten verschiedener Isotroperpunkt, wird $\mathcal{K}_2$ eine der drei Hyperbelarten oder eine Parabel. Ist die anfängliche Gerade isotrop, wird $\mathcal{K}_2$ eine der zwei speziellen Hyperbelarten.*

(2) *Stimmt der Inversionspol P mit einem der Absolutpunkte der Minkowskiebene überein, wird $\mathcal{K}_2$ eine der zwei speziellen Hyperbelarten. Ist die anfängliche Gerade isotrop, wird $\mathcal{K}_2$ eine spezielle Parabel.*

(3) *Liegt der Inversionspol P auf der Grundhyperbel $\mathcal{H}$, wird $\mathcal{K}_2$ eine der drei Hyperbelarten. Ist die anfängliche Gerade isotrop, wird $\mathcal{K}_2$ eine der zwei speziellen Hyperbelarten.*

Enthält die Gerade einen der Grundpunkten, zerfällt der erzeugte Kegelschnitt in zwei Geraden.

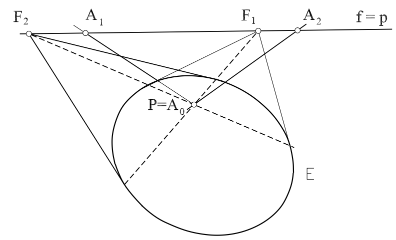
3.5. Ellipseninversion in $\mathbb{M}^2$

Sind die Absolutpunkte F_1 und F_2 ein zugeordnetes Punktepaar der elliptischen Involution, ist der Grundkegelschnitt eine gleichseitige Ellipse $\mathcal{E}(a_{ij})$ die nach (2.9) mit der Gleichung

$$\mathcal{E} \ldots \quad z^0z^0 - z^1z^1 - z^2z^2 = 0 \tag{3.17}$$

gegeben ist. Dann sind die Absolutpunkte F_1 und F_2 ein zugeordnetes Punktepaar der elliptischen Involution, und jedes zugeordnete isotrope Punktepaar liegt innerhalb oder außerhalb des Absolutpunktepaares. Nach der Wahl des Poles P unterscheiden wir auch hier zwei Grundtypen.

Typ 1 – *Ellipseninversion zum Mittelpunkt.*



Figur 11

Da der Mittelpunkt mit $P(1, 0, 0)$ gegeben ist, bekommen wir für das Inversionsbild $Y(y^i)$

$$
\begin{aligned}
y^0 &\sim x^1x^1 + x^2x^2, \\
y^1 &\sim x^0x^1, \\
y^2 &\sim x^0x^2,
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

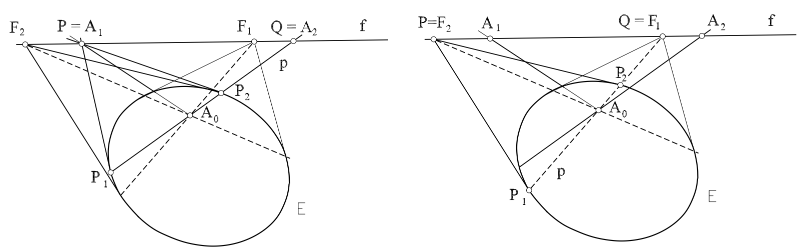
bzw.

$$
X(x, y) \mapsto Y(\widehat{x}, \widehat{y}) : \quad \widehat{x} = \frac{x}{xx + yy}, \quad \widehat{y} = \frac{y}{xx + yy}.
$$

Ähnliche Betrachtungen nach Abschnitt § 3.4 (Typ 1) geben die nächsten Ergebnisse:

Satz 7. *Die Ellipseninversion zum Mittelpunkt bildet eine Gerade in eine gleichseitige Ellipse ab. Enthält die Gerade einen der Grundpunkten, zerfällt der erzeugte Kegelschnitt in zwei Geraden.*

Typ 2 – *Ellipseninversion zu einem Isotroperpunkt.* Ist der Pol P ein isotroper Punkt, entstehen nur zwei Möglichkeiten:



(i) (ii)

Figur 12

2.1. Der Pol P ist ein beliebiger isotroper, von den Absolutpunkten verschiedener Punkt (Fig. 12 (i)). Für $P(0,1,0)$ bekommen wir

$$\begin{aligned} y^0 &\sim x^0x^1, \\ y^1 &\sim x^0x^0 - x^2x^2, \\ y^2 &\sim x^1x^2, \end{aligned} \tag{3.19}$$

woraus folgt $X(x,y) \mapsto Y(\widehat{x},\widehat{y}) :\ \widehat{x} = \dfrac{1-yy}{x},\ \widehat{y} = y$. Die Polare p ist die Gerade $x_1 = 0$ und die Grundpunkte P_1, P_2 sind mit $(1,0,\pm 1)$ gegeben.

2.2. Im speziellen Fall kann der Pol P mit einen der Absolutpunkten, z.B. $P = F_2$, übereinstimmen (Fig. 12 (ii)). Damit wird seine Polare p eine den Absolutpunkt F_1 enthaltende isotrope Gerade.

$$\begin{aligned} y^0 &\sim x^0(x^1 + x^2), \\ y^1 &\sim x^0x^0 - x^2(x^1 - x^2), \\ y^2 &\sim x^0x^0 - x^1(x^1 - x^2), \end{aligned} \tag{3.20}$$

woraus folgt

$$\widehat{x} = \frac{1+xy-yy}{x+y}, \widehat{y} = \frac{1+xy-xx}{x+y}.$$

Ähnliche Betrachtungen nach Abschnitt §3.4 (Typ 2) geben die nächsten Ergebnisse:

Satz 8. *Gegeben sei eine $\mathcal{M}$-Inversion $\rho\{\mathcal{E}, P\}$ in $\mathbb{M}^2$; $\mathcal{E}$ sei eine Grundellipse und P ein isotroper Inversionspol. Als Inversionsbild jeder beliebigen Geraden entsteht ein Kegelschnitt $\mathcal{K}_2$:*

(1) *Ist P ein von den Absolutpunkten verschiedener Isotroperpunkt, wird $\mathcal{K}_2$ eine der drei Hyperbelarten oder eine Parabel. Ist die anfängliche Gerade isotrop, wird $\mathcal{K}_2$ eine der zwei speziellen Hyperbelarten.*

(2) *Stimmt der Inversionspol P mit einem der Absolutpunkte der Minkowskiebene überein, wird $\mathcal{K}_2$ eine der zwei speziellen Hyperbelarten. Ist die anfängliche Gerade isotrop, wird $\mathcal{K}_2$ eine spezielle Parabel.*

Enthält die Gerade einen der Grundpunkten, zerfällt der erzeugte Kegelschnitt in zwei Geraden.

Nach den gegebenen Betrachtungen in dieser Arbeit schliessen wir mit:

Satz 9. *In der Minkowskiebene* $\mathbb{M}^2$ *gibt es drei Grundtypen der* $\mathcal{M}$*-Inversionen; Zykelinversion, Hyperbelinversion und Ellipseninversion.*

Der Inversionspol P *soll ein isotroper Punkt sein, und der Grundkegelschnitt soll ein gleichseitiger Kegelschnitt sein.*

Aus Th. 3.5 und den gegebenen Betrachtungen im Abschnitt § 2 folgt:

Satz 10. *Der Zirkularitätsgrad einer Kurve ist eine Invariante der* $\mathcal{M}$*-Inversion, im Fall der Inversionspol* $P \neq F_i, i = 1, 2$.

Der Zirkularitätstyp einer Kurve ist eine Invariante der $\mathcal{M}$*-Inversion, wenn* $P \neq F_i, i = 1, 2$ *und der Grundkegelschnitt ein Zykel ist.*

Literatur

[1] JAGLOM, I. M.: *Das Galileische Prinzip der Relativität und eine nichteuklidische Geometrie*, Nauka, Moskau, 1969 (in Russisch).

[2] FLADT, K.: *Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven*, Frankfurt am Main, 1962.

[3] JURKIN, E.: Automorphic Inversion and Circular Quartics in Isotropic Plane, *KOG* **12** (2008), 19–26.

[4] MÉSZÁROS, F.: Flächen 2. ordnung im pseudoisotropen Raum $I_3^{(1)P}$, *Rad HAZU* [470] **12** (1995), 87–111.

[5] MOLNÁR, E.: Kreisgeometrie und konforme Interpretation des mehrdimensionalen metrischen Raumes, *Periodica Math. Hung.* [10] **4** (1979), 237–259.

[6] MÜLLER, E. und KRAMES, J. L.: *Vorlesungen über darstellende Geometrie*, Bd. II, Leipzig und Wien, 1929.

[7] NIČE, V.: Krivulje i plohe 3. i 4. reda nastale pomoću poopćene kvadratne inverzije, *Rad JAZU* **78/86** (1945), 153–194.

[8] REWERYK, N. V.: *Die Kegelschnitte in der pseudoeuklidischen Ebene*, Moskau, 1969, 160–177 (in Russisch).

[9] SACHS, H.: *Ebene Isotrope Geometrie*, Vieweg, Braunschweig–Wiesbaden, 1987.

[10] SCHAAL, H.: Euklidische und pseudoeuklidische Sätze über Kreis und gleichseitige Hyperbel, *Elemente d. Math* **19** (1964), 53–56.

[11] SLIEPČEVIĆ, A. und SZIROVICZA, V.: Die projektive Erzeugung der vollstandig zirkularen Kurven 3. Ordnung in der isotropen Ebene, *Mathematica Pannonica* **11**/2 (2000), 223–237.

[12] SZIROVICZA, V. und SLIEPČEVIĆ, A.: Die allgemeine Inversion in der isotropen Ebene, *Rad HAZU* [491] **15** (2005), 153–168.