Mathematica Pannonica
13/1 (2002), 51–61

DIE FUSSPUNKTERZEUGUNG DER ZIRKULÄREN KURVEN 3. ORDNUNG IN DER ISOTROPEN EBENE

Vlasta **Szirovicza**

Faculty of Civil Engineering, University of Zagreb, 10 000 Zagreb, Kačićeva 26, Croatia

Herrn O. Prof. Dr. Hans Sachs zum 60. Geburtstag gewidmet

Received: July 2001

MSC 2000: 51 N 99

Keywords: Geometry, isotropic plane, pedal curves, completely circular curves

Abstract: In the isotropic plane we define pedal deduction and search the conditions how to get 3. order circular curves with the accent on the completely circular curves.

Die Fußpunktkurve einer gegebener Kurve in der euklidischen Ebene bildet die Menge der Fußpunkte allen durch einem festen Punkt der Ebene laufenden Normalen welche an die Tangenten dieser Kurve versenkt sind. Der feste Punkt heißt der Pol dieser Erzeugung. Die Fußpunktkurve eines Kegelschnittes ist eine Kurve 4. Ordnung.

Eine isotrope Ebene $\mathcal{I}_2$ ist eine reelle affine Ebene die in der projektiven Erweiterung über eine Absolutfigur $\{f, F\}$ metrisiert wird. Die absolute Gerade f und der absolute Punkt F sind in projektiven Koordinaten durch $x_0 = 0$ und $F(0:0:1)$ gegeben.

E-mail address: szvlasta@juraj.gradnz.grad.hr

Unter der isotropen Normalen von einem Punkt P auf eine nicht isotrope Gerade g versteht man eine isotrope Gerade durch P. Der so eingeführte Normalenbegriff ist eine $\mathcal{G}_5$-Invariante, wobei $\mathcal{G}_5$ die fünfparametrige allgemeine isotrope Ähnlichkeitsgruppe

$$\begin{aligned} \overline{x} &= a + px \\ \overline{y} &= b + cx + qy \quad \text{mit} \quad pq \neq 0 \end{aligned}$$

ist [2]. Somit bilden alle Normalen der isotropen Ebene einen Geradenbüschel mit dem Zentrum F.

Um die Fußpunkterzeugung in die isotrope Ebene einzuführen, soll man außer dem festen Punkt $P \equiv F$, einen Kegelschnitt wählen, der als Grundkegelschnitt dieser Erzeugung genannt und mit c^2 bezeichnet wird.

Bezüglich der Gruppe $\mathcal{G}_5$ existieren in der isotropen Ebene 7 Typen von irreduziblen Kurven 2. Ordnung. Jede von diesen kann als Grundkegelschnitt gewählt werden. Die wichtigste Rolle bei dieser Erzeugung spielt der Zirkularitätsgrad einer Kurve.

Definition 1. Eine algebraische Kurve n-ter Ordnung in der isotropen Ebene wird als *zirkulär* bezeichnet, wenn sie den absoluten Punkt enthält. Besitzt diese Kurve k^n den absoluten Punkt als r-fachen Schnittpunkt mit der absoluten Geraden, wird sie von Zirkularitätsgrad $r (r \leq \leq n)$. Im Fall $r = n$ heißt sie *vollständig zirkulär.*

Ein 1-zirkulärer Kegelschnitt der isotropen Ebene ist die spezielle Hyperbel und der vollständig zirkuläre Kegelschnitt wird ein isotroper Kreis.

Durch den Pol $P \equiv F$ der Fußpunkterzeugung legt man an den Grundkegelschnitt c^2 die isotrope Tangenten p_1 und p_2. Diese Tangenten und die durch ihre Berührungspunkte P_1 und P_2 laufende Gerade p werden als die Grundgeraden, und ihre Polen P, P_1 und P_2 als die Grundpunkte dieser Erzeugung bezeichnet. Der Kegelschnitt, dessen Fußpunktkurve gesucht wird, sei mit $\overline{k}^2$ bezeichnet.

Definition 2. Die *Fußpunktkurve* k_N einer Kurve $\overline{k}$ in der isotropen Ebene bildet die Menge von Schnittpunkten aller Tangenten der Kurve $\overline{k}$ mit der durch ihre Pole bezüglich des Grundkegelschnittes laufenden isotropen Normalen.

Nun nimmt man eine beliebige Tangente $t \in \overline{k}^2$ und wird sie mit der isotropen Normalen durch ihren Pol T bezüglich c^2 schneiden. Die Menge der Fußpunkte bildet eine Kurve k_n^4 vierter Ordnung (Fig.1.).

Das kann man leicht, mittels der Zuordnung zwischen den Tangentenbüschel und den isotropen Geradenbüschel (Chasles!), beweisen.

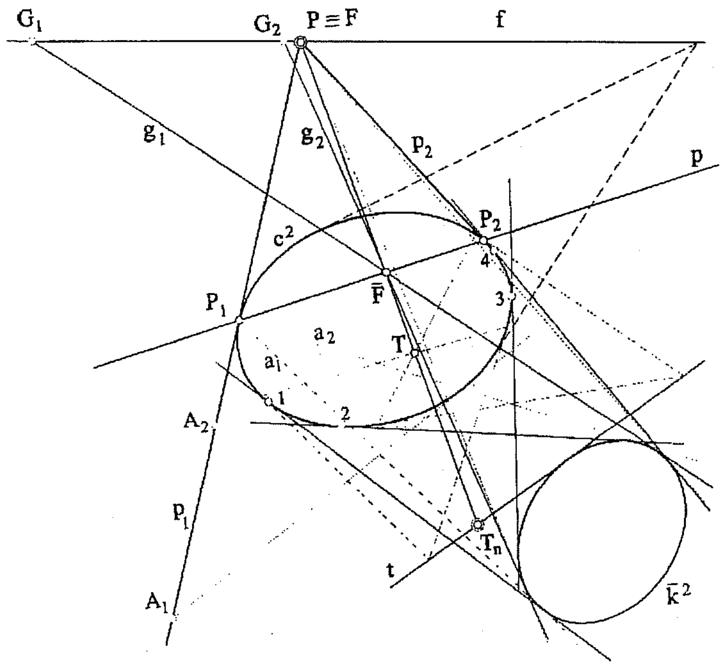

Fig. 1.

Mittels syntetischer Behandlung kann man **die Eigenschaften der Fußpunkterzeugung** als die Folgerung eingeführter Definition erreichen.

1. Die Kurve k_n^4 ist vom Zirkularitätsgrad 2. Die zwei Fußpunkte auf den isotropen Tangenten der Kurve $\overline{k}^2$ sind in den absoluten Punkt F gefallen. Somit wird der Pol $P \equiv F$ ein Doppelpunkt der Kurve k_n^4.
2. Die zwei durch den Grundpunkt P_1 gelegten Tangenten des Kegelschnittes $\overline{k}^2$ haben die Pole auf seiner Polaren p_1 und wenn die beiden Fußpunkte in den Punkt P_1 fallen, so wird er ein Doppelpunkt dieser Erzeugung. Dasselbe gilt für den Grundpunkt P_2, woraus folgt, dass die erzeugte Kurve immer vom Geschlecht Null sein wird. Der Typ des Doppelpunktes hängt von der Lage der Grundpunkte bezüglich der Kurve $\overline{k}^2$ ab. Im Fall der reellen und verschiedenen durch einen Grundpunkt an

$\overline{k}^2$ legbaren Tangenten, gewinnt man einen Knotenpunkt. Das imaginäre Tangentenpaar liefert einen isolierten Doppelpunkt. Enthält $\overline{k}^2$ den Grundpunkt, wird der Doppelpunkt eine Spitze.

3. Die Kurven c^2 und $\overline{k}^2$ haben vier gemeinsame Tangenten, deren Pole im Bezug auf c^2 gleichzeitig die Berührungspunkte, bzw. die Lotenfußpunkte von c^2 sind. Daraus folgt, dass die Kurve k_n^4 keine weiteren Punkte mit c^2 außer diesen und Doppelpunkten P_1 und P_2 gemeinsam hat.
4. Sei $\overline{F}$ der Pol der absoluten Geraden f bezüglich der Kurve c^2. Die Pole der durch $\overline{F}$ legbaren Tangenten an $\overline{k}^2$ liegen an der absoluten Geraden. Somit wird f die isotrope Normale und die Fußpunktkurve enthält die Fernpunkte dieser Tangenten. Falls $\overline{F}$ auf $\overline{k}^2$ liegt, fallen die zugehörigen Tangenten zusammen. Der Fernpunkt dieser Doppeltangente wird zum Rückkehrpunkt der erzeugten Kurve und die Gerade f wird die Rückkehrtangente.
5. Falls eine der Grundgeraden $\{p, p_1, p_2\}$ die Kurve $\overline{k}^2$ berührt, zerfällt die Fußpunktkurve in diese Gerade und eine Kubik. Diese Kubik besitzt den Doppelpunkt in jenem Grundpunkt, der diese Grundgerade nicht enthält. Im Fall die Kurve $\overline{k}^2$ zwei von der Grundgeraden berührt, zerfällt k_n^4 in diese zwei Geraden und einen Kegelschnitt.
6. Alle Pole der Tangentenmenge der Kurve $\overline{k}^2$ bezüglich c^2 bilden eine Kurve 2. Ordnung, die mit k^2 bezeichnet wird. Falls die polar-reciproke Kurve k^2 der Kurve $\overline{k}^2$ bezüglich c^2 einen der Grundpunkte enthält, entsteht eine Kubik.

Die nächste Untersuchung hat als Ziel die Bedingungen an den Zirkularitätsgrad der Kegelschnitte c^2 und $\overline{k}^2$, wie auch die Lage des $\overline{k}^2$ zu der Grundfigur nachzuprüfen, um die Kurven 3. Ordnung des Zirkularitätsgrades 1, 2, bzw. 3 mittels der Fußpunkterzeugung zu bekommen. Nach den vorigen Eigenschaften der Erzeugung kann man schließen:

Die **1-zirkuläre Kubik** k_n^3 entsteht im Fall

1. wenn c^2 ein 0-zirkulärer und $\overline{k}^2$ ein 0 oder 1-zirkulärer Kegelschnitt ist, der die Polare p_1 (bzw. p_2), aber nicht p, berührt. Diese Polare enthält die beiden Grundpunkte P und P_1 und diese sind somit die einfachen Punkte der Fußpunktkurve k_n^3.

Die erzeugte Kubik schneidet die absolute Gerade im $P \equiv F$ und ihre restlichen zwei Fernpunkte sind die Fußpunkte auf den zwei durch $\overline{F}$ laufenden Tangenten des Kegelschnittes $\overline{k}^2$.

2. man kann als $\overline{k}^2$ einen isotropen Kreis wählen, der nur im Fall c^2 eine Parabel und die Gerade p keine Tangente der Kurve $\overline{k}^2$ ist. Diese Bedingung ist notwendig, da $\overline{k}^2$ schon eine der Grundgeraden berührt, die mit der absoluten Geraden übereinstimmt. Ihr Pol, somit auch der Fußpunkt, fällt mit dem Punkt $\overline{F}$ zusammen. Daraus folgt, dass die beiden Fernpunkte der erzeugten Kurve zusamengefallen sind. Doch es wird kein Doppelpunkt der Kurve k_n^3 sein, da die Kubik keine Doppelpunkte außer den Grundpunkten besitzt. Dieser Punkt wird ein doppeltzählender Schnittpunkt der Kubik mit der absoluten Geraden sein und somit ein Rückkehrpunkt der Fußpunktkurve.

Eine 1-zirkuläre Fußpunktkurve 3. Ordnung, unabhängig des Zirkularitätsgrades von $\overline{k}^2$, ist nicht erzeugtbar wenn c^2 ein 1 oder 2-zirkulärer Kegelschnitt ist.

Die **2-zirkuläre Kubik** k_n^3 entsteht im Fall

1. wenn c^2 ist ein 0-zirkulärer und $\overline{k}^2$ ein 0, 1 oder 2-zirkulärer Kegelschnitt, der die Polare p, aber nicht p_1 bzw. p_2, berührt. Damit entsteht ein Doppelpunkt im $P \equiv F$. Es wird eine Spitze im Fall $\overline{k}^2$ eines 1 oder 2-zirkulären Kegelschnittes sein oder ein Knotenpunkt, wenn $\overline{k}^2$ ein 0- zirkulärer Kegelschnitt ist.
2. wenn c^2 ein 1-zirkulärer und $\overline{k}^2$ ein 0-zirkulärer Kegelschnitt ist, der die isotrope Tangente $p \equiv p_1 \equiv p_2$ der Kurve c^2 in einem Punkt $T \neq \overline{F}$ berührt. Hierbei muss man hinzufügen, dass $\overline{k}^2$ nicht als 1-zirkulärer, sondern auch als 2-zirkulärer Kegelschnitt gewählt wurde. Berührt im ersten Fall die isotrope Grundgerade p die Kurve $\overline{k}^2$ und auch c^2, zerfällt die Fußpunktkurve in einen Kegelschnitt und die doppeltzählende Polare p. Im zweiten Fall gilt: ein isotroper Kreis kann nicht gleichzeitig die zwei Tangenten p und f im selben Punkt P berühren.

Unabhängig des Zirkularitätsgrades von $\overline{k}^2$ kann man keine 2-zirkulären Kurven 3. Ordnung erzeugen, falls c^2 ein 2-zirkulärer Kegelschnitt ist.

Die **3-zirkuläre Kubik** k_n^3 entsteht im Fall

1. wenn c^2 ein 1-zirkulärer und $\overline{k}^2$ nur ein 0-zirkulärer Kegelschnitt ist, der die isotrope Grundgerade p im Punkt $\overline{F}$ berührt. Der Pol P wird einerseits ein einmalzählender Punkt der Kubik, der schon die Polare p durchläuft; anderseits wird P ein doppeltzählender Schnittpunkt der Kubik und der Geraden f, da sich die beiden Fußpunkte an den durch $\overline{F}$ laufenden Tangenten im Pol P befinden. Deswegen wird $P \equiv F$ als ein dreimalzählender Fernpunkt der Fußpunktkurve, bzw. als ein Knotenpunkt mit f als die Tangente eines Zweiges bezeichnet. Diese Kurve 3. Ordnung ist unter der Name Tridens bekannt.
2. wenn c^2 ein 2-zirkulärer und $\overline{k}^2$ nur ein 0-zirkulärer Kegelschnitt ist, der die Gerade $p \equiv p_1 \equiv p_2 \equiv f$, bzw. eine Parabel berührt. Da $\overline{F}$ in diesen Fall mit $P \equiv F$ übereinstimmt, bekommt man auch eine 3-zirkuläre Kurve 3. Ordnung mit Knoten im absoluten Punkt, bzw. einen Tridens.

Mit den vorgelegten Ergebnissen ist eine vollständige Klassifikation aller Bedingungen der Fußpunkterzeugung bezüglich des Zirkularitätsgrad gegeben. Im Folgenden wird je ein Beispiel für die Kubik vom Zirkularitätsgrad 1, 2 und 3 der analytischen Methode unterordnet.

1. Die Fußpunkterzeugung einer 1-zirkulären Kubik

Der Einfachkeit wegen ist als der Grundkegelschnitt eine Ellipse gegeben, welche die Gleichung des euklidischen Kreises besitzt

$$c^2 \equiv x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{1}$$

Die isotropen Tangenten berühren c^2 in den Grundpunkten $P_1(1,0)$ und $P_2(-1,0)$. Die Polare p des Pols $P \equiv F$ stimmt mit der x-Achse überein und der Pol $\overline{F}$ der absoluten Geraden bezüglich c^2 fällt in den Ursprung des Koordinatensystems.

Wählen wir als $\overline{k}^2$ eine Parabel, welche die isotrope Grundgerade p_1 berührt (Fig. 2.). Es ergibt sich folgende Gleichung

$$\overline{k}^2 \equiv y^2 - x + 1 = 0. \tag{2}$$

Jede Tangente der Parabel (2) ist die Polare p' des Grundkegelschnittes

c^2 mit der Gleichung

(3) $$xx' + yy' - 1 = 0.$$

Nach Einordnen (3) ins (2) bekommt man

(4) $$x'y^2 + y'y + x' - 1 = 0,$$

wobei mit $P'(x', y')$ ihr Pol bezüglich c^2 bezeichnet wird. Soll die Diskriminante dieser quadratischen Gleichung verschwinden, so bekommt man

$$y'^2 - 4x'(x' - 1) = 0$$

als die Menge der Pole P.

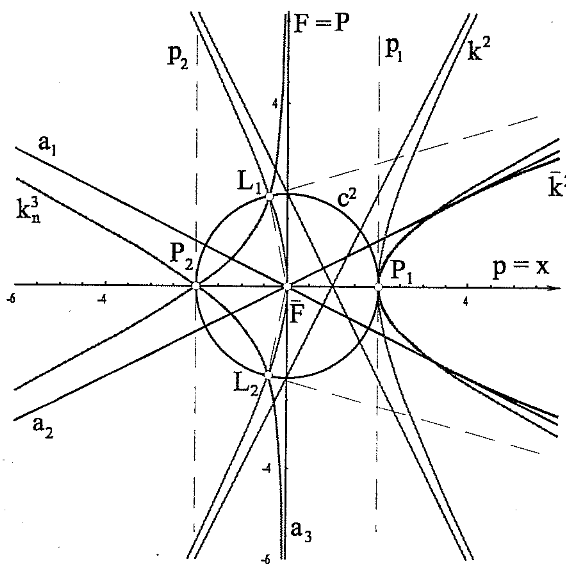

Fig. 2

Nimmt man jetzt $x = x'$ und $y = y'$, so entsteht

(5) $$k^2 \equiv 4x^2 - y^2 - 4x = 0,$$

als die Gleichung eines Kegelschnittes, die polar-reciprok der Kurve $\overline{k}^2$ im Bezug auf c^2 ist. So kann man ihn als den Polenkegelschnitt bezeichnen. Ersichtlich ist es eine Hyperbel mit den Asymptotenrichtungen $2x - y = 0$ und $2x + y = 0$ und dem Mittelpunkt $M(\frac{1}{2}, 0)$.

Der Pol $P' \in k^2$ besitzt jetzt die Koordinaten $P'(x', y' = x' \pm \pm 2\sqrt{x'(x' - 1)})$ und damit lautet die Gleichung seiner Polare bezüglich c^2

$$p' \equiv xx' \pm 2y\sqrt{x'(x'-1)} - 1 = 0.$$

Man schneidet sie mit der isotropen Normalen $x = x'$ woraus folgt

$$(1-x^2)^2 = \pm 4y^2(x(x-1)).$$

Man sieht gleich, dass die erzeugte Fußpunktkurve in eine Gerade $x - - 1 = 0$ und eine Kubik mit der Gleichung

$$k_n^3 \equiv x^3 + x^2 - x - 1 \pm 4xy^2 = 0 \tag{6}$$

zerfällt. Man bekommt zwei Lösungen, da es für jeden x' zwei Pole P' gibt. Es wird die Lösung einer Diskussion untergezogen sein, bei welcher die Kubik alle drei reelle Asymptoten besitzt (Fig. 2.). Diese 1-zirkuläre Kubik besitzt im Grundpunkt P_2 einen Doppelpunkt und die restlichen zwei Grundpunkte sind die einfachen Punkte der Kurve. Dabei entsteht im Pol P ein Wendepunkt mit der y-Achse als die Wendetangente. Die Fußpunkte auf den gemeinsamen Tangenten von c^2 und $\overline{k}^2$ sind in die Punkte L_1, L_2 und P_1 gefallen; den letzten zählt man doppelt, weil sich in P_1 die Kurven c^2 und $\overline{k}^2$ berühren. Deshalb berührt ein Zweig der Kubik die Grundgerade p_1.

2. Die Fußpunkterzeugung einer 2-zirkulären Kubik

Im nächsten Fall ist der Grundkegelschnitt ebenfalls mit der Gleichung (1) gegeben. Anstatt des Kegelschnittes $\overline{k}^2$, der die Polare p berührt, ist seine polar-reciproke, den Pol P enthaltende Kurve k^2 gegeben, bzw. eine spezielle Hyperbel. Ihre Gleichung lautet

$$k^2 \equiv x^2 + 2xy + 1 = 0. \tag{7}$$

Der Punkt $P' \in k^2$ besitzt deshalb die Koordinaten $P'(x', -\frac{x'^2+1}{2x'})$ und als die Gleichung seiner Polare p' bezüglich c^2 bekommt man

$$p' \equiv (2x-y)x'^2 - 2x' - y = 0. \tag{8}$$

Durchläuft P' die Polenkurve k^2, so umhüllen alle Geraden p' die Kurve

$$\overline{k}^2 \equiv y^2 - 2xy - 1 = 0, \tag{9}$$

was gleich aus $p' \equiv 0$ und $\frac{\partial p'}{\partial x'} = 0$ folgt. Es ist ersichtlich eine Hyperbel, welche die Gerade p berührt. Ihre Fußpunktkurve bekommt man gleich, wenn man die Polare p' mit der isotropen Normalen $x = x'$ schneidet. Damit erreicht sie die Form

$$k_n^3 \equiv 2x^3 - x^2y - 2x - y = 0. \tag{10}$$

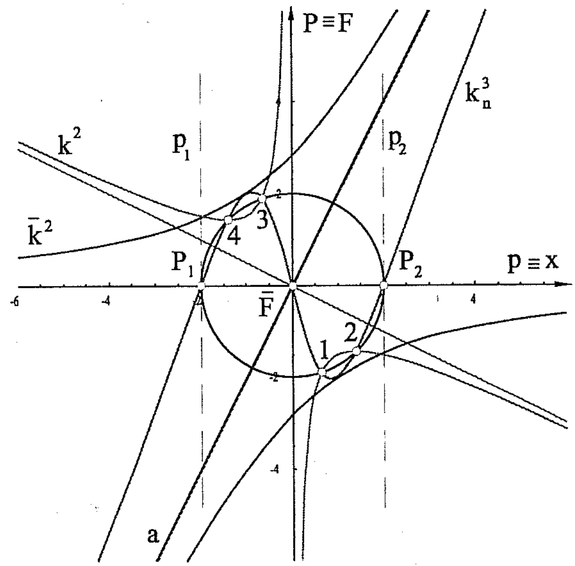

Fig. 3.

Es ist eine 2-zirkuläre Kubik mit den einfachen Punkten in P_1 und P_2 (Fig. 3.). Sie läuft durch die Schnittpunkte, bzw. den Polen, 1, 2, 3, 4 der gemeinsamen Tangenten der Kegelschnitte k^2 und c^2. Die durch den Punkt $\overline{F}$ an $\overline{k}^2$ gezogene Tangente berührt sie in ihrem Fernpunkt. Somit wird diese Tangente die Asymptote der erzeugten Kubik. Da in diesem Fall keine reelle Tangenten durch den Pol P an $\overline{k}^2$ ziehen kann, entsteht im P ein isolierter Doppelpunkt. Diese Tatsache kann man leicht nachprüfen, wenn man (10) nach x differenziert. So stellt sich

$$y' = \frac{2(3x^2 - xy - 1)}{x^2 + 1},$$

ein, woraus die Gleichungen $(x-i)(x+i) = 0$ der konjugiert imaginären Tangentenpaares im isolierten Doppelpunkt folgen.

3. Die Fußpunkterzeugung einer 3-zirkulären Kubik

3.1. Fall 1). Sei als der Grundkegelschnitt eine spezielle Hyperbel mit der Gleichung

$$c^2 \equiv xy + 1 = 0 \tag{11}$$

gegeben. Die Kurve $\overline{k}^2$ soll die Polare p des Pols P berühren. Daraus schließen wir, dass ihre Polkurve k^2 den Pol P enthält und damit eine spezielle Hyperbel oder ein isotroper Kreis wird. Man wird ein Kreis mit der Gleichung

$$k^2 \equiv x^2 - 2y = 0 \tag{12}$$

gewählt. Der Punkt $P' \in k^2$ besitzt somit die Koordinaten $P'(x', \frac{x'^2}{2})$ und seine Polare bezüglich c^2 wird

$$p' \equiv xx'^2 + 2yx' + 4 = 0, \tag{13}$$

mit x' als Parameter. Diese Polare soll die Tangente der Kurve $\overline{k}^2$ sein, so verschwindet die Diskriminante in dieser quadratischen Gleichung nach x', was

$$\overline{k}^2 \equiv y^2 - 4x = 0 \tag{14}$$

ergibt.

Man bekommt eine Parabel, was mit der früheren Voraussetzung übereinstimmt. Man schneidet die Gerade (13) mit der isotropen Normalen $x = x'$, woraus folgt

$$k_n^3 \equiv x^3 + 2xy + 4 = 0 \tag{15}$$

als die Gleichung der 3-zirkulären Kubik (Fig. 4.).

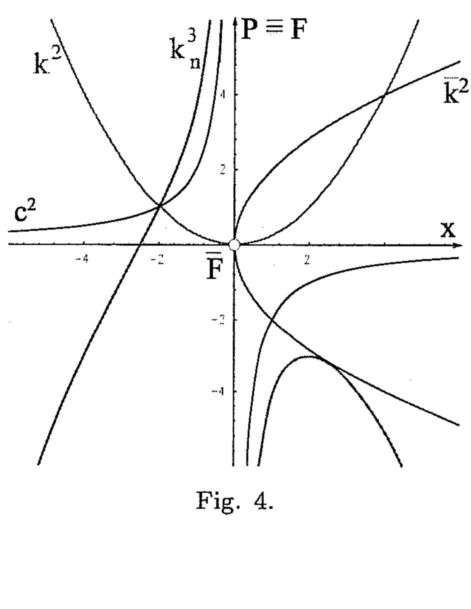

Fig. 4.

3.2. Fall 2). Ist nun als Grundkegelschnitt ein isotroper Kreis mit der Gleichung (12) gegeben und man sucht die Fußpunktkurve einer Parabel, welche die Gleichung

$$\overline{k}^2 \equiv y^2 - x = 0 \tag{16}$$

besitzt, bekommt man nach der bekannten Rechnung als der Polenkegelschnitt

$$k^2 \equiv 2xy + 1 = 0, \tag{17}$$

was eine spezielle Hyperbel bedeutet. Als die Fußpunktkurve erhält man

$$k_n^3 \equiv 2x^3 - 2xy + 1 = 0, \tag{18}$$

was wieder eine 3- zirkuläre Kubik mit dem Knoten im absoluten Punkt ist, bzw. als Tridens bezeichnet wird (Fig.5.).

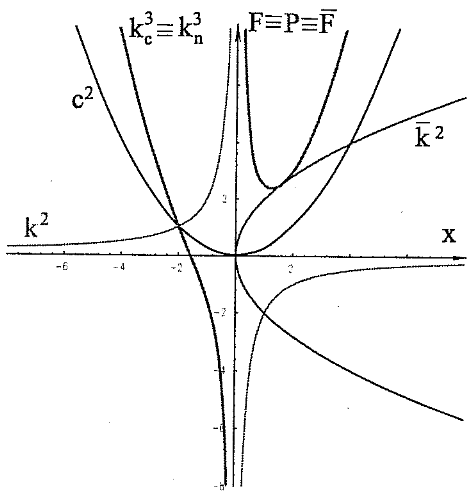

Fig. 5.

Literatur

[1] PALMAN, D.: Über zirkuläre Kurven 3. Ordnung der isotropen Ebene, *Rad JAZU* **444** (1989), 222–251.

[2] SACHS, H.: Ebene isotrope Geometrie, Braunschweig–Wiesbaden, 1987.

[3] SZIROVICZA, V.: Die Fußpunktskurven der Kegelschnitte in der isotropen Ebenen, KoG1(1996), 3–5.