Mathematica Pannonica
13/1 (2002), 41–50

ZWEI ZYLINDERPROBLEME IM EUKLIDISCHEN RAUM

Ferenc **Mészáros**

Institut für Mathematik und Angewandte Geometrie der Montanuniversität Leoben, Franz-Josef Straße 18, A-8700 Leoben

Herrn o. Univ.-Prof. Dr. H. Sachs zum 60. Geburtstag gewidmet

Received: April 2001

MSC 2000: 51 N 20, 51 M 30

Keywords: Mutually skew straight lines in euclidean 3 space, cylinders of revolution, resultants.

Abstract: In this paper we investigate two problems concerning cylinders of revolution and line- geometry. Problem I: Given 4 mutually skew straight lines $\{g_1, \ldots, g_4\}$ in a 3-dimensional euclidean space. Does exist a cylinder of revolution with given radius d which touches the lines $\{g_1, \ldots, g_4\}$? Problem II: Given 5 mutually skew straight lines $\{g_1, \ldots, g_5\}$ in a 3-dimensional euclidean space. Does exist a cylinder of revolution which touches the lines $\{g_1, \ldots, g_5\}$? Both problems are solved with methods of line- geometry resp. resultants and we show that the first problem has 32 solutions, the second one 512 solutions over the complex field $\mathbb{C}$.

1. Problemstellung und theoretische Lösung

Wir beschäftigen uns im folgenden mit zwei Zylinderproblemen im dreidimensionalen euklidischen Raum E_3:
Problem I: Gegeben sind 4 paarweise windschiefe Geraden $\{g_1, \ldots, g_4\}$ im E_3. Gibt es einen Drehzylinder vom Radius d, der $\{g_1, \ldots, g_4\}$ berührt? Diese Fragestellung kann auch so formuliert werden: Gibt es eine Projektionsrichtung s, derart, daß bei Normalprojektion in Rich-

tung s, die Bildgeraden $\{g_1^n, \ldots, g_4^n\}$ einen Kreis vom Radius d berühren?

Problem II: Gegeben sind 5 paarweise windschiefe Geraden $\{g_1, \ldots \ldots, g_5\}$ im E_3. Gibt es einen Drehzylinder, der $\{g_1, \ldots, g_5\}$ berührt? Dieses "five line problem" läßt sich auch so formulieren: Gibt es eine Projektionsrichtung s, derart, daß bei Normalprojektion in Richtung s, die Bildgeraden $\{g_1^n, \ldots, g_5^n\}$ einen Kreis berühren?

Diese beiden Problemstellungen hängen eng mit Fragestellungen zusammen, die in [1], [2], [3], [6] und [7] gelöst wurden.

Wir beziehen den dreidimensionalen euklidischen Raum E_3 auf kartesische Koordinaten $\{U, x, y, z\}$, wobei U den Koordinatenursprung bezeichnet. Die Behandlung windschiefer Geraden mit Hilfe der Vektorrechnung ist relativ unhandlich. Dies ist der Grund, warum man zur Behandlung von Aufgaben über Geraden im Raum E_3 Plücker–Koordinaten heranzieht.

Die theoretische Lösung beider Fragestellungen erfolgt mit Hilfe einer Formel von D. Sommerville (vgl. [8]). Sind p und q zwei Geraden mit den Plücker–Koordinaten (vgl. [5, 38f]) (p_i) und (q_i) $(i = 1, \ldots, 6)$, so gilt für den Abstand $d(p, q)$ zwischen p und q

$$(1.1) \qquad d(p,q) = \frac{\Omega(p,q)}{\sqrt{(p_2q_3 - q_2p_3)^2 + (p_1q_3 - p_3q_1)^2 + (p_1q_2 - p_2q_1)^2}}$$

mit $\Omega(p, q) = p_1q_4 + p_2q_5 + p_3q_6 + p_4q_1 + p_5q_2 + p_6q_3$. Legen wir eine Gerade g in die z-Achse eines kartesischen Koordinatensystems, so gilt $g(0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0)$ und nach (1.1) findet man für alle Geraden p, die von g den Abstand d besitzen

$$(1.2) \qquad d = \frac{p_6}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}, \text{d.h. } d^2(p_1^2 + p_2^2) = p_6^2.$$

Dies ist für $d \neq 0$ ein quadratischer Geradenkomplex. Die Singularitätenfläche besteht aus dem gesamten E_3, die Komplexkurven sind Ellipsen bzw. parallele Geradenpaare über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

Man erhält damit die Lösungsgeraden des Problems I als Schnittgeraden von 4 quadratischen Geradenkomplexen des Typs (1.2) und dies ergibt $N = 2 \cdot 16 = 32$ Lösungsgeraden als Zylinderachsen über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen (vgl. [4, 33]). wir vermerken den

Satz1. *Zu 4 paarweise windschiefen Geraden $\{g_1, \ldots, g_4\}$ des dreidimensionalen euklidischen Raumes E_3 existieren über dem Körper $\mathbb{C}$*

der komplexen Zahlen im algebraischen Sinn 32 *Drehzylinder vom vorgegebenen Radius* d, *die* $\{g_1, \ldots, g_4\}$ *berühren.*

Nun seien 2 windschiefe Geraden g und q gegeben. Wir legen g in die z-Achse eines kartesischen Koordinatensystems. Dann gilt $g(0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0)$. Man kann dann noch erreichen, daß die Gerade q die y-Achse orthogonal schneidet. Mit $\overline{UN} = a$ und dem Richtungsvektor $\overrightarrow{v} = (v_1, 0, v_3)$ besitzt q die Plücker-Koordinaten $q(v_1 : 0 : v_3 : av_3 0 : -av_1)$. Nach (1.1) berechnet man für eine Gerade $p(p_i)$

$$d(p, q) = \frac{av_3p_1 - av_1p_3 + v_1p_4 + v_3p_6}{\sqrt{p_2^2(v_1^2 + v_3^2) + (p_1v_3 - p_3v_1)^2}}.$$

Wird $\overrightarrow{v}$ normiert, d.h. $|\overrightarrow{v}|^2 = v_1^2 + v_3^2 = 1$ gesetzt, so folgt aus obigem und (1.2) für alle Geraden p, die von g und q gleichen Abstand besitzen

$$(1.3) \qquad \frac{p_6}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} = \frac{av_3p_1 - av_1p_3 + v_1p_4 + v_3p_6}{\sqrt{p_2^2 + (p_1v_3 - p_3v_1)^2}}$$

bzw.

$$(1.4) \quad p_6^2\left[p_2^2 + (p_1v_3 - p_3v_1)^2\right] = (p_1^2+p_2^2)[a(v_3p_1-v_1p_3)+v_1p_4+v_3p_6]^2.$$

Dies ist ein Geradenkomplex 4. Ordnung. Alle Geraden, die von $\{g_1, \ldots$ $\ldots, g_5\}$ gleichen Abstand haben, ergeben sich somit als Schnitt von 4 Geradenkom-plexen 4. Ordnung des Typs (1.4). Damit erhält man (vgl. [4, 33]) $N = 2 \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4) = 512$ Lösungsgeraden als Zylinderachsen über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.damit haben wir den

Satz 2. *Zu* 5 *paarweise windschiefen Geraden* $\{g_1^n, \ldots, g_5^n\}$ *existieren über dem Körper* $\mathbb{C}$ *der komplexen Zahlen* 512 *Drehzylinder, die* $\{g_1^n, \ldots$ $\ldots, g_5^n\}$ *berühren.*

2. Herleitung einer Hilfsformel

Gegeben sei ein Drehzylinder Φ mit der Achse a, beschrieben durch einen normierten Richtungsvektor $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $|\overrightarrow{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$, und einen Aufpunkt $A(a_1, a_2, a_3) \in a$ auf der Zylinderachse a, wobei wir für $\overrightarrow{UA} = \overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ voraussetzen $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{v} = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$. Besitzt Φ den Radius d, dann lautet die Gleichung von Φ nach [1, 33]

$$(2.1)\quad \Phi \ldots (x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2-(v_1x+v_2y+v_3z)^2=d^2.$$

Gegeben sei weiters eine Richtung durch den Fernpunkt $E(0:e_1:e_2:$ $:e_3)$. Wir bestimmen die Tangentialebenen von Φ, die die Richtung $E(0:e_1:e_2:e_3)$ besitzen. Dies ist auf direktem Wege sehr mühsam. Da aber diese Fragestellung affin-invariant ist, wenden wir auf (2.1) die Affinität

$$(2.2)\qquad \begin{cases} x=\overline{x}+v_1\overline{z}+a_1 \\ y=\overline{y}+v_2\overline{z}+a_2 \qquad \text{mit } v_3\neq 0 \\ z=\qquad v_3\overline{z}+a_3 \end{cases}$$

an. Der Sonderfall $v_3=0$ muß getrennt untersucht werden. Nach kurzer Rechnung erhält man aus (2.1)

$$(2.3)\qquad F\equiv(1-v_1^2)\overline{x}^2+(1-v_2^2)\overline{y}^2-2v_1v_2\overline{x}\,\overline{y}-d^2=0$$

und die Richtung $E(0:e_1:e_2:e_3)$ geht in

$$(2.4)\qquad \overline{E}(v:\overline{e}_1:\overline{e}_2:\overline{e}_3)$$

mit

$$(2.5)\qquad e_1=\overline{e}_1+v_1\overline{e}_3,\quad e_2=\overline{e}_2+v_2\overline{e}_3,\quad e_3=v_3\overline{e}_3$$

über. Aus (2.2) bzw. (2.5) findet man sofort die Umkehrabbildungen

$$(2.6)\qquad \begin{cases} \overline{x}=x-\dfrac{v_1}{v_3}z+\dfrac{1}{v_3}(v_1a_3-v_3a_1) \\ \overline{y}=y-\dfrac{v_2}{v_3}z+\dfrac{1}{v_3}(v_2a_3-v_3a_2) \\ \overline{z}=\dfrac{1}{v_3}(z-a_3) \end{cases}$$

bzw.

$$(2.7)\qquad \overline{e}_1=e_1-\frac{v_1}{v_3}e_3,\quad \overline{e}_2=e_2-\frac{v_2}{v_3}e_3,\quad \overline{e}_3=\frac{e_3}{v_3}.$$

Die Tangentialebene $\overline{\tau}$ an (2.3) ist einfach zu bestimmen. Man bildet aus (2.3) die partiellen Ableitungen $F_{\overline{x}}=2(1-v_1^2)\overline{x}-2v_1v_2\overline{y}$, $F_{\overline{y}}=$ $=2(1-v_2^2)\overline{y}-2v_1v_2\overline{x}$, und berechnet damit in einem Zylinderpunkt $P(\overline{x}_0,\overline{y}_0,\overline{z}_0)$ als Gleichung von $\overline{\tau}$

$$(2.8)\qquad \left[(1-v_1^2)\overline{x}_0-v_1v_2\overline{y}_0\right](\overline{x}-\overline{x}_0)+\left[(1-v_2^2)\overline{y}_0-v_1v_2\overline{x}_0\right](\overline{y}-\overline{y}_0)=0$$

bzw. mit den Abkürzungen

$$(2.9) \qquad \overline{A} := (1-v_1^2)\overline{x}_0 - v_1v_2\overline{y}_0, \quad \overline{B} := (1-v_2^2)\overline{y}_0 - v_1v_2\overline{x}_0$$

nach einer kleinen Zwischenrechnung

$$(2.10) \qquad \overline{A}\overline{a} + \overline{B}\overline{y} = d^2.$$

Da $P(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0)$ in der Tangentialebene $\overline{\tau}$ liegt, gilt

$$(2.11) \qquad \overline{A}\overline{x}_0 + \overline{B}\overline{y}_0 = d^2.$$

Da $\overline{E}$ ebenfalls in $\overline{\tau}$ liegen soll, folgt aus (2.10)

$$(2.12) \qquad \overline{A}\overline{e}_1 + \overline{B}_1\overline{e}_2 = 0.$$

Wir fassen nun (2.9) als Gleichungssystem in $\overline{x}_0$ und $\overline{y}_0$ auf und berechnen daraus

$$(2.13\text{ a, b}) \quad \overline{x}_0 = \frac{1}{v_3^2}\left[\overline{A}(1-v_2^2)+\overline{B}v_1v_2\right], \quad \overline{y}_0 = \frac{1}{v_3^2}\left[\overline{B}(1-v_1^2)+\overline{A}v_1v_2\right].$$

Aus (2.13 a, b) und (2.11) gewinnt man schließlich die Gleichung

$$(2.14) \qquad \overline{A}^2(1-v_2^2) + 2\overline{A}\,\overline{B}v_1v_2 + \overline{B}^2(1-v_1^2) = d^2v_3^2,$$

die man mittels $\overline{B} = -\overline{A}\frac{\overline{e}_1}{\overline{e}_2}$ aus (2.12) umformen kann zu

$$(2.15) \qquad \overline{A}^2\left[(1-v_2^2)\overline{e}_2^2 - 2\overline{e}_1\overline{e}_2v_1v_2 + \overline{e}_1^2(1-v_1^2)\right] = d^2v_3^2\overline{e}_2^2.$$

Damit gewinnt man die Lösungen

$$(2.16) \qquad \begin{aligned} \overline{A} &= \frac{\pm d\overline{e}_2v_3}{\sqrt{(1-v_2^2)\overline{e}_2^2 - 2\overline{e}_1\overline{e}_2v_1v_2 + (1-v_1^2)\overline{e}_1^2}} \\ \overline{B} &= \frac{\mp d\overline{e}_1v_3}{\sqrt{(1-v_2^2)\overline{e}_2^2 - 2\overline{e}_1\overline{e}_2v_1v_2 + (1-v_1^2)\overline{e}_1^2}}. \end{aligned}$$

Die Tangentialebenen sind durch

$$(2.17) \qquad \overline{A}\overline{x} + \overline{B}\overline{y} - d^2 = 0$$

festgelegt. Nun werden die Gleichungen (2.16) und (2.17) mittels (2.6) und (2.7) zurücktransformiert. Man findet

$$(2.18) \qquad A = \pm\frac{d(e_2v_3 - v_2e_3)v_3}{W}, \quad B = \mp\frac{d(e_1v_3 - v_1e_3)v_3}{W},$$

wobei W die Quadratwurzel von

$$(1-v_2^2)(e_2v_3-v_2e_3)^2-$$
$$-2v_1v_2(e_2v_3-v_2e_3)(e_1v_3-v_1e_3)+(1-v_1^2)(e_1v_3-v_1e_3)^2$$

bezeichnet. Für die Tangentialebene τ stellt sich ein:

$$\begin{aligned} Av_3x+Bv_3y-(Av_1+Bv_2)z+A(v_1a_3-v_1a_3-v_3a_1)+\\ +B(v_2a_3-v_3a_2)=d^2v_3. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Die Koeffizienten in (2.19) lassen sich noch näher berechnen. Man erhält

$$Av_1+Bv_2=\frac{dv_3^2(e_2v_1-e_1v_2)}{W} \quad \text{und} \tag{2.19 a}$$

$$A(v_1a_3-v_3a_1)+B(v_2a_3-v_3a_2)= \tag{2.19 b}$$
$$=\frac{dv_3^2}{W}\left[e_1(v_3a_2-v_2a_3)+e_2(v_1a_3-v_3a_1)+e_3(v_2a_1-v_1a_2)\right].$$

Mit den Abkürzungen

$$\alpha_1:=v_3a_2-v_2a_3,\quad \alpha_2:=v_1a_3-v_3a_1,\quad \alpha_3:=v_2a_1-v_1a_2, \tag{2.19 c}$$

ergibt sich dann

$$A(v_1a_3-v_3a_1)+B(v_2a_3-v_3a_2)=\frac{dv_3^2}{W}\left[\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_2e_2\right]. \tag{2.20}$$

Die Gleichung (2.19) mit (2.19 a), (2.20) und (2.18) stellt die gesuchte Hilfsformel dar, die in §3 zur rechnerischen Lösung beider Probleme verwendet wird.

3. Die rechnerische Lösung der beiden Zylinderprobleme

Zur Lösung des Problems I legen wir um die Geraden $\{g_1,\dots g_4\}$ Drehzylinder $\Phi_1,\dots,\Phi_4$ vom Radius d und suchen ihre gemeinsamen Tangenten auf; diese sind die Achsen der gesuchten Drehzylinder vom Radius d, die $\{g_1,\dots,g_4\}$ berühren. Wir wählen g_1 und g_2 in der Normaldarstellung

$$
(3.1\text{ a-b})\qquad
\begin{aligned}
g_1 \ldots \qquad \overrightarrow{x} &= \left(0, 0, \frac{1}{2}l\right) \;\; + \lambda\left(\cos\frac{\varphi}{2}, -\sin\frac{\varphi}{2}, 0\right) \\
g_2 \ldots \qquad \overrightarrow{x} &= \left(0, 0, -\frac{1}{2}l\right) + \lambda\left(\cos\frac{\varphi}{2}, \sin\frac{\varphi}{2}, 0\right).
\end{aligned}
$$

Hierbei wurde die z- Achse des zugrundegelegten Koordinatensystems in die Gemeinnormale n von g_1 und g_2 gelegt und der Normalabstand von g_1 und g_2 mit l bezeichnet. φ ist der Kreuzungswinkel von g_1 und g_2. Die Darstellungen (3.1) sind normiert im Sinne von §2, d.h. es gilt $|\overrightarrow{v}|^2 = 1$, $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{a} = 0$. Ähnlich wie in §2 findet man für den Drehzylinder Φ_1 mit der Achse g_1 ((3.1a)) vom Radius d die Tangentialebenen τ_1 und $\overline{\tau}_1$ durch den Fernpunkt $E(0 : e_1 : e_2 : e_3)$ zu

$$
(3.2)\qquad A_1 \sin\frac{\varphi}{2}x + A_1\cos\frac{\varphi}{2}y + B_1 z - \frac{1}{2}lB_1 - d^2 = 0
$$

mit

$$
(3.3\text{ a,b})\qquad A_1 = \pm\frac{de_3}{W_1}, \quad B_1 = \mp\frac{d\left(e_1\sin\frac{\varphi}{2} + e_2\cos\frac{\varphi}{2}\right)}{W_1}
$$

und der Abkürzung

$$
W_1 := \sqrt{\left(e_1\sin\frac{\varphi}{2} + e_2\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2 + e_3^2}.
$$

Für den Drehzylinder Φ_2 mit der Achse g_2 ((3.16)) vom Radius d erhält man analog τ_2 und $\overline{\tau}_2$

$$
(3.4)\qquad A_2 \sin\frac{\varphi}{2}x - A_2\cos\frac{\varphi}{2}y + B_2 z + \frac{1}{2}lB_2 - d^2 = 0
$$

mit

$$
(3.5\text{ a,b})\qquad A_2 = \pm\frac{de_3}{W_2}, \quad B_2 = \mp\frac{d\left(e_1\sin\frac{\varphi}{2} - e_2\cos\frac{\varphi}{2}\right)}{W_2}.
$$

und der Abkürzung

$$
W_2 := \sqrt{\left(e_1\sin\frac{\varphi}{2} - e_2\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2 + e_3^2}.
$$

Die Tangentialebenen τ_1, τ_2 und τ_3 haben nach (2.19) den Fernpunkt $E(0 : e_1 : e_2 : e_3)$ gemeinsam. Sie gehören einem Büschel an und liefern damit eine gemeinsame Tangente von Φ_1, Φ_2 und Φ_3, wenn sie einen weiteren Punkt gemeinsam haben. Wir wählen dazu einen Punkt in der Ebene $z = 0$. Hiermit entsteht aus (3.2) und (3.4) das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A_1 \sin\frac{\varphi}{2}x + A_1\cos\frac{\varphi}{2}y &= d^2 + \frac{1}{2}lB_1 \\ A_2 \sin\frac{\varphi}{2}x - A_2\cos\frac{\varphi}{2}y &= d^2 - \frac{1}{2}lB_2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

mit der Lösung

$$x = \frac{d(W_1+W_2) - le_2\cos\frac{\varphi}{2}}{2e_3\sin\frac{\varphi}{2}}, \quad y = \frac{d(W_1-W_2) - le_1\sin\frac{\varphi}{2}}{2e_3\cos\frac{\varphi}{2}}. \tag{3.7}$$

Wird schließlich (3.7) in (2.19) mit $z = 0$ eingesetzt, so erhält man die gesuchte Bedingung. Es empfiehlt sich noch $e_3 = 1$ zu normieren. Dann vereinfachen sich A und B aus (2.18) zu

$$A = \pm\frac{d(e_2v_3 - v_2)}{\widetilde{W}}, \quad B = \mp\frac{d(e_1v_3 - v_1)}{\widetilde{W}} \tag{3.8}$$

mit der Abkürzung

$$\widetilde{W} := \sqrt{(1-v_1^2)e_1^2 + (1-v_2^2)e_2^2 - 2v_1v_2e_1e_2 - 2v_1v_3e_1 - 2v_2v_3e_2 + (1-v_3^2)}.$$

Verwendet man weiters auch die früher eingeführte Abkürzungen im Fall $e_3 = 1$, d.h.

$$W_1 = \sqrt{1 + \left(e_1\sin\frac{\varphi}{2} + e_2\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2},$$
$$W_2 = \sqrt{1 + \left(e_1\sin\frac{\varphi}{2} - e_2\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2},$$

so findet man die gesuchte Bedingung

$$\begin{aligned} & W_1\left[-d\sin\frac{\varphi}{2}v_3e_1 + d\cos\frac{\varphi}{2}v_3e_2 + d\sin\frac{\varphi}{2}v_1 - d\cos\frac{\varphi}{2}v_2\right] + \\ & +W_2\left[d\sin\frac{\varphi}{2}v_3e_1 + d\cos\frac{\varphi}{2}v_3e_2 - d\sin\frac{\varphi}{2}v_1 - d\cos\frac{\varphi}{2}v_2\right] + \\ & +\left[e_1^2lv_3\sin^2\frac{\varphi}{2} - e_2^2lv_3\cos^2\frac{\varphi}{2} + \alpha_3\sin\varphi + e_2\left(lv_2\cos^2\frac{\varphi}{2} + \alpha_2\sin\varphi\right) + \right. \\ & \left. +e_1\left(-lv_1\sin^2\frac{\varphi}{2} + \alpha_1\sin\varphi\right)\right] = d\sin\varphi\widetilde{W}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Die Computerberechnung zeigt, daß (3.9) ein Polynom vom Grad 16 in e_1 und e_2, genannt $F_1(e_1, e_2)$ ist. Für die Geraden g_1, g_2 und g_4 wird nun eine analoge Bedingung $F_2(e_1, e_2)$ aufgestellt und anschließend über die Resultante $R(e_2) = 0$ die gemeinsamen Lösungen von $F_1 = 0$ und $F_2 = 0$ bestimmt. Aus $\vec{e} = (e_1, e_2, 1)$ und (3.7) erhält man schließlich die Lösungsgeraden. Wir vermerken den

Satz 3. *Die* 32 *berührenden Drehzylinder von* 4 *paarweise windschiefen Geraden erhält man über dem Körper* $\mathbb{C}$ *der komplexen Zahlen als gemeinsame Nullstellen zweier algebraischer Kurven* 16. *Schnittpunkte Ordnung der Bauart* (3.10).

Die Gleichung (3.10), aufgefasst als Gleichung in den Variablen e_1, e_2 und d beschreibt eine algebraische Fläche der Ordnung 24, die durch G_1 (e_1, e_2, d) festgelegt wird. Bildet man für die Geraden (g_1, g_2, g_4) und (g_1, g_2, g_5) analog die Gleichungen G_2 $(e_1, e_2, d) = 0$ und G_3 $(e_1, e_2, d) = 0$, so hat man die gemeinsamen Lösungen (e_1, e_2, d) von $G_1 = 0$, $G_2 = 0$ und $G_3 = 0$ zu suchen. Dies geschieht mittels einer Kette von Resultanten (vgl. [9, 103f]):

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
G_1(e_1, e_2, d) = 0 \arrow[dr, dash] & & G_2(e_1, e_2, d) = 0 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & G_3(e_1, e_2, d) = 0 \arrow[dl, dash] \\
& R_1(e_2, d) = 0 \arrow[dr, dash] & & R_2(e_2, d) = 0 \arrow[dl, dash] & \\
& & R_3(d) = 0 & &
\end{tikzcd}$$

Ausgehend von den Nullstellen von R_3 $(d) = 0$ ist nun zurückzurechnen, wobei die gemeinsamen Lösungen (e_1, e_2, d) auszufiltern sind. Damit haben wir den

Satz 4. *Die* 512 *berührenden Drehzylinder von* 5 *paarweise windschiefen Geraden erhält man über dem Körper* $\mathbb{C}$ *der komplexen Zahlen als Schnitt-punkte von drei algebraischen Flächen* 24. *Ordnung der Bauart* (3.10).

Die praktische Berechnung von Beispielen benötigt sehr viel Speicher am Computer und ist daher nur mit einem modernen Super- Computer auszuführen.

Literature

[1] HUSTY, M. und SACHS, H.: Abstandsprobleme zu windschiefen Geraden I, *Sitz.- berichte d. Österr. Akad. Wiss. Wien* **203** (1994), 31–55.

[2] MÉSZÁROS, F.: Ein Kugelproblem im Flaggenraum, *Mathematica Pannonica* **7**/1 (1996), 23–31.

[3] MÉSZÁROS, F. und SACHS, H.: Zur Kugelgeometrie des einfach isotropen Raumes, *Publ. Math. Debrecen* **46** (1995), 41–62.

[4] MÜLLER, E. und KRAMES, J.: Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Bd. III: Konstruktive Behandlung der Regelflächen, Franz Deuticke, Leipzig und Wien 1931.

[5] SACHS, H.: Isotrope Geometrie des Raumes, Vieweg-Verlag, Braunschweig-Wiesbaden, 1990.

[6] SACHS, H.: Ein Kugelproblem im euklidischen Raum, *Mathematica Pannonica* **6**/1 (1995), 11–28.

[7] SACHS, H.: Paschen- Kugeln, *Berg- und Hüttenmännische Monatshefte* **140**/9 (1995), 400–403.

[8] SOMMERVILLE, D. M. Y.: Analytical Geometry of Three Dimensions, Cambridge University Press, 1934.

[9] Van der WAERDEN, B. L.: Algebra I, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg/New York 1966.