Mathematica Pannonica
12/2 (2001), 235 – 244

ÜBER PERIPHERE EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN BEI GEWISSEN REGULÄREN OPERATOREN

Andreas **Neeb**

Siemens Financial Services, Suite 6204-5, Central Plaza, 18 Harbour Road, Wanchai, Hong Kong

Egon **Scheffold**

Technische Universität Darmstadt, Fachbereich Mathematik, Schloßgartenstr. 7, D-64289 Darmstadt

Received: March 2000

MSC 2000: 47 A 75, 47 B 65

Keywords: Regular operators, peripheral eigenvalues.

Abstract: In this paper we show that for certain regular opeators on Banach lattices with order continuous norm one can construct new peripheral eigenvalues with the aid of two non disjoint peripheral eigenvectors. Furthermore we prove a kind of polar decomposition for these opeators on the band generated by the peripheral eigenvectors.

In der Arbeit [2] wurden die Fixräume regulärer Operatoren, die eine gewisse Eigenschaft $(\mathcal{E})$ besitzen, als Austausch-Unterräume charakterisiert. Ist α ein peripherer Eigenwert des Operators T mit zugehörigem Eigenvektor x, so ist x Fixvektor des Operators $\frac{1}{\alpha}T$. Es ist

E-mail address: scheffold@mathematik.tu-darmstadt.de

daher klar, daß zwischen der Austausch-Eigenschaft und den Eigenvektoren ein Zusammenhang besteht, welchen wir in der vorliegenden Note studieren wollen. Wir zeigen unter anderem, daß man bei regulären Operatoren mit der Eigenschaft $(\mathcal{E})$ mit Hilfe von zwei nicht disjunkten peripheren Eigenvektoren weitere Eigenvektoren erhalten kann, was neu zu sein scheint (s. Sätze 4 und 5). Ferner beweisen wir für diese Operatoren eine Polar-Zerlegung auf dem von den peripheren Eigenvektoren erzeugten Band.

0. Vorbemerkungen

Im folgenden sei E ein reeller Banachverband mit ordnungsstetiger Norm und $E_{\mathbb{C}}$ seine Komplexifizierung. Für $0 \neq x \in E_{\mathbb{C}}$ sei $(E_{\mathbb{C}})_x$ das von x erzeugte Hauptideal in $E_{\mathbb{C}}$. Ferner bezeichne P_x die Bandprojektion auf das von x erzeugte Hauptband $\overline{(E_{\mathbb{C}})_x}$.

In [2] wurde für die Elemente $x \in E$ der Signumsoperator Sign_x erklärt. Die dort angegebene Konstruktion kann wie folgt ganz analog auf den komplexen Banachverband $E_{\mathbb{C}}$ übertragen werden. Für $x = 0$ sei Sign_x der Nulloperator auf $E_{\mathbb{C}}$. Sei nun $x \in E_{\mathbb{C}}$ und $x \neq 0$. In der wohl bekannten Weise identifizieren wir das Hauptideal $(E_{\mathbb{C}})_x$ mit einem komplexen Banachverband $C(X, \mathbb{C})$ stetiger komplexwertiger Funktionen auf einen kompakten Hausdorffraum X. Das Element $|x|$ geht dabei in die Einsfunktion e_X über und das Element x in eine unimodulare Funktion f_x, d.h. $|f_x| = e_X$.

Für die Abbildung $V_x : C(X, \mathbb{C}) \to C(X, \mathbb{C})$, definiert durch

$$V_x(h) = f_x \cdot h \quad \text{für alle} \quad h \in C(X, \mathbb{C}),$$

gilt

$$|V_x(h)| = |h| \quad \text{für alle} \quad h \in C(X, \mathbb{C}).$$

Es läßt sich daher V_x eindeutig zu einer stetigen linearen Abbildung $\tilde{V}_x$ auf dem Hauptband $\overline{(E_{\mathbb{C}})_x}$ fortsetzen. Nun sei per definitionem $\mathrm{Sign}_x := \tilde{V}_x \circ P_x$. Dann gilt

$$\mathrm{Sign}_x |x| = x \quad \text{und} \quad |\mathrm{Sign}_x\, y| = |y| \qquad \text{für alle } y \in \overline{(E_{\mathbb{C}})_x}.$$

Ferner existiert auf dem Band $\overline{(E_{\mathbb{C}})_x}$ der zu Sign_x inverse Operator Sign_x^{-1}.

Ein Endomorphismus S des komplexen Banachverbandes $E_{\mathbb{C}}$ heißt Torsion, falls gilt:

$$|Sz| = |z| \qquad \text{für alle } \ z \in E_{\mathbb{C}}\,.$$

Torsionen sind offensichtlich Isometrien. Auf dem Band $\overline{(E_{\mathbb{C}})_x}$ ist also der Signumsoperator Sign_x eine Torsion und somit auch eine Isometrie.

Es sei T ein regulärer Operator auf dem Banachverband $E_{\mathbb{C}}$, d.h. T ist die Differenz zweier positiver Operatoren auf E. Ferner sei x ein Eigenvektor von T mit $Tx = \alpha x$, $|\alpha| = 1$ und $|T|\,|x| = |x|$. Identifizieren wir das Hauptideal $(E_{\mathbb{C}})_x$ wieder mit $C(X, \mathbb{C})$, so kann die Einschränkung von $|T|$ auf $(E_{\mathbb{C}})_x$ als Markov-Operator auf $C(X, \mathbb{C})$ betrachtet werden, und die im folgenden wichtige Aussage von [1], V. Prop. 7.4, läßt sich mit Hilfe des Signumsoperators wie folgt formulieren:

(0.1): Auf dem Projektionsband $\overline{(E_{\mathbb{C}})_x}$ besitzt der Operator T die Darstellung

$$T = \alpha\ \mathrm{Sign}_x\,|T|\ \mathrm{Sign}_x^{-1}\,.$$

1. Projektionsinvariante Mengen und Austausch-Mengen

Mit Hilfe der Hauptband-Projektionen und den Signumsoperatoren definieren wir die beiden folgenden Begriffe:

Sei $A \subseteq E_{\mathbb{C}}$. Die Menge A heißt projektionsinvariant, falls gilt:

$$P_x(y) \in A \quad \text{für alle } \ x, y \in A\,.$$

Die Menge A heißt Austausch-Menge, falls gilt:

$$\mathrm{Sign}_x\,(|y|) \in A \quad \text{für alle } \ x, y \in A\,.$$

Ist ein Unterraum F von $E_{\mathbb{C}}$ eine Austausch-Menge, so nennen wir F einen Austausch-Unterraum.

Austausch-Unterräume endlich dimensionaler komplexer Banachverbände lassen sich interessanterweise mit Hilfe von orthogonalen Basen charakterisieren.

Satz 1. *Sei $E_{\mathbb{C}}$ der komplexe Vektorverband $\mathbb{C}^n$ aller n-Tupel komplexer Zahlen. Ferner sei V ein Unterraum von $\mathbb{C}^n$ mit* $\dim V = k \leq n$.

Dann sind äquivalent:

(i) *V ist projektionsinvariant.*

(ii) *V besitzt eine orthogonale Basis.*

(iii) *V ist ein Austausch-Unterraum.*

Beweis. (i) $\to$ (ii): Sei $O := \{y_1, \dots, y_\ell\}$ ein maximales orthogonales System in V mit $\ell \le k$. Nach dem Beweis von ([2], Satz 2(b)) gilt dann für die von O und V erzeugten Bänder: $O^{\perp\perp} = V^{\perp\perp}$. Dies bedeutet

$$\omega = \sum_{i=1}^{\ell} P_{y_i}(\omega) \quad \text{für alle } \omega \in V .$$

Ist $\ell = k$, so ist O offensichtlich eine Basis von V.

Sei nun $\ell < k$. Dann gibt es ein $u \in V$ und einen Index $j(1 \le \le j \le \ell)$, so daß die Vektoren y_j und $P_{y_j}(u)$ linear unabhängig sind. Es gibt daher auch ein $\alpha \in \mathbb{C}$ und einen Index $s(1 \le s \le n)$ so daß die s-te Komponente von y_j ungleich Null und die s-te Komponente von $\omega := P_{y_j}(u) - \alpha y_j \in V$ gleich Null ist.

Dann gilt $y_j = P_\omega(y_j) + (y_j - P_\omega(y_j))$ mit $P_\omega(y_j) \ne 0$, $(y_j - - P_\omega(y_j)) \ne 0$ und $P_\omega(y_j) \perp (y_j - P_\omega(y_j))$. Da V projektionsinvariant ist, liegen beide Summanden in V. Durch die vorhergehende Aufspaltung von y_j haben wir das neue maximale Orthogonalsystem $\{O \backslash \{y_j\}\} \cup \{P_\omega(y_j), (y_j - P_\omega(y_j))\}$ erhalten, dessen Anzahl um 1 größer ist. Nach endlich vielen Schritten erhalten wir auf diese Weise eine orthogonale Basis von V.

(ii) $\to$ (iii): Für eine komplexe Zahl α sei

$$\operatorname{Sign}(\alpha) := \begin{cases} 0, & \text{falls } \alpha = 0 \\ \dfrac{\alpha}{|\alpha|}, & \text{falls } \alpha \ne 0 \end{cases}$$

Für $a = (a_i) \in \mathbb{C}^n$ sei der Vektor $\operatorname{Sign}(a) \in \mathbb{C}^n$ definiert durch

$$(\operatorname{Sign}(a))_i := \operatorname{Sign}(a_i) \quad \text{für } 1 \le i \le n .$$

Mit dem komponentenweisen Produkt $*$ von Vektoren (Funktionenprodukt) läßt sich dann der Signumsoperator Sign_a so darstellen:

$$\operatorname{Sign}_a(x) = \operatorname{Sign}(a) * x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{C}^n .$$

Sei $\{y_1, \dots, y_k\}$ eine orthogonale Basis von V. Für zwei Elemente $a = = \sum_{j=1}^k \alpha_j y_j$ und $b = \sum_{j=1}^k \beta_j y_j \in V$ ist zu zeigen: $\operatorname{Sign}_a(|b|) \in V$. Es gilt

$$\operatorname{Sign}(a) = \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Sign}(\alpha_j) \operatorname{Sign}(y_j) \quad \text{und} \quad |b| = \sum_{j=1}^{k} |\beta_j||y_j| .$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{Sign}_a(|b|) &= \mathrm{Sign}(a) * |b| = \\ &= \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Sign}\,(\alpha_j)|\beta_j|(\mathrm{Sign}\,(y_j) * |y_j|) = \\ &= \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Sign}\,(\alpha_j)|\beta_j|y_j \in V\,.\end{aligned}$$

(iii) $\to$ (i): folgt sofort aus [2], Satz 2, (a). $\Diamond$

Daß die Implikation (i) $\to$ (iii) im unendlich dimensionalen Fall i.a. nicht gilt, zeigt das folgende Beispiel im komplexen Banachverband $L^1[0,1]$. Sei V der 2-dimensionale Unterraum der linearen Funktionen. Dann ist für $0 \neq p \in V$ die Bandprojektion P_p stets gleich der Identität. Es ist daher V projektionsinvariant. Für die lineare Funktion $f(x) = x - \frac{1}{2}$ ist die Funktion

$$\mathrm{Sign}_f\,(e_{[0,1]})\,(x) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{für} \quad t = \dfrac{1}{2} \\ 1 & \text{für} \quad \dfrac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

nicht in V enthalten. Es ist daher V kein Austausch-Unterraum.

3. Periphere Eigenwerte und Eigenvektoren

Im folgenden sei T ein regulärer linearer Operator auf dem komplexen Banachverband $E_{\mathbb{C}}$ mit Spektralradius $r(T) = 1$. Ferner besitze T die folgende Eigenschaft $(\mathcal{E})$: $0 \leq x \in E$ und $|T|x \geq x$ impliziert $|T||x| = |x|$.

Ein Eigenwert α von T heißt peripher, falls $|\alpha| = r(T)$ gilt.

Die Eigenschaft $(\mathcal{E})$ ermöglicht es, nach der Vorbemerkung (0.1) die Untersuchung der peripheren Eigenwerte von T auf die Untersuchung der peripheren Eigenwerte von Markov-Operatoren auf Banachverbänden $C(X, \mathbb{C})$ zurückzuführen.

Die Eigenschaft $(\mathcal{E})$ ist z.B. erfüllt, falls eine der beiden folgenden Bedingungen gilt:

(α) Die Norm auf E ist streng monoton, und der Operator $|T|$ ist eine Kontraktion.

(β) Es gibt eine streng positive Linearform μ auf E mit $|T|'\mu \leq \mu$, wobei $|T|'$ der zum Absolutbetrag $|T|$ adjungierte Operator ist.

Versieht man $\mathbb{C}^n$ mit der ℓ^1-Norm, so besitzt nach (β) eine reelle $(n \times n)$-Matrix A die Eigenschaft $(\mathcal{E})$, wenn die Matrix A spaltensubstochastisch ist, d.h. jede Spaltensumme kleiner gleich 1 ist.

Satz 2. *Seien α und β periphere Eigenwerte von T mit $Tu = \alpha u$, $Tv = \beta v$ und $\inf(|u|, |v|) > 0$. Dann gilt:*

(i) $|T|\, P_v(|u|) = P_v(|u|)$ *und*

(ii) $T\, P_v(u) = \alpha\, P_v(u)$.

Beweis. Zu (i): Aus $Tu = \alpha u$ und $Tv = \beta v$ folgt $|u| \leq |T||u|$ *und* $|v| \leq |T||v|$. Aufgrund der Bedingung $(\mathcal{E})$ gilt also $|T||u| = |u|$ und $|T||v| = |v|$. Aus der Bedingung $(\mathcal{E})$ folgt ferner, daß der Fixraum von $|T|$ ein abgeschlossener Vektorunterverband von $E_{\mathbb{C}}$ ist.

Aus der Darstellung $P_v(|u|) = \lim_{n\to\infty} \inf(n|v|, |u|)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} |T|(P_v|u|) &= \lim_{n\to\infty} |T| \inf(n|v|, |u|) \\ &= \lim_{n\to\infty} \inf(n|v|, |u|) = P_v(|u|)\,. \end{aligned}$$

Es ist also $P_v(|u|)$ ein Fixvektor von $|T|$.

Zu (ii): Aus $|T||u| = |u|$ und $|T|P_v(|u|) = P_v(|u|)$ ergibt sich, daß T die beiden Bänder $\{P_v(u)\}^{\perp\perp}$ und $\{u - P_v(u)\}^{\perp\perp}$ invariant läßt. Mit der Zerlegung $u = P_v(u) + (u - P_v(u))$ und mit $\alpha u = Tu$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \alpha P_v(u) + \alpha(u - P_v(u)) &= T(P_v(u)) + T(u - P_v(u))\,, \\ \alpha P_v(u) - T(P_v(u)) &= T(u - P_v(u)) - \alpha(u - P_v(u))\,. \end{aligned}$$

Die linke Seite der letzten Gleichung liegt im Band $\{P_v(u)\}^{\perp\perp}$, die rechte Seite im Band $\{u - P_v(u)\}^{\perp\perp}$. Da die beiden Bänder zueinander orthogonal sind, folgt

$$\alpha P_v(u) - TP_v(u) = 0\,, \quad \text{also } TP_v(u) = \alpha P_v(u)\,. \quad \Diamond$$

Da $P_v(|u|)$ und $P_u(|v|)$ Fixpunkte von $|T|$ sind und $\{P_v(|u|)\}^{\perp\perp} = \{P_u(|v|)\}^{\perp\perp}$ gilt, ist die Frage interessant, ob die Vektoren $P_v(|u|)$ und $P_u(|v|)$ linear unabhängig sind. Wir konnten kein geeignetes Beispiel dafür finden.

Satz 3. *Sei α ein peripherer Eigenwert von T, also $|\alpha| = 1$. Dann ist der Eigenraum F zum Eigenwert α ein Austausch-Unterraum.*

Beweis. Sei $u, v \in F$ und $\mathrm{Sign}_u(|v|) \neq 0$. Nach der Vorbemerkung (0.1) besitzt T auf dem Band $\{u\}^{\perp\perp}$ die Darstellung

$$T = \alpha \operatorname{Sign}_u |T| \operatorname{Sign}_u^{-1} .$$

Aufgrund von $|T|P_u(|v|) = P_u(|v|)$ und $\operatorname{Sign}_u(|v|) = \operatorname{Sign}_u P_u(|v|)$ erhalten wir dann

$$T \operatorname{Sign}_u(|v|) = \alpha \operatorname{Sign}_u |T|P_u(|v|) = \alpha \operatorname{Sign}_u(|v|) .$$

Es ist also $\operatorname{Sign}_u(|v|) \in F$. $\Diamond$

Mit Hilfe von Satz 2 und den Signumsoperatoren können wir jetzt zu zwei nicht disjunkten peripheren Eigenvektoren neue periphere Eigenvektoren konstruieren.

Satz 4. *Der Operator T sei nun sogar positiv. Ferner seien α und β zwei periphere Eigenwerte von T mit $Tu = \alpha u$, $Tv = \beta v$ und* $\inf(|u|), |v|) > 0$. *Für $k, j \in \mathbb{Z}$ sei $w_{k,j} := (\operatorname{Sign}_u^k \cdot \operatorname{Sign}_v^j \cdot P_v)(|u|)$. Dann gilt*

$$T w_{k,j} = \alpha^j \cdot \beta^k \, w_{k,j} .$$

Beweis. Wie bei der Konstruktion der Signumsoperatoren identifizieren wir die Hauptideale $(E_{\mathbb{C}})_{|u|}$ bzw. $(E_{\mathbb{C}})_{|v|}$ mit komplexen Banachverbänden $C(X_1, \mathbb{C})$ bzw. $C(X_2, \mathbb{C})$. Die Einschränkung von T auf diese Ideale ist dann jeweils ein Markov-Operator. Nach der Vorbemerkung (0.1) erhalten wir folgende Darstellungen von T:

Auf dem Band $\{u\}^{\perp\perp}$ gilt $T = \alpha \operatorname{Sign}_u T \operatorname{Sign}_u^{-1}$,

auf dem Band $\{v\}^{\perp\perp}$ gilt $T = \beta \operatorname{Sign}_v T \operatorname{Sign}_v^{-1}$.

Nun ist $\{\inf(|u|), |v|\}^{\perp\perp} = \{u\}^{\perp\perp} \cap \{v\}^{\perp\perp} = \{P_v(u)\}^{\perp\perp}$. Sei $w := P_v(u)$. Da T das Band $\{w\}^{\perp\perp}$ invariant läßt, gelten also gleichzeitig beide Darstellungen auf $\{w\}^{\perp\perp}$. Durch Iteration erhält man für $j, k \in \mathbb{Z}$ die Darstellungen

$$T = \alpha^k \operatorname{Sign}_u^k T \operatorname{Sign}_u^{-k} \quad \text{auf } \{u\}^{\perp\perp} \quad \text{und}$$
$$T = \beta^j \operatorname{Sign}_v^j T \cdot \operatorname{Sign}_v^{-j} \quad \text{auf } \{v\}^{\perp\perp} .$$

Auf dem Band $\{w\}^{\perp\perp}$ gilt daher

$$T = \alpha^k \operatorname{Sign}_u^k \beta^j \cdot \operatorname{Sign}_v^j T \operatorname{Sign}_v^{-j} \operatorname{Sign}_u^{-k} .$$

Aus $TP_v(|u|) = P_v(|u|)$ folgt für $j, k \in \mathbb{Z}$:

$$T w_{k,j} = \alpha^k \cdot \beta^j \operatorname{Sign}_u^k \cdot \operatorname{Sign}_v^j \, T P_v(|u|) = \alpha^k \cdot \beta^j \, w_{k,j} .$$

Da $|w_{k,j}| = P_v(|u|) \neq 0$ ist, ist also $w_{k,j}$ ein Eigenvektor von $|T|$. $\Diamond$

Wenn T nur regulär ist, kann man über Eigenwerte von $|T|$ auch Eigenwerte von T erhalten.

Satz 5. *Sei α ein peripherer Eigenwert von T mit $Tu = \alpha u$ und β ein Eigenwert von $|T|$ mit $|\beta| = 1$ und $|T|z = \beta z$. Ferner gelte*

$\inf(|u|), |z|) > 0$. *Dann ist* $\alpha\beta^k$ *ein peripherer Eigenwert von* T *für alle* $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Setzt man $u = v$ in Satz 4, so erhält man für $|T|$ anstatt T:

$$|T| \operatorname{Sign}_z^k(|z|) = \beta^k \operatorname{Sign}_z^k(|z|) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Sei $w := P_u(z)$. Aus $|T||u| = |u|$ und $|T|z = \beta z$ folgt nach Satz 2:

$$|T|P_{|u|}(z) = \beta\, P_{|u|}(z) \quad \text{also } |T|w = \beta w\,.$$

Nach der Vorbemerkung (0.1) besitzt T auf dem Band $\{u\}^{\perp\perp}$ die Darstellung $T = \alpha \operatorname{Sign}_u |T| \operatorname{Sign}_u^{-1}$.

Da $|T||w| = |w|$ ist, gilt diese Darstellung auch auf dem Band $\{w\}^{\perp\perp}$. Auf $\{w\}^{\perp\perp}$ gilt somit

$$|T| = \alpha^{-1} \operatorname{Sign}_u^{-1} T \operatorname{Sign}_u\,.$$

Mit $|T|w = \beta w$ erhalten wir dann

$$\beta w = \alpha^{-1} \operatorname{Sign}_u^{-1} T \operatorname{Sign}_u(w)$$

und somit

$$T \operatorname{Sign}_u(w) = \alpha\beta \operatorname{Sign}_u(w)\,.$$

Wählt man anstatt z die Eigenvektoren $\operatorname{Sign}_z^k(|z|)$ von $|T|$ zu den Eigenwerten $\beta^k (k \in \mathbb{Z})$, so erhält man die Aussage des Satzes. ◊

Kennt man die peripheren Eigenwerte von T, so läßt sich folgende Aussage über das Spektrum von $|T|$ machen.

Satz 6. *Seien* α *und* β *periphere Eigenwerte von* T *mit* $Tu = \alpha u$, $Tv = \beta v$ *und* $\inf(|u|, |v|) > 0$. *Dann ist* $\alpha^{-1}\beta$ *ein Eigenwert von* $|T|$.

Beweis. Sei $w := P_v(u)$. Wie im Beweis von Satz 4 gelten auf dem Band $\{w\}^{\perp\perp}$ die beiden Darstellungen $T = \alpha \operatorname{Sign}_u |T| \operatorname{Sign}_u^{-1}$ und $T = \beta \operatorname{Sign}_v |T| \operatorname{Sign}_v^{-1}$. Dies bedeutet

$$|T| = \alpha^{-1}\beta \operatorname{Sign}_u^{-1} \operatorname{Sign}_v |T| \operatorname{Sign}_v^{-1} \cdot \operatorname{Sign}_u\,.$$

Aus $|T|\,|w| = |w|$ folgt damit

$$\begin{aligned}|T| \left(\operatorname{Sign}_u^{-1} \cdot \operatorname{Sign}_v(|w|)\right) &= \alpha^{-1}\,\beta \operatorname{Sign}_u^{-1} \operatorname{Sign}_v |T|\,(|w|)\\ &= \alpha^{-1}\,\beta \operatorname{Sign}_u^{-1} \operatorname{Sign}_v(|w|)\,.\end{aligned}$$

Da $|\operatorname{Sign}_u^{-1} \cdot \operatorname{Sign}_v(|w|)| = |w| \neq 0$ ist, ist $\alpha^{-1}\beta$ ein Eigenwert von $|T|$. ◊

3. Eine Art "Polarzerlegung"

Sei S ein beschränkter Endomorphismus auf einem Hilbertraum H. Falls es möglich ist, S in der Form $S = U \cdot P$ darzustellen, wobei U ein unitärer Operator, also eine surjektive Isometrie, ist und P ein positiver Operator ist, so nennt man eine solche Darstellung eine Polar-Zerlegung. Da der Signumsoperator Sign_x auf dem Projektionsband $\overline{(E_{\mathbb{C}})_x}$ eine Isometrie ist, kann die in der Vorbemerkung (0.1) angegebene Darstellung $T = \alpha \, \mathrm{Sign}_x \, |T| \, \mathrm{Sign}_x^{-1}$ als eine Art Polar-Zerlegung auf $\overline{(E_{\mathbb{C}})_x}$ betrachtet werden. Im letzten Kapitel wollen wir zeigen, daß eine solche Darstellung auch auf dem Band, welches von den Eigenvektoren zu unimodularen Eigenwerten erzeugt wird, existiert.

Satz 7. *Die Menge* $G := \{x \in E_{\mathbb{C}} : Tx = \alpha x \,, \alpha \in \mathbb{C}$ *und* $|\alpha| = 1\}$ *sei ungleich* $\{0\}$. *Dann existieren Torsionen* U *und* V *auf dem von der Menge* G *erzeugten Band* B_G, *so daß die Einschränkung von* T *auf* B_G *die folgende Darstellung besitzt:*

$$T = U \, |T| \, V \, .$$

Beweis. Für $0 \neq x \in G$ gilt $T = \alpha \, \mathrm{Sign}_x \, |T| \, \mathrm{Sign}_x^{-1}$ auf $\overline{(E_{\mathbb{C}})_x}$. Das Problem ist, diese lokalen Darstellungen zu der gewünschten Darstellung auf dem Band B_G zusammenzusetzen.

Sei nun $O := \{x_\alpha\}$ ein maximales orthogonales System in G, wobei der Index α gerade der zu x_α gehörige Eigenwert ist, also $Tx_\alpha = \alpha x_\alpha$ ist. Wir beweisen zunächst $G^{\perp\perp} = O^{\perp\perp}$. Es genügt zu zeigen: $G \subseteq O^{\perp\perp}$. Angenommen, es sei $x \in G$ und $x \notin O^{\perp\perp}$. Es sei $Tx = \mu x$ und E_μ der Eigenraum von T zu Eigenwert μ. Ferner bezeichne Q die Bandprojektion auf das Band $O^{\perp\perp}$. Für jedes α gilt $P_{x_\alpha}(x) \in \{x_\alpha\}^{\perp\perp} \cap E_\mu$ aufgrund von Satz 2, (ii). Damit erhalten wir $Qx = \sum_\alpha P_{x_\alpha}(x) \in (O^{\perp\perp} \cap E_\mu)$. Somit ist $0 \neq x - Qx \perp O^\perp$ und $x - Qx \in E_\mu \subseteq G$. Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von O in G. Es ist also $B_G = \{\cup_\alpha x_\alpha\}^{\perp\perp}$.

Die Darstellung $B_G = \{\cup_\alpha x_\alpha\}^{\perp\perp}$ bedeutet aber, das Band B_G ist die abgeschlossene Hülle der direkten Summe der Hauptbänder $\overline{(E_{\mathbb{C}})_{x_\alpha}}$. Wie im Beweis von [2], Satz 2, beschrieben, läßt sich dann die Familie $\{\alpha \, \mathrm{Sign}_{x_\alpha} : x_\alpha \in O\}$ zu einer Torsion $U = \sum_\alpha \alpha \, \mathrm{Sign}_{x_\alpha}$ und die Familie $\{\mathrm{Sign}_{x_\alpha}^{-1} : x_\alpha \in O\}$ zu einer Torsion $V = \sum_\alpha \mathrm{Sign}_{x_\alpha}^{-1}$ zusammensetzen, so daß $T = U \, |T| \, V$ auf B_G gilt. $\Diamond$

Die Aussage des Satzes soll das folgende Beispiel veranschaulichen:

Beispiel. Es sei $E_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^3$ und der Operator T dargestellt durch die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Dann besitzt T die Eigenschaft $(\mathcal{E})$ und die beiden unimodularen Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 1$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $u_1 = (1,0,0)$ und $u_2 = (0,1,-1)$, welche offensichtlich ein maximales orthogonales System in der Menge G bilden. Es ist $B_G = \mathbb{C}^3$, und die Polar-Zerlegung sieht so aus: $T = U\,|T|\,V$ mit

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ |T| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ und } V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Literatur

[1] SCHAEFER, H. H.: Banach Lattices and positive operators, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.

[2] SCHEFFOLD, E.: Fixräume regulärer Operatoren und ein Korovkin-Satz, *J. Functional Analysis* **30** (1978), 147–161.