

DIE PROJEKTIVE ERZEUGUNG DER VOLLSTÄNDIG ZIRKULÄREN KURVEN 3. ORDNUNG IN DER ISOTROPEN EBENE

Ana **Sliepčević**

*Faculty of Civil Engineering, University of Zagreb, 10 000 Zagreb,
Kačićeva 26, Croatia*

Vlasta **Szirovicza**

*Faculty of Civil Engineering, University of Zagreb, 10 000 Zagreb,
Kačićeva 26, Croatia*

Herrn Professor Ludwig Reich zum 60. Geburtstag gewidmet

Received: January 2000

MSC 2000: 51 N 99

Keywords: Geometry, isotropic plane, completely circular cubic.

Abstract: Under the adequate selection of setting elements the product of projectivity between the pencil of circles and the pencil of lines is the entirely circular cubic. The type of generated cubic is determined by the type of the pencil of circles: a touching pencil generates a divergent parabola, an osculation pencil generates a cubic parabola and a hiperosculation pencil generates a tridens curve. It is given a normal form with respect to the group B_3 of isotropic plane. This paper also contains a construction for each of these curves at the finit model of isotropic plane.

Eine isotrope Ebene \mathcal{L}_2 ist eine reelle, affine Ebene $\mathcal{A}_2(\mathcal{R})$, die in der projektiven Erweiterung über eine Absolutfigur $\{f, F\}$ -bestehend

aus einer Geraden f und einem mit f inzidenten Punkt F -metrisiert wird. Nach Einführung projektiver Koordinaten $(x_0 : x_1 : x_2)$ in $\mathcal{I}_2 \subset \mathcal{P}_2$, kann die absolute Gerade f durch $x_0 = 0$ und der absolute Punkt durch $F(0 : 0 : 1)$ beschrieben werden. Alle Transformationen der Gestalt

$$(1) \quad \begin{aligned} x' &= c_1 + \tau x \\ y' &= c_2 + c_3 x + \tau y \end{aligned} \quad \tau \neq 0$$

bilden die (orientationstreue) isotrope Ähnlichkeitsgruppe \mathcal{W}_4 . Mit $\tau = 1$ ergibt sich ihre Teilgruppe der dreiparametrischen isotropen (eigentlichen) Bewegungen \mathcal{B}_3^{++} , $\tau = -1$ würde eine andere Komponente \mathcal{B}_3^{--} zu \mathcal{B}_3^{++} liefern (vgl. [6], [7]). Manchmal brauchen wir z.B. die Spiegelung

$$(1') \quad x'' = -x', \quad y'' = y'$$

zusätzlich dazu. Die vollständige Bewegungsgruppe \mathcal{B}_3 hat noch die Komponenten \mathcal{B}_3^{+-} und \mathcal{B}_3^{-+} .

Eine algebraische Kurve wird als zirkulär bezeichnet, wenn sie den absoluten Punkt F enthält. Im allgemeinen kann eine algebraische Kurve n -ter Ordnung den Punkt F mit Multiplizität $1, 2, \dots, n$ enthalten. Man sagt dann, die Kurve besitzt die Zirkularitätsgrad gleich $1, 2, \dots, n$. Ist die Ordnung der Kurve gleich ihrem Zirkularitätsgrad, dann heißt sie vollständig zirkulär. Eine nicht entartete Kurve 2. Ordnung in $\mathcal{P}_2(\mathcal{R})$, die die absolute Gerade f im Punkt F berührt, wird isotroper Kreis genannt. In der isotropen Ebene \mathcal{I}_2 existiert bezüglich \mathcal{B}_3 eine dreiparametrische Mannigfaltigkeit von isotropen Kreisen, die sich durch

$$(2) \quad y = Rx^2 + \alpha x + \beta \quad (R \neq 0; \alpha, \beta \in \mathcal{R})$$

beschreiben läßt, wobei R eine \mathcal{B}_3 -Invariante, genannt isotroper Kreisradius, ist [vgl. 6]. Isotrope Kreise sind damit die einzigen vollständig zirkulären Kurven 2. Ordnung.

Analog kann man in der isotropen Ebene \mathcal{I}_2 die *zirkulären Kurven 3. Ordnung* definieren, als diejenigen algebraischen Kurven 3. Ordnung, die den absoluten Punkt F enthalten. Da jede Gerade, so auch die absolute Gerade f , eine Kurve 3. Ordnung in drei Punkten schneidet, kann man die zirkulären Kurven 3. Ordnung nach dem Zirkularitätsgrad in drei Klassen einteilen:

- I. die Kurve läuft durch den absoluten Punkt (ohne Berührung der absoluten Geraden),

- II. die Kurve berührt die absolute Gerade im absoluten Punkt, oder hat den absoluten Punkt als Doppelpunkt,
 III. die Kurve berührt und schneidet die absolute Gerade im absoluten Punkt.

In dieser Arbeit werden wir uns nur mit der Klasse III, d.h. mit den *vollständig zirkulären Kurven 3. Ordnung* beschäftigen, also mit denen, die keinen weiteren uneigentlichen Punkt außer F besitzen.

Solche Kurven können wir in drei Typen einteilen:

- a) der absolute Punkt F ist ein Wendepunkt und die absolute Gerade f die Wendetangente der Kurve,
- b) der absolute Punkt F ist eine Spitze 1. Art und die absolute Gerade f die Spitzentangente der Kurve,
- c) der absolute Punkt F ist ein Doppelpunkt, bzw. ein Knoten der Kurve und die absolute Gerade f ist die Tangente eines Zweiges [vgl. 5].

Nach der Newtonschen Klassifikation werden diese Kurven der Reihe nach als

- a) *divergente Parabel* (parabola divergens) mit der Gleichung

$$y^2 = \phi(x)$$

- b) *kubische Parabel* (parabola cubica) mit der Gleichung

$$y = \phi(x)$$

- c) *Dreizahn* (Tridens) mit der Gleichung

$$xy = \phi(x)$$

bezeichnet [vgl. 5]. Hier ist

$$\phi(x) \equiv \bar{a}x^3 + \bar{b}x^2 + \bar{c}x + \bar{d} \quad \text{mit} \quad \bar{a} \neq 0.$$

Im folgenden (Satz 1) werden wir solche Kurven mittels einer Projektivität zwischen einem isotropen Kreisbüschel und einem Geradenbüschel als ihres Gebilde erzeugen und kennzeichnen. Da keine 2-zirkuläre Kubiken betrachtet werden, soll das Zentrum des Geradenbüschels immer ein eigentlicher Punkt sein.

Zwei isotrope Kreise $k_i : y = R_i x^2 + \alpha_i x + \beta_i$ ($i = 1, 2$) der isotropen Ebene können eine der folgenden Lagebeziehungen haben. Sie können sein:

1. zwei inkongruente Kreise. Diese schneiden sich in zwei verschiedenen reellen bzw. zusammenfallenden bzw. konjugiert imaginären Punkten (*Typ 1*).

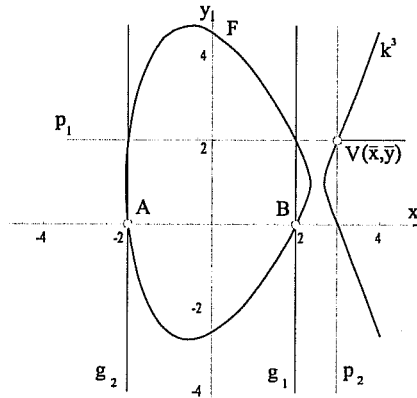


Fig. 2

Diese Kubik enthält die fünf Grundpunkte der beiden Büschel \mathcal{F} und \mathcal{V} . Zwei von ihnen fallen im absoluten Punkt F zusammen. Die vier Schnittpunkte der Geraden p_1 und p_2 mit den singulären Kreisen k_1 und k_2 (siehe Fig. 2), wobei einer von ihnen in den Punkt F fällt, bestimmen über obige fünf Punkte die Kurve eindeutig.

Um die Gestalt dieser Kubik im Unendlichen zu illustrieren, konstruieren wir dieselbe am Modell der isotropen Ebene, wobei $\{F, f\}$ ein eigentliches Linienelement wird.

Die konstruktive Erzeugung der divergenten Parabel wird mittels der Projektivität zwischen der Büschel \mathcal{F} und \mathcal{V} auf die folgende Weise durchgeführt (Fig. 3):

Dem Geradenbüschel \mathcal{V} wurde zunächst z.B. das Büschel \mathcal{B} aller Tangenten im Punkt B zu den Kreisen aus \mathcal{F} zugeordnet. Die drei Paare zugeordneter Elemente sind:

- die "Tangente" t_1 des zerfallenden Kreises $k_1 \equiv AF + BF$, die mit der Gerade BF übereinstimmt, schneiden wir mit der Gerade p_1 im Punkt M . Diese Gerade kann man (in Fig. 3) im Punkt M euklidisch parallel zur Geraden AF wählen, sodaß man den unendlich fernen Punkt der Kubik (euklidisch!) erhält ($\lambda = 0$);
- die Tangente t_2 des zerfallenden Kreises $k_2 \equiv AB + f$, die mit der Gerade AB übereinstimmt, schneidet die Gerade $p_2 \in \mathcal{V}$ im Punkt N . Die Gerade p_2 soll mit der Geraden VF zusammenfallen, weil man nur unter dieser Bedingung eine vollständig zirkuläre Kurve 3. Ordnung bekommen kann ($\lambda = \infty$);
- der Tangente t_3 eines dritten regulären Kreises k_3 im Punkt B

wird derjenigen Gerade p_3 zugeordnet, die man enthält unter Voraussetzung, daß die Geradenbüschel \mathcal{V} und \mathcal{B} nicht nur projektiv sondern auch perspektiv zugeordnet sind ($\lambda = 1$). Die Perspektivitätachse ist mit zwei Punkten $M \equiv t_1 \cup p_1$ und $N \equiv t_2 \cup p_2$ eindeutig bestimmt (k_3 und p_3 haben jetzt imaginäre Punkte gemeinsam).

Zu einer beliebigen Geraden $p \in \mathcal{V}$ ordnen wir zunächst $t \in \mathcal{B}$ sodaß $p \cap t \in MN$. Man bekommt ein t berührendes k vom Kreisbüschel \mathcal{F} und $\{P_1, P_2\} = p \cap k$. Einen solchen Punktepaar unserer Kubik kann man z.B. mit der Steinerschen Konstruktion elementar bestimmen (Fig. 3). Im Fall der Kreis aus \mathcal{F} den Punkt V enthält, wird die zugeordnete Gerade aus \mathcal{V} die Tangente der Kubik im Punkt V .

In Fig. 3 ist ersichtlich, daß F ein Wendepunkt und die Gerade f die Wendetangente im F sind, wie es aus der Gleichung (10) folgt.

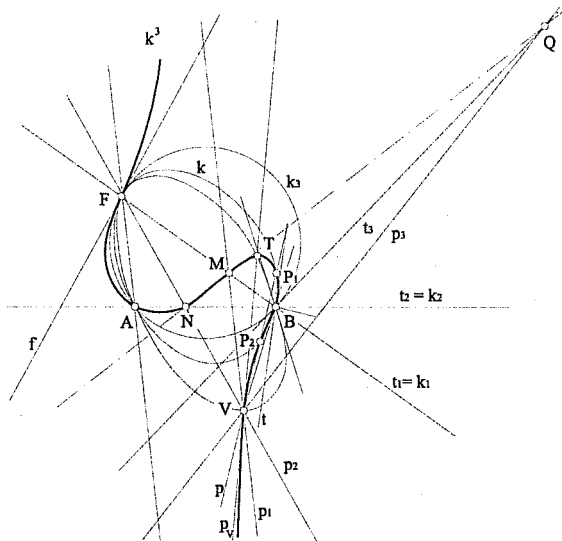


Fig. 3

Beim Fall 2 sind die eigentlichen Grundpunkte A und B eines isotropen Kreisbüschels zusammengefallen. Man kann durch eine isotrope Bewegung erreichen, daß $A = B$ in den Ursprung des zugrunde gelegten Koordinatensystems fällt (Fig. 4a).

Die zwei singulären Kreise sind dann k_1 und k_2 , wobei k_2 auf die Geraden g_3 und g_4 ausgeartet wird (siehe Relation (4)), und als k_1 wird die doppelzählende y -Achse, sodaß gilt

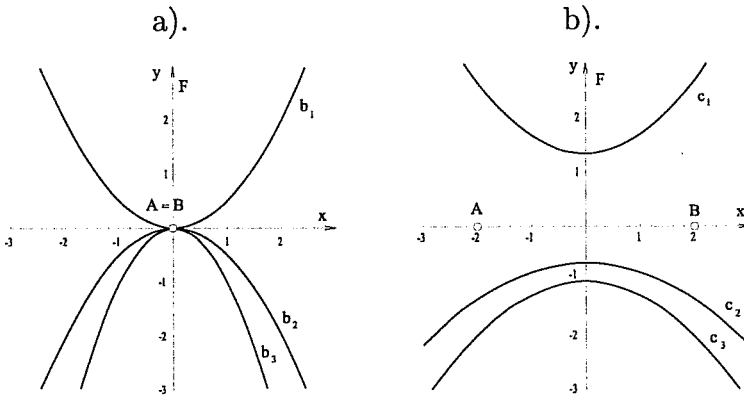


Fig. 4

(11) $k_1 \equiv x^2 = 0.$

Nach dem Einsetzen (11) und (4) ins (5) ergibt sich als Normalform eines Kreisbündels vom Fall 2

(12) $\mathcal{F} \equiv x^2 + \lambda y = 0.$

Die Projektivität zwischen (12) und (9) gibt $x^3 - \bar{x}x^2 - y^2 + \bar{y}y = 0$ und so

(13) $k^3 : \left(y - \frac{\bar{y}}{2}\right)^2 = x^3 - \bar{x}x^2 + \frac{1}{4}\bar{y}^2$

was offensichtlich die Gleichung einer divergenten Parabel ist. Ihre Gestalt ist auf Fig. 5a dargestellt, wobei der Punkt V die Koordinaten $V(3, 2)$ besitzt. Man sieht gleich, daß die x -Achse die Tangente der Kubik mit Berührungspunkt $A = B$ ist.

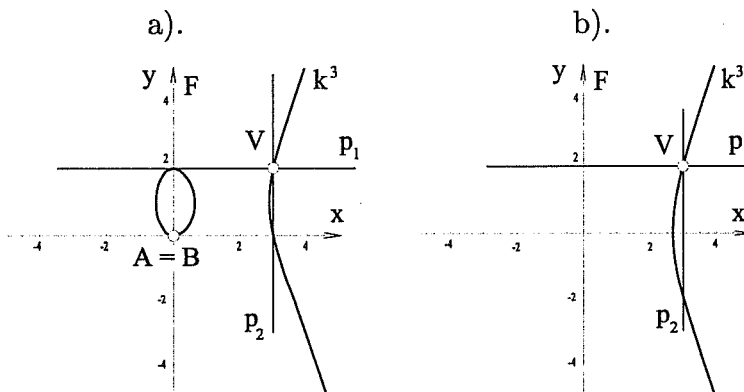


Fig. 5

Beim Fall 3 sind die eigentlichen Grundpunkte des Kreisbündels

ein konjugiert-komplexes Paar (Fig. 4b). Man kann durch eine reelle \mathcal{B}_3 -Transformation erreichen, daß die Grundpunkte A und B die Koordinaten $A(-ia, 0)$ und $B(ia, 0)$ erhalten.

Für den ersten singulären Kreis der gesuchten Kreisbüschels wählen wir

$$(14) \quad k_1 \equiv x^2 + a^2 = 0$$

und der zweite k_2 wird, wie bisher, durch die Relation (4) beschrieben sein. Damit bekommt man als Normalform eines so erzeugten Kreisbüschels

$$(15) \quad \mathcal{F} \equiv x^2 + a^2 + \lambda y = 0.$$

In der projektiven Zuordnung bekommt man aus (15) und (9) die Gleichung

$$x^3 - \bar{x}x^2 + a^2x - a^2\bar{x} - y^2 + \bar{y}y = 0,$$

so

$$(16) \quad k^3 : \left(y - \frac{\bar{y}}{2} \right)^2 = x^3 - \bar{x}x^2 + a^2x + \left(\frac{1}{4}\bar{y}^2 - a^2\bar{x} \right)$$

was wieder eine divergente Parabel ist (Fig. 5b).

Unter diesen drei Fällen findet man keine wichtige Unterschied bei der projektiven Erzeugung und darum werden sie mit eigentlichen $\{F, f\}$ (Fig. 3) nicht mehr betrachtet.

Typ 2

Durch eine isotrope Schiebung legt man den eigentlichen Grundpunkt Q eines Oskulationsbüschels mit dem absoluten Berührelement $\{F, f\}$ in den Ursprung des Koordinatensystems. Die Normalform eines solchen Büschels in affinen Koordinaten wird zu

$$(17) \quad \mathcal{F} \equiv x^2 - 2Ay + \lambda x = 0.$$

berechnet. Der gemeinsame Radius ist $\frac{1}{2A}$.

Die Projektivität zwischen dem Geradenbüschel \mathcal{V} und dem Kreisbüschel \mathcal{F} wird, wie beim Typ 1, mittels des durch den Berührungspunkt Q gelegten Tangentenbüschels erzeugt.

Die Tangentenrichtung eines Kreises aus (17) im Berührungspunkt Q ergibt sich zu

$$(18) \quad k = y'(0) = \frac{\lambda}{2A}$$

und dieselbe für alle Geraden aus \mathcal{V} wird zu

$$(19) \quad k = \frac{y - \bar{y}}{x - \bar{x}}.$$

Durch den Vergleich von (18) und (19) bekommt man für den Parameter

$$(20) \quad \lambda = \frac{2A(y - \bar{y})}{(x - \bar{x})}.$$

Die geometrische Deutung von (20) ist die perspektive Zuordnung zwischen den Geradenbüscheln \mathcal{V} und \mathcal{Q} , wobei die Perspektivitätachse die uneigentliche Gerade f wird.

Nach Einsetzen von (20) in (17) bekommt man

$$x^3 - \bar{x}x^2 - 2A\bar{y}x + 2A\bar{x}y = 0,$$

so

$$(21) \quad k^3 : y = -\frac{1}{2A\bar{x}}x^3 + \frac{1}{2A}x^2 + \frac{\bar{y}}{\bar{x}}x \quad \text{mit } A > 0, \bar{x} \neq 0$$

was offensichtlich eine vollständig zirkuläre Kurve 3. Ordnung ist. Nach der Newtonschen Klassifikation ist es eine kubische Parabel (Fig. 6).

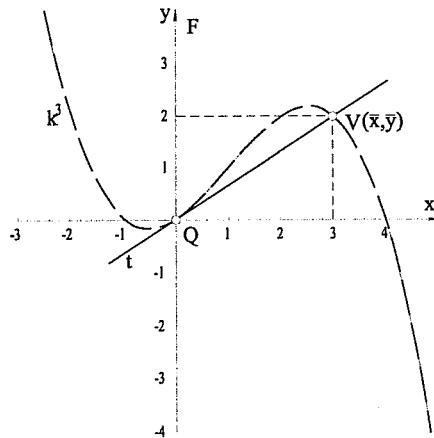


Fig. 6

Die konstruktive Erzeugung ist auf dieselbe Weise durchgeführt worden. Die Gerade VQ ist in der Perspektivität sich selbst zugeordnet, weil sie die Verbindungsgerade der zwei Geradenscheitel ist. Daraus folgt, daß VQ die Tangente der erzeugten Kurve in Q wird (Fig. 7).

Ein einziger Kreis aus (17) enthält den Punkt V . Seiner Tangente $t_V \in \mathcal{Q}$ perspektiv zugeordnete Gerade $p_V \in \mathcal{V}$ schneidet ihn in dem Punkt V , den man zweimal zählt, und noch in einem weiteren Punkt. Deshalb ist die Gerade p_V die Tangente der Kubik im Punkt V .

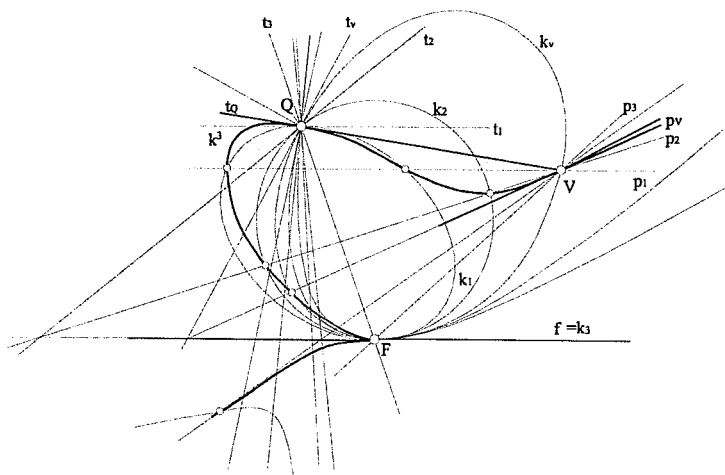


Fig. 7

Typ 3

Ein Hyperoskulationsbüschel besteht aus allen konzentrischen Kreisen vom Radius $\frac{1}{2A}$ die man durch eine isotrope Schiebung ($x' = x, y' = y + \nu$) aufeinander abbilden kann. Seine Normalform erhält man als

$$(22) \quad \mathcal{F} \equiv x^2 - 2Ay + \nu = 0.$$

Wie vorher wird die Zuordnung zwischen dem Büschel (22) und dem Geradenbüschel (9) projektiv für die Parameter $\nu = \mu$, so folgt die Gleichung

$$x^3 - \bar{x}x^2 - 2Axy + 2A\bar{x}y - y + \bar{y} = 0,$$

so

$$(23) \quad k^3 : y \left(x - \bar{x} + \frac{1}{2A} \right) = \frac{1}{2A} (x^3 - \bar{x}x^2 + \bar{y}), \quad A > 0,$$

die nach einer Bewegung (1) der Klasse von Tridens Kurven

$$(23') \quad y'x' = \bar{a}x'^3 + \bar{b}x'^2 + \bar{c}x' + \bar{d}$$

anhören wird (siehe den Beweis des Satzes 1).

Diese Kubik besitzt den Knoten in F , wobei f die Tangente eines Zweiges in F ist (Fig. 8). Die zweite Tangente im Knoten ist die isotrope Asymptote der Kurve, die man durch differenzieren der Gleichung (23) nach y bekommt. Daraus folgt

$$(24) \quad x = \bar{x} - \frac{1}{2A}$$

als ihre Gleichung.

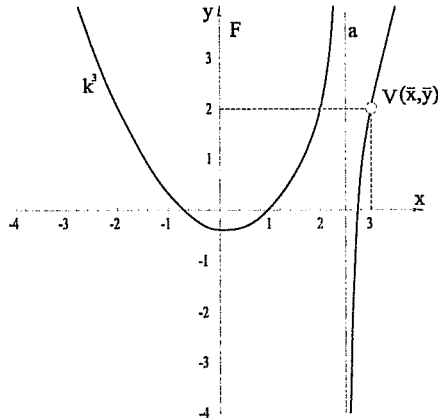


Fig. 8

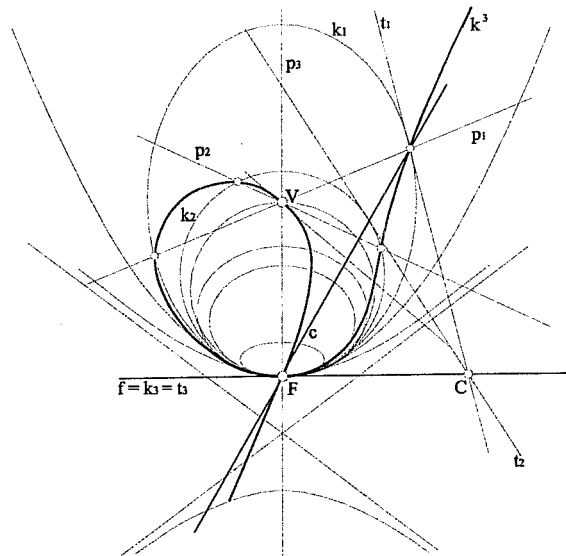


Fig. 9

Um die konstruktive Erzeugung durchzuführen, schneidet man das Bündel (14) mit einer isotropen Gerade c (Fig. 9). Die Tangenten aller Kreise in den Schnittpunkten mit c sind zueinander isotrop parallel und bilden damit ein Geradenbündel \mathcal{C} . Die Geradenbündel \mathcal{C} und \mathcal{V} sind projektiv zugeordnet. Die projektive Zuordnung zwischen zwei Geradenbündeln wird, wie bekannt, mittels zwei perspektiven Punkttri-

hen konstruiert. Wurden die zwei Geradenbüschel \mathcal{C} und \mathcal{V} perspektiv zugeordnet in Bezug auf die Gerade c , zerfällt die erzeugende Kubik in die Gerade c und in einen zu allen Kreisen aus (22) kongruenten Kreis.

Es existiert ein einziger Kreis k aus (22) der den Punkt V enthält. Die ihm projektiv zugeordnete Gerade $p_V \in \mathcal{V}$ schneidet diesen Kreis im zweifach zuzählenden Punkt V und in noch einen weiteren Punkt. Damit wird die Gerade p_V die Tangente des Tridens im V (Fig. 9).

Aus bisherigen Betrachtungen folgt der zweite Teil vom:

Satz 1. *Jedes der drei Typen der vollständig zirkulären Kurven 3. Ordnung in der isotropen Ebene und nur diese können mittels eines der drei isotropen Kreisbüschel und eines ihm projektiv zugeordneten Geradenbüschel mit eigentlichem Scheitelpunkt wie ihres Gebilde erzeugt werden.*

Beweis. Wir haben schon gezeigt, daß das projektive Gebilde eines Geradenbüschels und eines Kreisbüschels im *Typ 1.* (drei Fällen (10), (13) und (16)) die form

$$(25) \quad y'^2 = \bar{a}x'^3 + \bar{b}x'^2 + \bar{c}x' + \bar{d}$$

besitzt. Es ist die Gleichung einer divergenten Parabel. Nun wollen wir zeigen, daß jede divergente Parabel der Gleichung (25)-abhängig von ihren Koeffizienten, mit einer passenden Transformation (1)-in eine form von (10), (13), (16) mit von \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} , \bar{d} abhängigen Parametern \bar{x} , \bar{y} und a gebracht werden kann. Einheitlich können wir schreiben

$$(26) \quad \begin{aligned} (c_2 + c_3x + \tau y)^2 - \bar{a}(c_1 + \tau x)^3 - \bar{b}(c_1 + \tau x)^2 - \bar{c}(c_1 + \tau x) - \bar{d} \equiv \\ \equiv k[y^2 - \bar{y}y - x^3 + \bar{x}x^2 + \alpha x - \alpha\bar{x}] \end{aligned}$$

mit einer Konstante k , wo $\alpha = a^2$ in (10), $\alpha = 0$ in (13), $\alpha = -a^2$ in (16).

Eine auf (10), (13), (16) hinweisende (nicht eindeutige) Lösung ist

$$(27) \quad \begin{aligned} k &= \frac{1}{\bar{a}^2}, \quad c_3 = 0, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = -\frac{\bar{y}}{2\bar{a}}, \quad \tau = \frac{1}{\bar{a}}, \\ \bar{x} &= -\bar{b}, \quad \alpha = -\bar{c}\bar{a}, \quad \bar{y}^2 = 4\bar{a}(\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c}), \end{aligned}$$

die eine Ähnlichkeit nach (1) anbietet. Das ist genau dann eine Bewegung, wenn $\bar{a} = 1$. Wir können mit einer eventuellen Spiegelung

$$(1') \quad x' = -x'', \quad y' = y''$$

die Bedingung $\bar{a} > 0$ erreichen. Das ist notwendig in (1). So bestimmen die Vorzeichen von α und \bar{c} einander, also die fälle (10), (13), (16). Wir

sehen auch daß \bar{y} in (27) rein imaginär sein kann. Das ist mit einem geeigneten c_1 nach (26) zu vermeiden (detailliert nicht mehr hier).

Beim *Typ 2* haben wir im (21) eine kubische Parabel.

$$(28) \quad y' = \bar{a}x'^3 + \bar{b}x'^2 + \bar{c}x' + \bar{d}.$$

Mit $y' = y + \bar{d}$, $x' = x$ in (1) können wir die Formel (21) mit (28) erneut vergleichen:

$$(29) \quad y - \bar{a}x^3 - \bar{b}x^2 - \bar{c}x \equiv y + \frac{1}{2A\bar{x}}x^3 - \frac{1}{2A}x^2 - \frac{\bar{y}}{\bar{x}}x \quad \text{mit } A > 0, \bar{x} \neq 0.$$

Wir haben die natürliche Auswahl

$$(30) \quad A = \frac{1}{2\bar{b}}, \quad \bar{x} = -\frac{1}{2A\bar{a}} = -\frac{\bar{b}}{\bar{a}}, \quad \bar{y} = \bar{c}\bar{x} = -\frac{\bar{c}\bar{b}}{\bar{a}}.$$

Um $A > 0$ zu garantieren, was üblich ist, soll man zuerst in (28) eventuell eine Verschiebung $x' = c_1 + x''$, $y' = y''$ machen, um $\bar{b} > 0$ zu haben.

Wir brauchen also keine echte Ähnlichkeit, um die Normalform zu erreichen.

Beim *Typ 3* benutzen wir die Bewegungsgruppe (1), um die Tridens Kurven in (23) und (23') zu vergleichen:

$$(31) \quad (c_2 + c_3x + \tau y)(c_1 + \tau x) - \bar{a}(c_1 + \tau x)^3 - \\ - \bar{b}(c_1 + \tau x)^2 - \bar{c}(c_1 + \tau x) - \bar{d} \equiv \\ \equiv k[2Axy - y(2A\bar{x} - 1) - x^3 + \bar{x}x^2 - \bar{y}]$$

mit einer Konstante k , ferner $A > 0$, $\tau > 0$.

Wir gewinnen eine (nicht eindeutige) spezifische Lösung. Für $\tau = 1$ und nach Auswahl $c_3 = \bar{b}$, folgt:

$$k = \bar{a}, \quad A = \frac{1}{2\bar{a}}, \quad \bar{x} = \frac{3}{2}\bar{a}, \quad c_1 = -\frac{1}{2}\bar{a}, \\ c_2 = \frac{3}{4}\bar{a}^3 - \frac{1}{2}\bar{a}\bar{b} + \bar{c}, \quad \bar{y} = \frac{\bar{d}}{\bar{a}} + \frac{1}{4}\bar{a}^3,$$

was man durch Einsetzen auch nachprüfen kann.

Nach der Vorbemerkungen ist der Satz 1 bewiesen. \diamond

Literatur

- [1] BEBAN-BRKIĆ, J.: On the Focal Curve of Conic Pencils in I_2 , *KoG* 2 (1997), 35-42.

- [2] CESAREC, R.: Analitička geometrija I, Zagreb, 1957.
- [3] FLADT, K.: Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven, Frankfurt/M, 1962.
- [4] PALMAN, D.: Vollkommen zirkuläre Kurven 3. Ordnung in der hyperbolischen Ebene, *Glasnik MFA* **14** (1959), 19–74.
- [5] PALMAN, D.: Über zirkuläre Kurven 3. Ordnung der isotropen Ebene, *Rad JAZU* **444** (1989), 222–251.
- [6] SACHS, H.: Ebene isotrope Geometrie, Braunschweig-Wiesbaden, 1987.
- [7] SACHS, H.: Oskulierende und hyperoskulierende Kegelschnittbüschel der isotropen Ebene I, *Öster. Akad. Wiss.* **196** (1987), 337–375.
- [8] SACHS, H.: Vollständig zirkuläre Kurven n-ter Ordnung der isotropen Ebene, *Studia Sci. Math. Hungarica* **24** (1989), 377–383.
- [9] SAVELOV, A.A.: Ravninske krivulje, Školska knjiga, Zagreb, 1979.
- [10] SZIROVICZA, V.: Berührbüschel von Kegelschnitten der isotropen Ebene mit konjugiert-komplexen Grundpunkten, *Rad HAZU* **470** (1995), 13–34.
- [11] SZIROVICZA, V. und SLIEPČEVIĆ, A.: Eine Erzeugung der vollständig zirkulären Kurven 3. Ordnung in der isotropen Ebene, (im Druck).
- [12] ŠČURIĆ-ČUDOVAN, V.: Zur Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel der isotropen Ebene, I, *Rad JAZU* **450** (1990), 41–51.
- [13] ŠČURIĆ-ČUDOVAN, V. und SACHS H.: Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel vom Typ IV der isotropen Ebene, I, *Rad HAZU* **470** (1995), 119–137.
- [14] ŠČURIĆ-ČUDOVAN, V.: Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel vom Typ VI der isotropen Ebene, *Math. Panonica* **7/1** (1996), 47–67.
- [15] ŠČURIĆ-ČUDOVAN, V. und SACHS H.: Klassifikationstheorie der Kegelschnittbüschel vom Typ IV der isotropen Ebene, II, *Rad HAZU* **472** (1997), 27–53.
- [16] TÖLKE, J.: Zur Geometrie der Tridens-Kurven der isotropen Ebene, *Studia Sci. Math. Hungarica* **33** (1997), 433–440.
- [17] TÖLKE, J.: A noteworthy property of the tridens curve in the isotropic plane, *Beiträge Algebra Geom.* **40/1** (1999), 275–282.