

SCHALLFRONTEN AN EBENEN KURVEN III

Gizella Suda Karáné

*Institut für Mathematik und Angewandte Geometrie, Montanuni-
versität, A-8700 Leoben, Österreich*

Hans Sachs

*Institut für Mathematik und Angewandte Geometrie, Montanuni-
versität, A-8700 Leoben, Österreich*

Herrn Professor F. Schipp zum 60. Geburtstag gewidmet

Received: September 1998

MSC 1991: 53 A 04, 78 A 99

Keywords: Reflections and refractions with respect to plane curves, first and second central curve, catacaustic, pedal curve with regard to the reflected rays, refractions with a straight line as second central curve, Schipp-curves.

Abstract: We continue two papers of the same title and give at first a geometrical construction of the contact point of the catacaustic with the reflected ray, if the light source S and the reflecting curve c together with its evolute c^* is given. Then we develop a construction for the tangent of the pedal curve with regard to the reflected rays resp. of the second central curve k_2 , if we know the point S and the plane curves c and c^* . Furthermore we derive an integral formula, that yields the reflected curve c , if the light source S and the second central curve k_2 are given. Finally we determine – as an application – all possible reflecting curves c with a straight line k_2 as second central curve and a light source $S \notin k_2$. We prove that in this case the curves c are evolvents of a parabola. The corresponding catacaustic is a complicated transcendent curve – called a Schipp-curve. In this way we give also a parametric representation and a kinematical generation of the corresponding refractive curves.

Bei verschiedenen Anwendungen in der Akustik oder geometrischen Optik ist das folgende Problem von großer Bedeutung: Gegeben ist eine ebene Kurve c , eine Schall- bzw. Lichtquelle S und eine Zeitkomponente t_0 . Mit der Schall- bzw. Lichtgeschwindigkeit c_0 bezeichne $L_0 := c_0 t_0$ die zu t_0 gehörige Wegstrecke. Jeder von S ausgehende Schall- bzw. Lichtstrahl wird dann an der Kurve c so reflektiert, daß der Winkel ω zwischen der Geraden SP und der Kurvennormalen n im Auftreffpunkt P gleich dem Winkel zwischen n und dem reflektierten Strahl PY_1 bzw. dem gebrochenen Strahl PY_2 ist (vgl. Abb. 1). Wird dann die konstante Länge L_0 von S aus so abgetragen, daß $\overline{SP} + \overline{PY_1} = L_0$ bzw. $\overline{SP} + \overline{PY_2} = L_0$ gilt, so wird damit eindeutig ein Punkt Y_1 bzw. Y_2 definiert. Ist im Punkt $P \in c$ die Krümmung κ der Kurve c negativ (vgl. Abb. 1), dann liegt Y_1 auf dem negativen Ufer der Tangente t in P , während Y_2 auf dem positiven Ufer liegt (vgl. [7, 27f]), falls sich S auf dem negativen Ufer von t befindet. Liegt S auf dem positiven Ufer von t , dann ist die Situation gerade umgekehrt. Eine analoge Aussage gilt, falls die Krümmung $\kappa > 0$ ist.

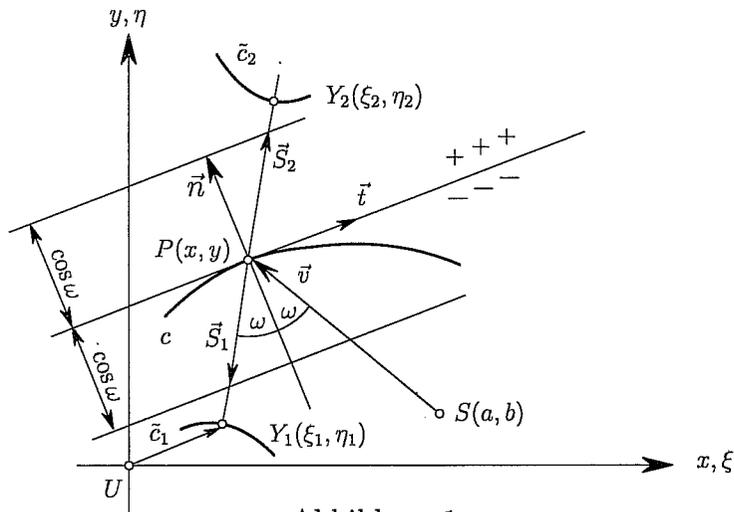


Abbildung 1

Die Punkte Y_1 bzw. Y_2 bilden bei Veränderung des Strahls SP eine Kurve \tilde{c}_1 bzw. \tilde{c}_2 , die man als Schallfront bzw. Brechungsfront zur Länge L_0 bezüglich S und der Kurve c bezeichnet. Wird c um eine Achse a gedreht, auf der S liegt, so entsteht eine Drehfläche Ψ und durch Drehung von \tilde{c}_1 entsteht die dazu gehörige Schallfront $\tilde{\Psi}_1$, die in der Bauakustik eine wichtige Rolle spielt (vgl. [1], [2], [13], [14]). Fragestellungen dieser Art wurden früher durch „ray tracing“ gelöst (vgl. z.B. [1], [2], [13]).

Im Zeitalter des Computers liegen differentialgeometrische Lösungen dieser Fragestellungen nahe. Hinsichtlich der ersten Differentiationsordnung wurde diese Thematik von F. Mészáros und H. Sachs in [8] bzw. von G. Suda Karáné und H. Sachs in [15], [10] und [11] behandelt. Im Rahmen des CAGD wurden diesbezüglich unter Anwendung von Methoden der algebraischen Geometrie bemerkenswerte Resultate von R.T. Farouki und J.-Cl. Chastang erzielt (vgl. [3], [4], [5], [6]).

In dieser Note wollen wir zunächst einige Resultate zur 2. Differentiationsordnung angeben. Bei der Entwicklung der Theorie spielen vor allem die beiden Zentralkurven k_1 und k_2 eine wichtige Rolle. Die erste Zentralkurve k_1 ist die Gegenpunktkurve zur Ausgangskurve c bezüglich der Schallquelle S ; sie wird von den Punkten G_1 gebildet. Die zweite Zentralkurve k_2 ist die Gegenpunktkurve zur Evolute c^* von c bezüglich S (vgl. [11]); sie wird von allen Punkten G_2 gebildet (vgl. Abb. 2). c^* berührt die Normale n der Kurve c des Punktes P im Krümmungsmittelpunkt P^* . Andererseits besitzen auch die gespiegelten Strahlen $g = PY_1$ eine Hüllkurve h , die Katakaustik; ihre Hüllpunkte werden mit H bezeichnet. Die Geometrie dieser Katakaustik wurde mit Mitteln der Zyklographie sehr elegant entwickelt (vgl. [9, 270f]). Schließlich ist noch die Fußpunktkurve f von S bezüglich der reflektierten Strahlen g von Bedeutung; ihre Fußpunkte werden mit L bezeichnet. Wird die Ausgangskurve c mit der Bogenlänge s parametrisiert, dann erhält man, ausgehend von der Darstellung

$$(1) \quad \vec{x} = \vec{x}(s) = \{x(s), y(s)\}$$

nach [8, 191] und [11] der Reihe nach

$$G_1(2y'\Delta_1, -2x'\Delta_1), \quad G_2(2x'\Delta_2, 2y'\Delta_2)$$

$$(2 \text{ a-d}) \quad H = \left[\frac{2\kappa x(x^2 + y^2) - 2y'\Delta_1^2}{2\kappa(x^2 + y^2) - \Delta_1}, \quad \frac{2\kappa y(x^2 + y^2) + 2x'\Delta_1^2}{2\kappa(x^2 + y^2) - \Delta_1} \right]$$

$$L = \left[\frac{2\Delta_1\Delta_2(y + 2x'\Delta_1)}{x^2 + y^2}, \quad -\frac{2\Delta_1\Delta_2(x - 2y'\Delta_1)}{x^2 + y^2} \right],$$

wobei $\Delta_1 := xy' - yx'$ und $\Delta_2 := xx' + yy'$ bedeuten und Striche Ableitungen nach s bezeichnen. Die Schallquelle S liegt hierbei im Koordinatenursprung. Nach [12, 65] gilt bekanntlich für den Krümmungsmittelpunkt P^* zu P

$$(3) \quad P^* \left(x - \frac{y'}{\kappa}, y + \frac{x'}{\kappa} \right)$$

mit $\kappa = x'y'' - x''y'$. Aus (2.c) und $P(x, y)$ berechnen wir zunächst

$$(4) \quad \overline{PH} = \frac{\Delta_1 \sqrt{x^2 + y^2}}{2\kappa(x^2 + y^2) - \Delta_1}.$$

Wir bestimmen weiters den Fußpunkt N der Normalen n_1 von P^* auf den gespiegelten Strahl g . Da g nach [8, 191] ersichtlich den Richtungsvektor $\{x - 2y'\Delta_1, y + 2x'\Delta_1\}$ besitzt, findet man die Gleichung von g zu

$$(5) \quad X(y + 2x'\Delta_1) - Y(x - 2y'\Delta_1) = 2\Delta_1\Delta_2.$$

Die Gerade n_1 kann mittels

$$(6) \quad \begin{aligned} X &= x - \frac{y'}{\kappa} + \lambda(y + 2x'\Delta_1) \\ Y &= y + \frac{x'}{\kappa} + \lambda(-x + 2y'\Delta_1) \end{aligned}$$

parametrisiert werden, woraus sich mittels (5) für den Schnittpunkt N der Parameterwert $\lambda = \frac{\Delta_2}{\kappa(x^2 + y^2)}$ ergibt. Daraus folgt mittels (6)

$$(7) \quad N = \left[x - \frac{y'}{\kappa} + \frac{\Delta_2(y + 2x'\Delta_1)}{\kappa(x^2 + y^2)}, \quad y + \frac{x'}{\kappa} + \frac{\Delta_2(-x + 2y'\Delta_1)}{\kappa(x^2 + y^2)} \right].$$

Aus (7) kann man den Abstand \overline{PN} berechnen, wobei sich nach Beachtung von $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 = x^2 + y^2$ schließlich

$$(8) \quad \overline{PN} = \frac{\Delta_1}{\kappa\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

einstellt. Beachtet man, daß nach (2.a) $\overline{SP} = \overline{G_1P} = \sqrt{x^2 + y^2}$ gilt, dann läßt sich der Reziprokwert von \overline{PH} wegen (8) schreiben als

$$(9) \quad \frac{1}{\overline{PH}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\overline{PN}} - \frac{1}{\overline{G_1P}}.$$

Mit $d = \overline{PH}$, $d_1 = \frac{1}{2}\overline{PN}$ und $\overline{G_1P} = d_2$ ist (9) die bekannte Linsengleichung $\frac{1}{d} = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}$, die man z.B. mit der Sägezahnkonstruktion (vgl. [7,167]) zeichnerisch auswerten kann. Ist P^* bekannt, dann kann damit der Punkt H konstruktiv ermittelt werden, wie dies die Abb. 2 zeigt.

Sobald H bekannt ist, läßt sich auch die Tangente t_f im Punkt L der Fußpunktkurve f konstruieren. Dazu ist nach [11] der Punkt H an L zu spiegeln, wodurch der Punkt T entsteht. Die Streckensymmetrale der Strecke \overline{ST} ist dann die Tangente t_f (vgl. Abb. 2). Wir vermerken den

Satz 1. *Kennt man zu einem Punkt P einer ebenen Kurve c den Krümmungsmittelpunkt P^* , dann kann man bei gegebener Lichtquelle S auf dem Spiegelstrahl g zur Geraden SP den Hüllpunkt H der Katakaustik mit Hilfe der Sägezahnkonstruktion gemäß (9) ermitteln. Die Tangente*

man c^* nach [8, 192] bestimmen. Man erhält aus (14) zunächst für c^*

$$(15) \quad \begin{aligned} X &= \frac{u_1 \dot{u}_1 u_2 + \frac{1}{2} \dot{u}_2 (u_2^2 - u_1^2)}{\dot{u}_1 u_2 - \dot{u}_2 u_1} \\ Y &= \frac{-u_1 u_2 \dot{u}_2 + \frac{1}{2} \dot{u}_1 (u_2^2 - u_1^2)}{\dot{u}_1 u_2 - \dot{u}_2 u_1} \end{aligned}$$

Zu (15) ist nun gemäß [12, 69] die Schar der Evolventen zu berechnen – dies sind die gesuchten Lösungskurven c . Dazu bestimmen wir vorerst

$$(16) \quad \begin{aligned} \dot{X} &= \frac{\frac{1}{2} u_2 (\dot{u}_1 \ddot{u}_2 - \ddot{u}_1 \dot{u}_2) (u_1^2 + u_2^2) + u_2 (\dot{u}_1 u_2 - u_1 \dot{u}_2) (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2)}{(\dot{u}_1 u_2 - \dot{u}_2 u_1)^2} \\ \dot{Y} &= -\frac{\frac{1}{2} u_1 (\dot{u}_1 \ddot{u}_2 - \ddot{u}_1 \dot{u}_2) (u_1^2 + u_2^2) + u_1 (\dot{u}_1 u_2 - u_1 \dot{u}_2) (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2)}{(\dot{u}_1 u_2 - \dot{u}_2 u_1)^2}, \end{aligned}$$

woraus nach einiger Rechnung

$$(17) \quad \begin{aligned} \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2} &= \frac{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}{(\dot{u}_1 u_2 - u_1 \dot{u}_2)^2} \left[\frac{1}{2} (\dot{u}_1 \ddot{u}_2 - \dot{u}_2 \ddot{u}_1) (u_1^2 + u_2^2) + \right. \\ &\quad \left. + (\dot{u}_1 u_2 - \dot{u}_2 u_1) (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2) \right], \\ \frac{\dot{X}}{\sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2}} &= \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}, \quad \frac{\dot{Y}}{\sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2}} = -\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \end{aligned}$$

folgt. Damit erhält man schließlich für die *Lösungskurven* c die Darstellung

$$(18) \quad \begin{aligned} x &= \frac{u_1 \dot{u}_1 u_2 + \frac{1}{2} \dot{u}_2 (u_2^2 - u_1^2)}{\dot{u}_1 u_2 - \dot{u}_2 u_1} - (I - K_0) \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \\ y &= \frac{-u_1 u_2 \dot{u}_2 + \frac{1}{2} \dot{u}_1 (u_2^2 - u_1^2)}{\dot{u}_1 u_2 - \dot{u}_2 u_1} + (I - K_0) \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}, \end{aligned}$$

wobei K_0 eine Integrationskonstante bezeichnet und I das Integral

$$(19) \quad I = \frac{1}{2} \int \frac{(\dot{u}_1 \ddot{u}_2 - \dot{u}_2 \ddot{u}_1) \sqrt{(u_1^2 + u_2^2)^3}}{(\dot{u}_1 u_2 - u_1 \dot{u}_2)^2} dt + \int \frac{(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2) \sqrt{u_1^2 + u_2^2}}{(\dot{u}_1 u_2 - \dot{u}_2 u_1)} dt$$

bedeutet. Anders als in Fall der Zentralkurve k_1 gibt es also hier eine einparametrische Schar von Lösungskurven. Für die erste Zentralkurve k_1 erhält man aus (18) die Darstellung $\{x_1 = 2x - u_1, y_1 = 2y - u_2\}$, die sich unschwer zu

$$(20) \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{(u_1^2 + u_2^2)}{2u_2 \left(\frac{u_1}{u_2}\right)} - 2(I - K_0) \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \\ y_1 &= \frac{(u_1^2 + u_2^2)}{2u_1 \left(\frac{u_2}{u_1}\right)} + 2(I - K_0) \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \end{aligned}$$

umformen läßt. Die zugehörigen Schallfronten sind dann nach [8, 193] die Parallelkurven zu (20), während sich die zugehörigen Brechungsfronten nach [11] berechnen lassen. Damit haben wir den

Satz 3. *Ist die zweite Zentralkurve k_2 in einer Parameterdarstellung $\{u_1 = u_1(t), u_2 = u_2(t)\}$ gegeben und liegt die Lichtquelle im Koordinatenursprung, dann läßt sich die dazugehörige einparametrische Schar der Ausgangskurven c durch (18) beschreiben, wobei das Integral I aus (19) zu entnehmen ist und K_0 eine Integrationskonstante bezeichnet. Die entsprechende erste Zentralkurve k_1 kann nach (20) berechnet werden.*

Als Anwendung wollen wir den Fall betrachten, wo die zweite Zentralkurve k_2 eine Gerade ist. Der Fall, daß die Lichtquelle S auf k_2 liegt, wurde schon in [11] betrachtet. In diesem Sonderfall ist k_1 zu einem Punkt degeneriert und die Brechungsfronten \tilde{c}_2 sind Geradenkonchoiden, die sich durch eine einfach geschränkte Winkelschleife erzeugen lassen. Liegt $S(0, 0)$ nicht auf k_2 , so kann man k_2 o.B.d.A. in der Parameterdarstellung

$$(21) \quad \{u_1 = a_0 \neq 0, u_2 = t\}$$

ansetzen. Mittels (15) gewinnt man zunächst für c^* die Gleichung

$$(22) \quad Y^2 = a_0^2 - 2a_0X,$$

d.h. eine Parabel mit der Lichtquelle als Brennpunkt und der Geraden k_2 als Leitlinie. Der Lösungskurven c sind somit Parabelevolventen, für die man aus (18) und (19) die Parameterdarstellung

$$(23) \quad \begin{cases} x = \frac{a_0}{2} + \frac{K_0 t}{\sqrt{a_0^2 + t^2}} + \frac{a_0 t}{2\sqrt{a_0^2 + t^2}} \ln(t + \sqrt{a_0^2 + t^2}) \\ y = \frac{1}{2}t - \frac{a_0 K_0}{\sqrt{a_0^2 + t^2}} - \frac{a_0^2}{2\sqrt{a_0^2 + t^2}} \ln(t + \sqrt{a_0^2 + t^2}) \end{cases}$$

berechnet. Für die erste Zentralkurve k_1 erhält man nach (20)

$$(24) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{2K_0 t}{\sqrt{a_0^2 + t^2}} + \frac{ta_0}{\sqrt{a_0^2 + t^2}} \ln(t + \sqrt{a_0^2 + t^2}) \\ y_1 = -\frac{2K_0 a_0}{\sqrt{a_0^2 + t^2}} - \frac{a_0^2}{\sqrt{a_0^2 + t^2}} \ln(t + \sqrt{a_0^2 + t^2}). \end{cases}$$

Zur Vereinfachung wenden wir auf (23) bzw. (24) den Parameterwechsel

$$(25) \quad t + \sqrt{a_0^2 + t^2} = a_0 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$$

an. Man findet dann über $t = -a_0 \operatorname{ctg} \varphi$ unschwer

$$(26) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} a_0 - \cos \varphi [K_0 + \frac{1}{2} a_0 \ln (a_0 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi)] \\ y = -\frac{1}{2} a_0 \operatorname{ctg} \varphi - \sin \varphi [K_0 + \frac{1}{2} a_0 \ln (a_0 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi)] \end{cases}$$

$$(27) \quad \begin{cases} x_1 = -\cos \varphi [2K_0 + a_0 \ln (a_0 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi)] \\ y_1 = -\frac{1}{2} a_0 \operatorname{ctg} \varphi - \sin \varphi [K_0 + \frac{1}{2} a_0 \ln (a_0 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi)] \end{cases}.$$

Aus (27) erhält man auch sofort die Darstellung der 1. Zentralkurve k_1 in Polarkoordinaten (r, ψ) zu

$$(28) \quad r = 2K_0 + a_0 \ln (a_0 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi).$$

Als implizite Gleichung von k_1 stellt sich unter Beachtung von (25) ein

$$(29) \quad \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + a_0 \operatorname{Arsh} \frac{x_1}{y_1} - a_0 \ln a_0 - 2K_0 = 0.$$

Die Berechnung der Katakaustik h könnte nach [11], Formel (37) erfolgen, doch wollen wir hier einen direkten Weg einschlagen. Dazu spannen wir die Menge der reflektierten Strahlen durch die Punkte $G_2(x_2 = a_0, y_2 = -a_0 \operatorname{ctg} \varphi)$ und $G_1(x_1, y_1)$ auf – wobei die Koordinaten des letzteren aus (27) zu entnehmen sind – und berechnen über die Geradenschar

$$(30) \quad F(\varphi) \equiv x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) = y_1 x_2 - x_1 y_2$$

mittels $\frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0$ die Hüllkurve h . Man findet nach längerer Rechnung für h die Parameterdarstellung

$$(31) \quad \begin{cases} x = -\frac{a_0(L^2 \cos 2\varphi + La_0 \cos \varphi - a_0^2)}{L^2 \sin^2 \varphi + La_0 \cos \varphi + 2a_0^2} \\ y = -\frac{a_0(L^2 \sin 2\varphi + La_0 \sin \varphi + a_0^2 \operatorname{ctg} \varphi)}{L^2 \sin^2 \varphi + La_0 \cos \varphi + 2a_0^2} \end{cases}$$

mit $L := 2K_0 + a_0 \ln (a_0 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi)$. Wir bezeichnen diese transzendenten Kurven zu Ehren des Jubilars als *Schippische Kurven*. Die dazugehörigen Brechungsfronten \tilde{c}_2 lassen sich nach [11], Formel (14) aus (26) berechnen. Man findet nach einiger Mühe die Parameterdarstellung

Literatur

- [1] BERANEK, L.: Musik, Acoustics and Architecture, Mc. Graw Hill, New York-London, 1962.
- [2] CREMER, L. und MÜLLER, H. A.: Die wissenschaftlichen Grundlagen der Raumakustik, Band I und II, S. Hirzel Verlag Stuttgart, 1978.
- [3] FAROUKI, R. T. and CHASTANG J.-C., A.: The mathematical evolution of wavefronts, *Optics and Photonic News* **3** (1992), 20–30.
- [4] FAROUKI, R. T. and CHASTANG J.-C., A.: Evolving wavefronts as algebraic curves, IBM Research Report, RC 16381, 1990.
- [5] FAROUKI, R. T. and CHASTANG J.-C., A.: Exact equations of „simple” wavefronts, *Optik* **91** (1992), 109–121.
- [6] FAROUKI, R. T. and CHASTANG J.-C., A.: Curves and Surfaces in Geometrical Optics, in: T. Lyche and L. L. Schumaker, eds. *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design II*, Academic Press, 1992, 239–260.
- [7] HUSTY, M., KARGER, A., SACHS, H., STEINHILPER, W.: *Kinematik und Robotik*, Springer-Verlag Heidelberg, Berlin, 1997.
- [8] MÉSZÁROS, F. und SACHS, H.: Schallfronten an ebenen Kurven I, *Mathematica Pannonica* **8/2** (1997), 187–200.
- [9] MÜLLER, E. und KRAMES, J.: *Vorlesungen über Darstellende Geometrie II, Die Zyklographie*, Deuticke, Leipzig und Wien 1929.
- [10] SACHS, H. und SUDA KARÁNE, G.: Zur Konstruktion von Abhörpunkten, *Berg- und Hüttenmännische Monatshefte* **143/5** (1998), 198–202.
- [11] SACHS, H. und SUDA KARÁNE, G.: Schall- und Brechungsfronten an ebenen Kurven, *Publ. Math. Debrecen* (1998, im Druck).
- [12] STRUBECKER, K.: *Differentialgeometrie I, Sammlung Göschen, Bd. 1113/1113a*, Berlin 1964.
- [13] SUDA KARÁNE, G.: *Raumakustische Prüfung im Bauwesen angewandter geometrischer Oberflächen unter Anwendung der Anaglyphenmethode. Dissertation an der TU-Budapest*, 1986.
- [14] SUDA KARÁNE, G.: *Raumakustische Prüfung im Bauwesen angewandter geometrischer Oberflächen, Periodica Politechnica Architecture* **35** (1991), 1–2.
- [15] SUDA KARÁNE, G. und SACHS, H.: Schallfronten an ebenen Kurven II, *Mathematica Pannonica* **9/1** (1998), 17–31.