

## SCHALLFRONTEN AN EBENEN KURVEN II

Hans Sachs

*Institut für Mathematik und Angewandte Geometrie, Montanuni-  
versität, A-8700 Leoben, Österreich*

Gizella Suda Karáné

*Institut für Mathematik und Angewandte Geometrie, Montanuni-  
versität, A-8700 Leoben, Österreich*

**Herrn Professor Gy. Maurer zum 70. Geburtstag gewidmet**

*Received:* August 1997

*MSC 1991:* 53 A 04, 78 A 99

*Keywords:* Sonic wave fronts with respect to ellipses, hyperbolas and parabolas, a characterization of parabolas and conic sections with centre, curves with toroidal sonic wave fronts.

**Abstract:** We continue a paper with the same title and study in the first part of this investigation the wave fronts with respect to ellipses, hyperbolas resp. parabolas. We find algebraic curves of order 20 resp. of order 14. In special cases we obtain the Booth's resp. Bernoulli's lemniscate. In the second part of the paper we determine all curves with circles resp. straight lines as wave fronts. We get only ellipses and hyperbolas resp. parabolas and find in this way a characterization of these conic sections. In the last part of the work we investigate all curves with toroidal curves as wave fronts. We find rational curves of order 6, in special cases we obtain the curve of Talbot (the sonic centre lies in the centre of the counter-point ellipse) and a curve affine to a Steiner-hypocycloide (the sonic centre lies in a vertex of the counter-point ellipse).

Wir knüpfen nahtlos an die Abhandlung [3] an und bestimmen im ersten Teil dieser Note die Schallfronten bezüglich eines Mittelpunktkegelschnittes  $c$  bzw. einer Parabel  $c$ , wobei die Schallquelle  $S$  in allgemeiner Lage bezüglich  $c$  angenommen wird. Im zweiten Teil der Untersuchung bestimmen wir alle Kurven  $c$ , deren Schallfronten bezüglich eines Punktes  $S$  als Schallquelle durchwegs Geraden bzw. Kreise sind und gelagen so zu einer Kennzeichnung der Parabel bzw. der Mittelpunktkegelschnitte. Im dritten Teil dieser Untersuchung bestimmen wir jene Kurven  $c$ , deren Schallfronten bezüglich eines festen Punktes  $S$  als Schallquelle Parallelkurven zu einer Ellipse, d.h. Toroiden sind.

## 1. Die Schallfronten der Mittelpunktkegelschnitte und der Parabel

Wir beginnen mit der Untersuchung der Schallfronten bezüglich eines Mittelpunktkegelschnittes  $c$  bei allgemeiner Lage der Schallquelle  $S$ . Wir legen dazu die Schallquelle  $S$  in den *Ursprung* des Koordinatensystems. Durch eine Drehung des Koordinatensystems um  $S$  kann man noch erreichen, daß die *Koordinatenachsen* zu den *Achsen* des Mittelpunktkegelschnittes *parallel* werden. Die Gleichung von  $c$  lautet dann

$$(1) \quad \frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{\varepsilon b^2} = 1,$$

wobei  $\varepsilon = +1$  für eine *Ellipse* und  $\varepsilon = -1$  für eine *Hyperbel* gilt. Gemäß [3] ist zunächst die Gegenpunktkurve  $k$  von  $S = U$  bezüglich  $c$  zu bestimmen. Dazu beachten wir, daß nach [1, 263] die Fußpunktkurve von  $c$  bezüglich  $S = U$  eine *rationale, bizirkulare Kurve 4. Ordnung* mit der Gleichung

$$(2) \quad (x^2 + y^2)^2 - 2(\alpha x + \beta y)(x^2 + y^2) + (\alpha^2 - a^2)x^2 + 2\alpha\beta xy + (\beta^2 - \varepsilon b^2)y^2 = 0$$

ist; sie besitzt  $S$  als *singulären Punkt* und ist *bizirkular*. Die *Gegenpunktkurve*  $k$  erhält man durch die *Streckung*  $\{\bar{x} = 2x, \bar{y} = 2y\}$ , die die Zirkularität erhält und die Singularität von  $S$  nicht ändert. Aus (2) erhält man die Gleichung von  $k$  zu

$$(3) \quad (x^2 + y^2)^2 - 4(\alpha x + \beta y)(x^2 + y^2) + 4(\alpha^2 - a^2)x^2 + 8\alpha\beta xy + 4(\beta^2 - \varepsilon b^2)y^2 = 0.$$

Die Kurve (3) läßt sich leicht parametrisieren, wenn man  $y = tx$  in (3)

einsetzt. Man erhält dann eine *quadratische Gleichung* für  $x$  zu

$$(4) \quad (1+t^2)^2 x^2 - 4(\alpha + \beta t)(1+t^2)x + 4(\alpha + \beta t)^2 - 4(a^2 + \varepsilon b^2 t^2) = 0,$$

aus der man

$$(5) \quad \begin{aligned} x &= \frac{2(\alpha + \beta t) \pm 2\sqrt{a^2 + \varepsilon b^2 t^2}}{(1+t^2)} \\ y &= \frac{2(\alpha t + \beta t^2) \pm 2t\sqrt{a^2 + \varepsilon b^2 t^2}}{(1+t^2)} \end{aligned}$$

berechnet. Wir wenden nun auf (5) die *Parametertransformation*

$$(6) \quad t = \frac{2au}{b(1 - \varepsilon u^2)} \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

an und erhalten so die *rationale Darstellung*

$$(7) \quad \begin{cases} x = 2b \frac{\alpha b(1 - \varepsilon u^2)^2 + 2a\beta u(1 - \varepsilon u^2) \pm ab(1 - u^4)}{4a^2 u^2 + b^2(1 - \varepsilon u^2)^2} \\ y = 2a \frac{2\alpha b u(1 - \varepsilon u^2) + 4a\beta u \pm 2abu(1 + \varepsilon u^2)}{4a^2 u^2 + b^2(1 - \varepsilon u^2)^2} \end{cases}$$

Nach [3] sind die gesuchten Schallfronten von  $c$  die Parallelkurven zu (7) im Abstand  $L_0$ . Ist eine Kurve durch  $\vec{x}(u) = \{x(u), y(u)\}$  gegeben, so erhält man ihre *Parallelkurve im Abstand  $L_0$*  bekanntlich durch die Formel

$$(8) \quad \begin{cases} \xi = x - \frac{L_0 \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \\ \eta = y + \frac{L_0 \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \end{cases}$$

Hiermit kann man aus (7) die Schallfronten einer *Ellipse* ( $\varepsilon = +1$ ) bzw. einer *Hyperbel* ( $\varepsilon = -1$ ) bei allgemeiner Lage zur Schallquelle berechnen. Man findet unter Verwendung der *Polynome 6. Ordnung*

$$(9) \quad \begin{aligned} p_6(u) &= 2a\beta\varepsilon b^2 u^6 + 4ab[2a(\alpha \mp a) \pm \varepsilon b^2]u^5 - 2a\beta(4a^2\varepsilon + b^2)u^4 \mp \\ &\quad \mp 8ab^3 u^3 - 2a\beta\varepsilon(4a^2\varepsilon + b^2)u^2 - 4ab[2a(\alpha \pm a) \mp \varepsilon b^2] + 2ab^2\beta \\ q_6(u) &= -2b^3\varepsilon(\pm a - \alpha)u^6 - 8ab^2\beta u^5 + 2b[\mp 5ab^2 - b^2\alpha - \\ &\quad - 4a^2\varepsilon(\alpha \mp a)]u^4 + 2b[\pm 5a\varepsilon b^2 - \varepsilon\alpha b^2 - -4a^2(\alpha \pm a)]u^2 + \\ &\quad + 8ab^2\beta u + 2b^3(\alpha \pm a) \end{aligned}$$

und der *Abkürzung*

$$(10) \quad W := b^2 p_6^2 + a^2 q_6^2$$

für die *Schallfronten  $\tilde{c}$*

$$(11) \quad \begin{aligned} \xi &= 2b \frac{ab(1 - \varepsilon u^2)^2 + 2a\beta u(1 - \varepsilon u^2) \pm ab(1 - u^4)}{4a^2u^2 + b^2(1 - \varepsilon u^2)^2} - \frac{L_0 a q_6}{\sqrt{W}} \\ \eta &= 2a \frac{2\alpha b u(1 - \varepsilon u^2) + 4a\beta u^2 \pm 2ab u(1 + \varepsilon u^2)}{4a^2u^2 + b^2(1 - \varepsilon u^2)^2} + \frac{L_0 b p_6}{\sqrt{W}}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe eines Computerprogramms können die Kurven (11) leicht dargestellt werden. Die Kurven (11) sind *algebraische Kurven*. Um ihre Ordnung zu bestimmen, schneiden wir sie mit einer *Testgeraden*

$$(12) \quad A\xi + B\eta = C.$$

Für die gesuchten Schnittpunkte erhält man nach einiger Rechnung ein *Polynom vom Grad 20* mit dem höchsten Koeffizienten

$$(13) \quad \begin{aligned} &4a^2b^{10} \{[\beta^2 + (\pm a - \alpha)^2][2A(\alpha \mp a) - C]^2 - \\ &- L_0^2 [A(\pm a - \alpha) + \beta B]^2\}, \end{aligned}$$

der im allgemeinen nicht verschwindet. Die *Kurven (11) besitzen daher die Ordnung 20*. Damit haben wir den

**Satz 1.** *Die Schallfronten einer Ellipse ( $\varepsilon = +1$ ) bzw. einer Hyperbel ( $\varepsilon = -1$ ) (1) bezüglich der Schallquelle  $S = U(0, 0)$  sind im allgemeinen algebraische Kurven 20. Ordnung, die sich mittels (11) parametrisieren lassen. Diese Kurven sind Parallelkurven zur bizirkularen, rationalen algebraischen Kurve 4. Ordnung (3).*

Der Satz 1 enthält viele *bemerkenswerte Sonderfälle*, von denen im folgenden einige direkt untersucht werden sollen.

a) Fällt der Mittelpunkt der *Ellipse oder Hyperbel  $c$*  in die Schallquelle  $S$ , dann gilt in (5)  $\alpha = \beta = 0$  und aus den Gleichungen

$$(14) \quad \begin{cases} x = \frac{\pm 2\sqrt{a^2 + \varepsilon b^2 t^2}}{1 + t^2} \\ y = \frac{\pm 2t\sqrt{a^2 + \varepsilon b^2 t^2}}{1 + t^2} \end{cases}$$

ergibt sich

$$(15) \quad (x^2 + y^2)^2 = 4(a^2x^2 + \varepsilon b^2y^2).$$

Die Kurve (15)  $k$  ist für ( $\varepsilon = +1$ ) eine *Boothsche Lemniskate* (vgl. [1, 269]), für ( $\varepsilon = -1$ ) wegen  $a \neq b$  eine *allgemeine Bernoullische Lemniskate* (vgl. [1, 269]). Betrachten wir zunächst den Fall einer *Ellipse*, die wir über

$$(16) \quad x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

parametrisieren. Für ihre *Schallfronten  $\bar{c}$*  erhält man dann aus der Formel (12), 1. Teil der Arbeit, nach kurzer Rechnung

$$(17) \quad \begin{cases} \xi = \frac{a \cos t}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \left[ 2b^2 + \frac{L_0(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t - 2b^2)}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} \right] \\ \eta = \frac{b \sin t}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \left[ 2a^2 + \frac{L_0(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t - 2a^2)}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} \right] \end{cases}$$

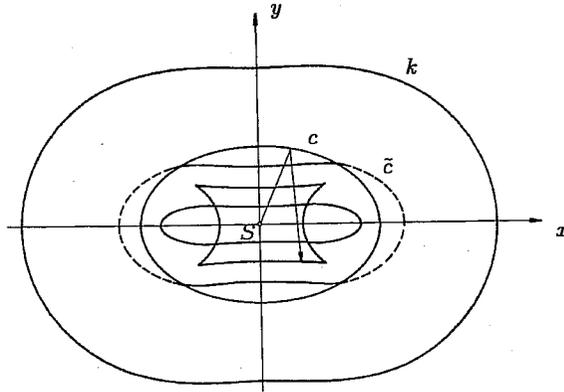


Abbildung 1

Die Abbildung 1 zeigt eine *Ellipse*  $c$  mit den *Schallfronten*  $\bar{c}$ ; sie sind die *Parallelkurven* zur *Boothschen Lemniskate*  $k$ .

Im Fall einer *Hyperbel* parametrisieren wir diese Kurve mittels

$$(18) \quad x = \pm a \operatorname{ch} t, \quad y = b \operatorname{sh} t$$

und erhalten dann analog für die *Schallfronten*  $\bar{c}$

$$(19) \quad \begin{cases} \xi = \frac{a \operatorname{ch} t}{a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t} \left[ 2b^2 + \frac{L_0(a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t - 2b^2)}{\sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 t + b^2 \operatorname{sh}^2 t}} \right] \\ \eta = \frac{b \operatorname{sh} t}{a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t} \left[ -2a^2 + \frac{L_0(a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t + 2a^2)}{\sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 t + b^2 \operatorname{sh}^2 t}} \right] \end{cases}$$

b) Liegt die Schallquelle  $S$  in einem *Brennpunkt* einer *Ellipse* bzw. *Hyperbel*, dann sind die *Schallfronten* *konzentrische Kreise* um den *anderen Brennpunkt*.

Wir vermerken den

**Satz 2.** Die *Schallfronten* einer *Ellipse* ( $\varepsilon = +1$ ) bzw. einer *Hyperbel* ( $\varepsilon = -1$ ) bezüglich des *Mittelpunktes* als *Schallquelle* sind *Parallelkurven* zu einer *Boothschen Lemniskate* bzw. einer *allgemeinen Bernoullischen Lemniskate*. Sie lassen sich durch (17) bzw. (19) parametrisieren.

Die Abbildung 2 zeigt den Fall einer Hyperbel, wobei auch die 4 Grenzpunkte  $G_1, G_2, G_3, G_4$  eingezeichnet wurden.

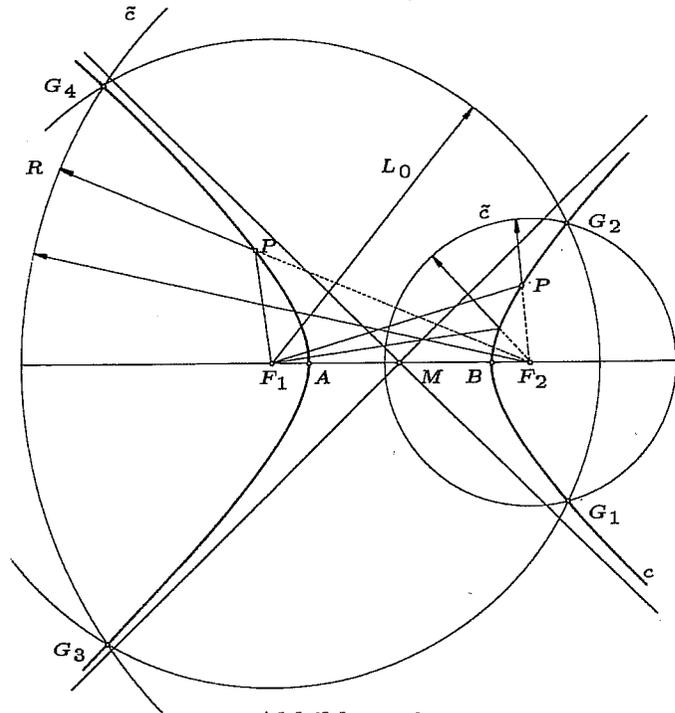


Abbildung 2

Wir untersuchen nun die Schallfronten einer *Parabel*  $c$  bei allgemeiner Lage der Schallquelle  $S$ . Wir legen dazu die Schallquelle  $S$  in den *Ursprung* des Koordinatensystems. Durch eine Drehung des Koordinatensystems um  $S$  kann man noch erreichen, daß die  $x$ -Achse zur *Parabelachse parallel* wird. Die Gleichung von  $c$  lautet dann

$$(20) \quad (y - \alpha)^2 = 2p(x - \beta)$$

und die Fußpunktkurve von (20) bezüglich  $S(0,0)$  wird nach [1, 263] beschrieben durch

$$(21) \quad 2x(x^2 + y^2 - \beta x - \alpha y) + py^2 = 0.$$

Die *Gegenpunktkurve*  $k$  erhält man aus (21) ersichtlich durch die Streckung  $\{\bar{x} = 2x, \bar{y} = 2y\}$ . Man gewinnt — nach Weglassen der Querstriche

$$(22) \quad x(x^2 + y^2 - 2\beta x - 2\alpha y) + py^2 = 0.$$

Diese algebraische Kurve 3. Ordnung ist zirkular. Die Kurve (22) läßt sich parametrisieren, wenn man  $y = tx$  in (22) einsetzt. Man findet

$$(23) \quad \begin{cases} x = \frac{-pt^2 + 2\alpha t + 2\beta}{1 + t^2} \\ y = \frac{-pt^3 + 2\alpha t^2 + 2\beta t}{1 + t^2} \end{cases}$$

Es liegt also eine *rationale Kurve 3. Ordnung* vor. Mittels (8) kann man aus (23) die *Schallfronten*  $\bar{c}$  berechnen. Nach Einführung der Abkürzung

$$(24) \quad W := p^2 t^8 + 2p(3p + 2\beta)t^6 - 8p\alpha t^5 + [4(\alpha^2 + \beta^2) + 9p^2 + 8\beta p]t^4 - 16\alpha p t^3 + [8(\alpha^2 + \beta^2) + 4p(p + \beta)]t^2 - 8\alpha p t + 4(\alpha^2 + \beta^2)$$

ergibt sich für die *Schallfronten*  $\bar{c}$

$$(25) \quad \begin{cases} \xi = \frac{-pt^2 + 2\alpha t + 2\beta}{1 + t^2} + L_0 \frac{pt^4 + (3p + 2\beta)t^2 - 4\alpha t - 2\beta}{\sqrt{W}} \\ \eta = \frac{-pt^3 + 2\alpha t^2 + 2\beta t}{1 + t^2} - L_0 \frac{2\alpha t^2 + (2p + 4\beta)t - 2\alpha}{\sqrt{W}} \end{cases}$$

Wird (25) in eine Geradengleichung (12) eingesetzt, so erhält man nach einiger Rechnung ein *Polynom vom Grad 14*, wobei der Koeffizient des höchsten Gliedes  $B^2 p^4$  von Null verschieden ist. Die *Schallfronten* sind somit *algebraische Kurven 14. Ordnung*. Wir fassen zusammen im

**Satz 3.** *Die Schallfronten einer Parabel (20) bezüglich  $S = U(0, 0)$  sind im allgemeinen algebraische Kurven 14. Ordnung, die sich mittels (25) parametrisieren lassen. Diese Kurven sind Parallelkurven zur rationalen, zirkularen Kurve 3. Ordnung (22).*

Verschiedene Sonderfälle von Satz 3 wurden schon in [3] betrachtet.

## 2. Eine Kennzeichnung der Parabel und der Mittelpunktkegelschnitte

Im ersten Teil der Arbeit haben wir unter (26) eine Formel angegeben, die es gestattet, aus der Zentralkurve  $k$  die Ausgangskurve  $c$  zu berechnen. Ist  $k$  durch  $\{u = u(t), v = v(t)\}$  gegeben, so lautet  $c$

$$(26) \quad \left\{ x = \frac{uv\dot{u} + \frac{1}{2}\dot{v}(v^2 - u^2)}{\dot{u}v - \dot{v}u}, \quad y = \frac{-uv\dot{v} + \frac{1}{2}\dot{u}(v^2 - u^2)}{\dot{u}v - \dot{v}u} \right\},$$

wobei die Schallquelle im Koordinatenursprung liegt. Bestimmen wir zunächst alle Kurven  $c$ , deren *sämtliche Schallfronten*  $\bar{c}$  bezüglich einer

festen Schallquelle  $S$  Geraden sind. Wir legen o.B.d.A.  $S$  in den Koordinatenursprung. Da nach [3] die Schallfronten Parallelkurven zur Gegenpunktkurve  $k$  sind, muß  $k$  zwingend eine Gerade sein, und die Schallfronten  $\tilde{c}$  sind durchwegs parallele Geraden. Durch eine Drehung des Koordinatensystems um den Punkt  $S = U$  kann man noch erreichen, daß diese parallele Geradenschar durch  $x = \text{const.}$  beschrieben wird. Setzt man  $k$  in der Gestalt  $\{u = a_0, v = t\}$  an, dann erhält man aus (26)

$$(27) \quad \left\{ x = \frac{1}{2a_0}(a_0^2 - t^2), \quad y = t \right\},$$

d.h. die Parabel

$$(28) \quad y^2 = a_0^2 - 2a_0x.$$

Sie besitzt den Parameter  $p = -a_0$  und den Koordinatenursprung als Brennpunkt. Die Leitgerade  $x = a_0$  ist die Gegenpunktkurve. Damit haben wir den

**Satz 4.** *Die einzigen regulären Kurven der Klasse  $C^1$  der euklidischen Ebene, deren sämtliche Schallfronten bezüglich einer festen Schallquelle  $S$  durchwegs Geraden sind, sind die Parabeln.  $S$  ist der Parabelbrennpunkt.*

Der Satz 4 liefert also eine *Kennzeichnung der Parabeln*.

Nun versuchen wir alle Kurven zu bestimmen, deren Schallfronten  $\tilde{c}$  bezüglich einer festen Schallquelle  $S$  durchwegs Kreise sind. Wieder folgt nach [3], daß diese Kreise konzentrisch sein müssen, da sie Parallelkurven zur Zentralkurve  $k$  sein müssen, die dann selbst ein Kreis sein muß. Wir legen die Schallquelle  $S$  in den Koordinatenursprung  $U$  und können dann durch eine Drehung des Koordinatensystems um  $S = U$  noch erreichen, daß die  $x$ -Achse des Koordinatensystems den Mittelpunkt  $M$  des Gegenpunktkreises  $k$  enthält. Wir können damit  $k$  in der Gestalt

$$(29) \quad \{u = e + r \cos t, \quad v = r \sin t\}$$

ansetzen, wobei  $e = \overline{SM}$  bedeutet und  $r$  den Radius des Gegenpunktkreises bezeichnet. Aus (29) berechnen wir  $\dot{u} = -r \sin t$ ,  $\dot{v} = r \cos t$ ,  $\dot{u}v - v\dot{u} = -r^2 - er \cos t$  und erhalten damit aus (26) für  $c$  nach kurzer Rechnung die Parameterdarstellung

$$(30) \quad \begin{cases} x = \frac{er + \frac{1}{2}(e^2 + r^2) \cos t}{r + e \cos t} \\ y = \frac{\frac{1}{2}(r^2 - e^2) \sin t}{r + e \cos t} \end{cases}$$

Nach längeren algebraischen Umformungen stellt sich die algebraische Gleichung von (30) zu

$$(31) \quad \left(x - \frac{e}{2}\right)^2 + \frac{r^2 y^2}{r^2 - e^2} = \frac{r^2}{4}$$

ein. Für  $r > e$  ist (31) eine *Ellipse* mit dem Mittelpunkt  $M(\frac{1}{2}e, 0)$  und den Brennpunkten  $F_1 = U(0, 0), F_2 = (e, 0)$ . Die Schallfronten sind dann bekanntlich die konzentrischen Kreise um  $F_2$ . Für  $r < e$  ist (31) eine *Hyperbel* mit dem Mittelpunkt  $M(\frac{1}{2}e, 0)$  und den beiden Brennpunkten  $F_1 = U(0, 0), F_2 = (e, 0)$ . Die Hauptscheitel besitzen die Koordinaten  $A[\frac{1}{2}(e - r), 0]$  und  $B[\frac{1}{2}(e + r), 0]$ . Die Schallfronten sind konzentrische Kreise um  $F_2$  (vgl. Abbildung 2). Wir fassen zusammen im

**Satz 5.** *Die einzigen regulären Kurven der Klasse  $C^1$  der euklidischen Ebene, deren sämtliche Schallfronten bezüglich einer festen Schallquelle  $S$  Kreise sind, sind die Ellipsen und die Hyperbeln.  $S$  ist dann ein Brennpunkt des Kegelschnittes, während die Schallfronten konzentrische Kreise um den anderen Brennpunkten sind.*

Der Satz 5 liefert somit eine *Kennzeichnung* der reellen Mittelpunktkegelschnitte.

### 3. Kurven mit toroidalen Schallfronten

In der Konstruktiven Geometrie sind die Parallelkurven einer Ellipse von großem Interesse, treten sie doch als Umrißkurven eines Torus auf (vgl. [5, 273], [8, 150]). Es liegt nahe, alle Kurven  $c$  zu bestimmen, die bezüglich einer festen Schallquelle  $S$  *Toroiden* als *Schallfronten* besitzen. Diese Toroiden können bekanntlich (vgl. [8, 150]) reelle Spitzen besitzen, in deren Umgebung es zu einer starken Verdichtung der Schallfronten kommt. Ein dort positionierter Beobachter könnte daher — ähnlich wie bei den elliptischen Flüster-Gewölben — Gespräche abhören, die in der Schallquelle  $S$  geführt werden.

Zur näheren Untersuchung legen wir die Schallquelle  $S$  wieder in den Ursprung  $U$  des Koordinatensystems. Nach Drehung der  $x$ -Achse um den Punkt  $U$  kann man erreichen, daß die Ellipse  $k$  durch (1) mit

$\varepsilon = +1$  beschrieben wird. Setzt man für die Mittelpunktkoordinaten von  $k$  jetzt  $\alpha = m_1$ ,  $\beta = m_2$  dann läßt sich  $k$  in der Form

$$(32) \quad \{u = m_1 + a \cos t, \quad v = m_2 + b \sin t$$

parametrisieren. Hieraus gewinnt man mittels (26) nach einiger Rechnung und unter Benützung der Abkürzungen

$$(33) \quad \begin{aligned} A_3 &:= \frac{1}{2}b(b^2 - a^2) \\ A_2 &:= m_2(a^2 - b^2) \\ A_1 &:= a^2b - \frac{1}{2}b^3 + \frac{1}{2}b(m_1^2 - m_2^2) \\ B_3 &:= \frac{1}{2}a(a^2 - b^2) \\ B_2 &:= m_1(b^2 - a^2) \\ B_1 &:= ab^2 - \frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{2}a(m_2^2 - m_1^2) \end{aligned}$$

für die gesuchte Kurve  $c$

$$(34) \quad \begin{cases} x = \frac{A_3 \cos^3 t + A_2 \sin t \cos t + A_1 \cos t + am_1 m_2 \sin t + abm_1}{ab + am_2 \sin t + bm_1 \cos t} \\ y = \frac{B_3 \sin^3 t + B_2 \sin t \cos t + B_1 \sin t + bm_1 m_2 \cos t + abm_2}{ab + am_2 \sin t + bm_1 \cos t} \end{cases}$$

Zur Untersuchung von (34) wenden wir auf (34) zunächst die Schiebung  $\{\tilde{x} = x - m_1, \tilde{y} = y - m_1\}$  an und finden

$$(35) \quad \begin{cases} \tilde{x} = \frac{A_3 \cos^3 t + A_2 \sin t \cos t + \tilde{A}_1 \cos t}{ab + am_2 \sin t + bm_1 \cos t} \\ \tilde{y} = \frac{B_3 \sin^3 t + B_2 \sin t \cos t + \tilde{B}_1 \sin t}{ab + am_2 \sin t + bm_1 \cos t} \end{cases},$$

wobei gesetzt wurde

$$(36) \quad \begin{aligned} \tilde{A}_1 &= a^2b - \frac{1}{2}b^3 - \frac{1}{2}b(m_1^2 + m_2^2) \\ \tilde{B}_1 &= ab^2 - \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{2}a(m_1^2 + m_2^2). \end{aligned}$$

Nach goniometrischen Umformungen fließt aus (35)

$$(37) \quad \begin{cases} \tilde{x} = \frac{a_3 \cos 3t + a_2 \sin 2t + a_1 \cos t}{ab + am_2 \sin t + bm_1 \cos t} \\ \tilde{y} = \frac{b_3 \sin 3t + b_2 \sin 2t + b_1 \sin t}{ab + am_2 \sin t + bm_1 \cos t} \end{cases}$$

mit den Abkürzungen

$$(38) \quad \begin{aligned} a_3 &:= \frac{1}{8}b(b^2 - a^2) \\ a_2 &:= \frac{1}{2}m_2(a^2 - b^2) \\ a_1 &:= \frac{1}{8}b(5a^2 - b^2) - \frac{1}{2}b(m_1^2 + m_2^2) \\ b_3 &:= -\frac{1}{8}a(a^2 - b^2) \\ b_2 &:= \frac{1}{2}m_1(b^2 - a^2) \\ b_1 &:= \frac{1}{8}a(5b^2 - a^2) - \frac{1}{2}a(m_1^2 + m_2^2). \end{aligned}$$

Die Darstellung (37) eignet sich vorzüglich zur Konstruktion von  $c$  mittels Computer. Um die Ordnung der Kurve (35) zu bestimmen, wenden wir die Parametertransformation  $tg \frac{t}{2} = u$  an und finden nach kurzer Rechnung

$$(39) \quad \begin{cases} \tilde{x} = \frac{A_3(1-u^2)^3 + 2A_2u(1-u^4) + \tilde{A}_1(1-u^2)(1+u^2)^2}{ab(1+u^2)^3 + 2am_2u(1+u^2)^2 + bm_1(1-u^2)(1+u^2)^2} \\ \tilde{y} = \frac{8B_3u^3 + 2B_2u(1-u^4) + 2\tilde{B}_1u(1+u^2)^2}{ab(1+u^2)^3 + 2am_2u(1+u^2)^2 + bm_1(1-u^2)(1+u^2)^2} \end{cases}$$

Die Kurve  $c$  ist bei *allgemeiner Lage* der Schallquelle  $S$  somit eine rationale Kurve 6. Ordnung. In diesem Fall besitzt die Kurve (39) 6 Fernpunkte bei algebraischer Zählung, die man über die Nullstellen des Nenners in (39) bestimmt. Man erhält  $u_1 = u_2 = i$ ,  $u_3 = u_4 = -i$ , sowie

$$(40) \quad u_{5,6} = \frac{-am_2 \pm \sqrt{\Delta}}{b(a - m_1)} \quad \text{mit} \quad \Delta := a^2m_2^2 + b^2m_1^2 - a^2b^2.$$

Zur näheren Untersuchung bezeichnen wir die zu (1) parallel verschobene Ellipse  $\hat{k}$  mit dem Mittelpunkt in der Schallquelle  $S$  als *Richtungselipse* zur Ellipse  $k$ . Da  $\hat{k}$  die Gleichung  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  besitzt, erkennt man, daß  $\Delta > 0$ ,  $\Delta < 0$  bzw.  $\Delta = 0$  gilt, wenn der Mittelpunkt  $M(m_1, m_2)$  von  $k$  außerhalb, innerhalb bzw. auf  $\hat{k}$  liegt.

Dementsprechend sind die Werte  $u_{5,6}$  in (46) beide reell, konjugiert-komplex bzw. zusammenfallend, und analoges gilt für die dazugehörigen Fernpunkte. Zum Parameterwert  $u_1 = u_2 = i$  bzw.  $u_3 = u_4 = -i$  erhält man je 2-fach gezählt die Fernpunkte  $F_1(0 : b : ia)$  bzw.  $F_2(0 : b : -ia)$ . Dies sind aber genau die Fernpunkte der zu (1) inversen Ellipse  $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ . Für  $\Delta = 0$  besitzt der Doppelfernpunkt  $F_3$  die Richtung  $(0 : 1 : 0)$ . Wir fassen zusammen im

**Satz 6.** Die Ausgangskurve  $c$  zu einer Schar von toroidalen Schallfronten  $\tilde{c}$  mit der Gegenpunktellipse  $k$  ist bei allgemeiner Lage der Schallquelle eine rationale, algebraische Kurve 6. Ordnung, die sich durch (34), (37) bzw. (38) beschreiben läßt. Die Kurve  $c$  besitzt die Fernpunkte der zu  $k$  inversen Ellipse als Doppelpunkte. Die Kurve  $c$  besitzt 2 reelle bzw. eine reelle Asymptote, wenn der Mittelpunkt von  $k$  außerhalb der Richtellipse bzw. auf der Richtellipse  $\hat{k}$  liegt.

Der Satz 6 enthält bemerkenswerte Sonderfälle, von denen i.f. zwei betrachtet werden sollen:

FALL 1: Die Schallquelle  $S$  liegt im Mittelpunkt der Ellipse  $k$ . In diesem Fall gilt in (37)  $m_1 = m_2 = 0$  und man erhält

$$(41) \quad \begin{cases} \tilde{x} &= \frac{1}{ab}(a_3 \cos 3t + a_1 \cos t) \\ \tilde{y} &= \frac{1}{ab}(b_3 \sin 3t + b_1 \sin t) \end{cases}$$

mit  $aa_3 = bb_3$ ,  $a_1 = \frac{1}{8}b(5a^2 - b^2)$  und  $b_1 = \frac{1}{8}a(5b^2 - a^2)$ .

Bildet man  $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$ , so gewinnt man mit Hilfe der Formeln  $\cos 3t = \frac{1}{2}(e^{3it} + e^{-3it})$ ,  $\sin 3t = \frac{1}{2i}(e^{3it} - e^{-3it})$  usw. nach einiger Rechnung

$$(42) \quad \tilde{z} = r_3 e^{3it} + r_1 e^{it} + s_3 e^{-3it} + s_1 e^{-it}$$

mit den Abkürzungen

$$(43) \quad \begin{aligned} r_3 &= \frac{1}{16ab}(a+b)^2(b-a) \\ r_1 &= \frac{1}{16ab}[a^2(5b-a) + b^2(5a-b)] \\ s_3 &= \frac{1}{16ab}(a+b)(b-a)^2 \\ s_1 &= \frac{1}{16ab}[a^2(5b+a) - b^2(5a+b)]. \end{aligned}$$

Die Kurve (41) ist somit als Radlinie 4. Stufe erzeugbar und besitzt die Ordnung 6 (vgl. [7, 283]), wie es sein muß. Zur näheren Untersuchung

dieser Kurve gehen wir jedoch besser von der Darstellung (35) mit  $A_2 = B_2 = 0$ ,  $A_3 : B_3 = -b : a$  aus, und wenden auf (35) die perspektive Affinität  $\{\tilde{x} = x, \tilde{y} = \frac{B_3}{A_3} y\}$  an. Man gewinnt dann

$$(44) \quad \begin{cases} x &= \frac{b^2 - a^2}{2a} \cos^3 t + \frac{2a^2 - b^2}{2a} \cos t \\ y &= \frac{b^2 - a^2}{2a} \sin^3 t + \frac{a^2 - 2b^2}{2a} \sin t \end{cases}$$

und erhält schließlich nach Anwendung der zentrischen Streckung  $\{\hat{x} = 2ax, \hat{y} = 2ay\}$  die Parameterdarstellung

$$(45) \quad \begin{cases} \hat{x} &= \cos t[(b^2 - a^2) \cos^2 t + (2a^2 - b^2)] \\ \hat{y} &= \sin t[(b^2 - a^2) \sin^2 t + (a^2 - 2b^2)] \end{cases},$$

die sich leicht zu

$$(46) \quad \begin{cases} \hat{x} &= \cos t[(a^2 - b^2) \sin^2 t + a^2] \\ \hat{y} &= \sin t[(a^2 - b^2) \cos^2 t - b^2] \end{cases}$$

umformen läßt. Nach [1, 309] ist die Kurve (46) aber die bekannte *Kurve von Talbot*, deren algebraische Gleichung von Tortoloni und Bourget gefunden wurde (vgl. [2, 313]). Die Abbildung 3 zeigt eine Ellipse  $k$  als Gegenpunktkurve zur Kurve von Talbot  $c$ , sowie eine toroidale Schallfront  $\tilde{c}$ .

Wir fassen zusammen im

**Satz 7.** *Die Ausgangskurve  $c$  zu einer Schar von toroidalen Schallfronten  $\tilde{c}$ , wobei die Schallquelle im Mittelpunkt der Gegenpunktellipse  $k$  liegt, ist eine Radlinie 4. Stufe  $c$  mit der Darstellung (42). Sie entsteht aus der Kurve von Talbot (46) durch eine zentrische Streckung und eine nachfolgende perspektive Affinität.*

FALL 2: Die Schallquelle  $S$  liegt in einem Hauptscheitel der Gegenpunktellipse  $k$ . In diesem Fall ist  $m_1 = a$ ,  $m_2 = 0$  und wegen  $A_2 = 0$ ,  $B_1 = B_2 = -2B_3$ ,  $\tilde{A}_1 = -A_3$ ,  $\tilde{B}_1 = B_2 = -2B_3$  vereinfacht sich (35) jetzt erheblich zu

$$(47) \quad \begin{cases} \tilde{x} &= -\frac{A_3}{ab} \cos t(1 - \cos t) \\ \tilde{y} &= -\frac{B_3}{ab} \sin t(1 + \cos t) \end{cases}$$

Nach trigonometrischen Umformungen und nach Anwendung der Schiebung  $\{\tilde{x} = \hat{x} + \frac{A_3}{2ab}, \tilde{y} = \hat{y}\}$  läßt sich die Kurve in der Gestalt

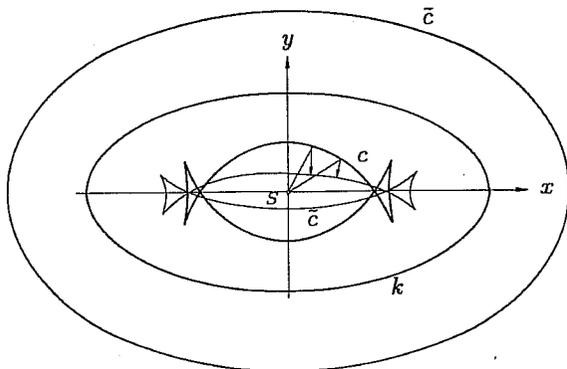


Abbildung 3

(48)  $\hat{z} = \hat{x} + i\hat{y} = d_2 e^{2it} + d_1 e^{it} + s_2 e^{-2it} + s_1 e^{-it}$   
 schreiben, wobei gesetzt wurde

$$(49) \quad \begin{aligned} d_2 &= \frac{1}{8ab} (a+b)^2 (b-a) \\ d_1 &= -\frac{1}{4ab} (b-a)^2 (a+b) \\ s_2 &= \frac{1}{8ab} (b-a)^2 (a+b) = -\frac{1}{2} d_1 \\ s_1 &= \frac{1}{4ab} (a+b)^2 (a-b) = -\frac{1}{2} d_2. \end{aligned}$$

Die Kurve (48) ist somit eine *Radlinie 4. Stufe* und besitzt nach [7, 283] die Ordnung 4. Zur näheren Untersuchung der Kurve (47) wenden wir auf (47) die perspektive Affinität  $\{\tilde{x} = x, \tilde{y} = \frac{B_3}{A_3} y\}$  an und erhalten

$$(50) \quad \begin{cases} x = \frac{a^2 - b^2}{2a} \cos t (1 - \cos t) \\ y = \frac{a^2 - b^2}{2a} \sin t (1 + \cos t) \end{cases}$$

Unterwirft man (50) noch der zentrischen Streckung  $\{x = \frac{a^2 - b^2}{2a} \hat{x}, y = \frac{a^2 - b^2}{2a} \hat{y}\}$ , dann stellt sich

$$(51) \quad \begin{cases} \hat{x} = \cos t (1 - \cos t) \\ \hat{y} = \sin t (1 + \cos t) \end{cases}$$

ein. Schließlich läßt sich (51) nach Anwendung der Schiebung  $\{\tilde{x} = \hat{x} + \frac{1}{2}, \tilde{y} = \hat{y}\}$  in der Gestalt

$$(52) \quad \begin{cases} \tilde{x} = \cos t - \frac{1}{2} \cos 2t \\ \tilde{y} = \sin t + \frac{1}{2} \sin 2t \end{cases}$$

schreiben, woraus die komplexe Darstellung

$$(53) \quad \tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y} = e^{it} - \frac{1}{2}e^{-2it}$$

fließt. Somit ist (53) eine Radlinie 2. Stufe der Charakteristik  $\omega_1 : \omega_2 = 1 : -2$ , die nach [6, 152] zyklodal ist. Nach [4, 99] ist (53) dann eine dreispitzige Steinersche Hypozykloide. Damit folgt der **Satz 8.** *Die Ausgangskurve  $c$  zu einer Schar von toroidalen Schallfronten  $\tilde{c}$ , wobei die Schallquelle in einem Hauptscheitel der Gegenpunktellipse  $k$  liegt, ist eine algebraische Radlinie 4. Stufe  $c$  (48) der Ordnung 4. Sie entsteht aus einer dreispitzigen Steinerschen Hypozykloide durch eine zentrische Streckung und eine nachfolgende perspektive Affinität.*

## Literatur

- [1] FLADT, K.: Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven, Akad. Verlagsgesellschaft, Frankfurt, 1962.
- [2] LORIA, G.: Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, Leipzig, 1910/11.
- [3] SACHS, H. und MÉSZÁROS, F.: Schallfronten an ebenen Kurven I, *Mat. Pannonica* 8/2 (1997) 187–200.
- [4] STRUBECKER, K.: Differentialgeometrie I, Sammlung Götschen, Bd. 1113/1113a, Berlin, 1964.
- [5] STRUBECKER, K.: Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1967.
- [6] WUNDERLICH, W.: Ebene Kinematik, BI-Hochschultaschenbücher, Bd. 447/447a, Mannheim/Wien/Zürich, 1970.
- [7] WUNDERLICH, W.: Höhere Radlinien, *Österreichisches Ingenieur-archiv* 1 (1947), 277–296.
- [8] WUNDERLICH, W.: Darstellende Geometrie I, BI-Hochschultaschenbücher, Bd. 96/96a, Bibl. Institut Mannheim/Wien/Zürich, 1966.