Mathematica Pannonica
6/2 (1995), 285 – 295

ZYKLIDEN 3. ORDNUNG DES GALILEISCHEN RAUMES G_3

Dominik **Palman**

Institut für Mathematik, Universität, Bijenička c. 30, HR–41000 Zagreb, Croatia

Herrn Prof. Dr. Hans Vogler zum 60. Geburtstag gewidmet

Received December 1994

MSC 1991: 51 N 25

Keywords: Galileian space, cyclides, power of a point with respect to a cyclide, pointsphere.

Abstract: An equation of a cyclide of order 3 in a Galileian space G_3 is of the form $p^3(x)+Ay^2+Bz^2+Cyz+y\cdot r^1(x)+z\cdot s^1(x)=0$, where $p^3(x)$ is a normed polynomial of order 3, and $r^1(x),s^1(x)$ are two arbitrary linear polynomials. In this paper we classify these cyclides in terms of the coefficients of the former equation.

Zykliden des euklidischen Raumes E_3 sind nach G. Darboux [1] solche algebraische Flächen 4. Ordnung, die den absoluten Kegelschnitt als Doppelkurve enthalten.

Analog definiert man Zykliden im einfach isotropen Raum I_3 als algebraische Flächen 4. Ordnung, die die beiden absoluten Geraden dieses Raumes als Doppelgeraden enthalten (vgl. D. Palman [3], H. Sachs [8]). Es ist klar, daß solche Zykliden außer den auf dem absoluten Geradenpaar liegenden Punkten, keine weiteren uneigentlichen Punkte besitzen. Anderseits existieren Flächen 4. Ordnung im einfach isotropen Raum I_3 mit der vorigen Eigenschaft wobei aber die beiden absoluten Geraden keine Doppelgeraden dieser Fläche sind. Solche Flächen werden als *verallgemeinerte Zykliden* bezeichnet (vgl. H. Sachs [8]).

1. Im galileischen Raum G_3 besteht bekanntlich die Absolutfigur

$\{\omega, f, \mathcal{I}\}$ aus einer (uneigentlichen) Ebene ω, einer in der Ebene ω liegenden Geraden f (absolute Gerade) und einer absoluten elliptischen Involution $\mathcal{I}$ auf der Geraden f.

Gegeben sei also ein affiner Raum, den wir als galileischen Raum G_3 auffassen, mit der Ebene

$$\omega \ldots x_0 = 0,$$

der absoluten Geraden

$$f \ldots x_0 = 0; \quad x_1 = 0,$$

und der auf der absoluten Geraden f operierenden elliptischen Involution

$$\mathcal{I} \ldots (0:0:x_2:x_3) \longmapsto (0:0:x_3:-x_2).$$

Als zugrundegelegtes Koordinatensystem denken wir uns ein kartesisches Koordinatensystem eingeführt, wobei für die eigentlichen Punkte

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 : x : y : z$$

gilt.

Die Geometrie des galileischen Raumes G_3 wurde ausführlich in [6] untersucht. Ebenen durch f werden im Sinne [6, 7] als *euklidische Ebenen* bezeichnet; alle andere eigentliche Ebenen heißen *isotrop.* Analog zum euklidischen Raum E_3 und zum isotropen Raum I_3 können wir nun ganz allgemein die Zykliden des galileischen Raumes G_3 definieren durch:

Definition 1. Algebraische Flächen beliebiger Ordnung n, welche außer den absoluten Geraden f keinen weiteren Punkt in der Fernebene ω besitzen, heißen *Zykliden des galileischen Raumes* G_3.

Wir haben hier den Begriff der Zykliden in zweifacher Weise verallgemeinert. Erstens betrachten wir nicht nur Flächen 4. Ordnung, sondern beliebiger Ordnung n, und zweitens darf die absolute Gerade f eine m-fache Gerade der Fläche sein, wobei $1 \leqq m \leqq n-1$ gelten kann.

2. Bei der Untersuchung der Zykliden im galileischen Raum G_3, wie auch im einfach isotropen Raum I_3, spielt der Potenzbegriff eine bedeutende Rolle. Es wurde nämlich analog zu dem bekannten Begriff der Kreis- und Kugelpotenz in der euklidischen Ebene und im euklidischen Raum, auch eine Kreis- und Kugelpotenz in der isotropen Ebene I_2 sowie im einfach isotropen Raum I_3 definiert (vgl. H. Sachs [7]). Es wurde weiter gezeigt, daß man analog eine Potenz für vollständig zirkuläre Kurven 3. und 4. Ordnung der isotropen Ebene sowie eine Potenz für Zykliden 4. Ordnung im einfach isotropen Raum I_3 definieren kann (vgl. [4], [5]). Weiters wurde ein Potenzbegriff für vollständig zirkuläre Kurven beliebiger Ordnung (vgl. [10]) der isotropen Ebene sowie für Zykliden beliebiger Ordnung im einfach isotropen Raum I_3 (vgl. [8]) untersucht.

Es sei also eine vollständig zirkuläre Kurve k n-ter Ordnung in I_2 oder eine Zyklide ϕ n-ter Ordnung in I_3 und ein beliebiger Punkt P gegeben. Eine P enthaltende nicht isotrope Gerade g schneidet die Kurve k bzw. die Zyklide ϕ in n Punkten $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Das Produkt

$$p = \overline{PS}_1 \cdot \overline{PS}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{PS}_n$$

wird als Potenz p des Punktes P bezüglich der Kurve k bzw. der Fläche ϕ bezeichnet. Hier sind PS_i die isotropen Entfernungen des Punktes P von den Punkten S_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Im galileischen Raum G_3 definieren wir ähnlich:

Definition 2. Es sei eine Zyklide ϕ_n n-ter Ordnung im galileischen Raum G_3 und ein Punkt P gegeben. Eine P enthaltende nichtisotrope Gerade s schneide die Zyklide ϕ_n in n Punkten $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Wir bezeichnen das Produkt der isotropen Abstände

$$p = \overline{PS}_1 \cdot \overline{PS}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{PS}_n$$

als *Potenz* des Punktes P bezüglich der Zyklide ϕ_n.

Satz 1. *Die Potenz p eines Punktes P bezüglich einer Zyklide ϕ_n im galileischen Raum G_3 hängt nicht von der Lage der P enthaltenden Geraden s ab.*

Beweis. Es sei eine Zyklide ϕ_n n-ter Ordnung und ein Punkt P gegeben. Legen wir durch P zwei beliebige verschiedene nichtisotrope Geraden s und t. Die Potenz p_s des Punktes P bezüglich der Geraden s ist dann

$$p_s = \overline{PS}_1 \cdot \overline{PS}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{PS}_n$$

und bezüglich der Geraden t analog

$$p_t = \overline{PT}_1 \cdot \overline{PT}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{PT}_n.$$

Da die Ebene α, die von den Geraden s und t aufgespannt wird offensichtlich eine isotrope Ebene ist, und die Schnittkurve von ϕ mit α eine vollständig zirkuläre Kurve n-ter Ordnung in α ist, stimmt der eingeführte Potenzbegriff mit dem Potenzbegriff von [10, 78] überein. Gemäß [10], Satz 1 gilt somit $p_s = p_t$. $\Diamond$

Der Wert der Potenz p wird erhalten, in dem man in die normierte Gleichung der Zyklide ϕ_n die Koordinaten des Punktes P einsetzt, was man analog zum [8], Satz 1 beweisen kann.

3. Betrachten wir im einfach isotropen Raum I_3 r Zykliden ϕ_1, $\phi_2, \ldots, \phi_r$ der Ordnungen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ und einen Punkt P, und suchen wir den geometrischen Ort aller Raumpunkte, deren Produkt der Potenzen p_1, $p_2, \ldots, p_r$ bezüglich der einzelnen Zykliden ϕ_i einen konstanten Wert p hat, d.h. für welche

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$$

gilt. Der genannte geometrische Ort ist wieder eine Zyklide ϕ des Raumes I_3 der Ordnung $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$. Die Zyklide ϕ bezeichnet man als Potenzproduktzyklide der Zykliden $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r$ (vgl. [2]). Man kann diesen Begriff im galileischen Raum G_3 ähnlicherweise definieren:

Definition 3. Es seien r Zykliden $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r$ der Ordnungen n_1, $n_2, \ldots, n_r$ und ein Punkt P in galileischen Raum G_3 gegeben. Die *Potenzproduktzyklide* ϕ der Zykliden $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r$ ist eine Zyklide ϕ der Ordnung $n_1 + n_2 + \ldots + n_r$, die wir als geometrischen Ort aller Raumpunkte erhalten, deren Produkt der Potenzen $p_1, p_2, \ldots, p_r$ des Punktes P bezüglich der einzelnen Zykliden ϕ_i einen konstanten Wert hat, d.h. für welche $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$ gilt.

4. Als *Punktkugeln des galileischen Raumes* G_3 bezeichnet man bekanntlich jenen parabolischen Zylinder, die die Fernebene ω längs der absoluten Geraden f berühren (vgl. Röschel [6]). Ihre Gleichung ist von der Form

$$Ax^2 + Bx - 2Cy - 2Dz + E = 0 \tag{1}$$

wobei $A \neq 0$, $C^2 + D^2 \neq 0$. Die Spitze eines Zylinders (1) liegt im absoluten Fernpunkt $S(0 : 0 : D : -C)$ und wird als Spitze der Punktkugel bezeichnet. Gemäß Def. 1 sind diese Punktkugeln die *Zykliden 2. Ordnung des galileischen Raumes* G_3.

Den Begriff der Punktkugel können wir wie folgt verallgemeinern:

Definition 4. Einen Zylinder, den man als Menge aller Verbindungsgeraden eines absoluten Fernpunktes S auf der absoluten Geraden f mit allen Punkten einer vollständig zirkuläre Kurve n-ter Ordnung in einer den Punkt S nichtenthaltenden isotropen Ebene erhält, bezeichnen wir als *Punktkugel n-ter Ordnung des galileischen Raumes G_3*. Den Punkt S bezeichnen wir als *Spitze* der Punktkugel.

Solche Punktkugeln sind offensichtlich Zykliden n-ter Ordnung des galileischen Raumes G_3.

5. Da eine Zyklide 3. Ordnung ϕ im galileischen Raum G_3 nur die Punkte auf der absoluten Geraden f als Fernpunkte besitzt, kann man ihre Gleichung in der Form

$$(2) \qquad \phi \ldots \quad p^3(x) + Ay^2 + Bz^2 + Cyz + y \cdot r^1(x) + z \cdot s^1(x) = 0$$

schreiben, wobei $p^3(x)$ ein normiertes Polynom 3. Ordnung ist, und $r^1(x)$, $s^1(x)$ zwei beliebige lineare Polynome bezeichnen.

Es sind hier zwei Hauptfälle zu unterscheiden:

HAUPTFALL I: *In der Gleichung* (2) *ist mindestens einer der Koeffizienten A, B, C von Null verschieden.*

Wir werden zunächst ganz allgemein voraussetzen, daß alle drei Koeffizienten von Null verschieden sind, also

$$(3) \qquad ABC \neq 0$$

gilt. Die Schnittkurve einer Fläche (2), für welche (3) gilt mit einer euklidischen Ebene $x =$ konst besteht offensichtlich aus der absoluten Geraden f und einen Kegelschnitt k. Die Gleichung des Kegelschnitts k erhalten wir durch Einsetzen von $x =$ konst in die Gleichung (2). Man ersieht leicht, daß alle diese Kegelschnitte k (für verschiedene Werte x) die absolute Gerade f in den Punkten

$$(4) \qquad D_{1,2} \ldots \quad \left(0 : 0 : 2B : -C \pm \sqrt{C^2 - 4AB}\right)$$

schneiden. Man zeigt auch leicht, daß die Mittelpunkte dieser Kegelschnitte k auf einer Geraden g liegen. Die Gleichung der Geraden g lautet in Parameterform (wenn x den Parameter bezeichnet)

$$(5) \qquad y = \frac{C \cdot s^1(x) - 2B \cdot r^1(x)}{4AB - C^2}, \quad z = \frac{C \cdot r^1(x) - 2A \cdot s^1(x)}{4AB - C^2}.$$

Es gilt also der

Satz 2. *Für eine Zyklide 3. Ordnung $\phi((2))$, für welche* (3) *gilt, ist die absolute Gerade f eine einfache Gerade. Die Zyklide hat in den Punkten $D_{1,2}$ zwei reelle, konjugiert-komplexe oder einen uniplanaren Knoten, je nach dem $C^2 - 4AB \gtreqless 0$.*

Schneiden wir die Zyklide $\phi((2))$ mit einer isotropen Ebene

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{6}$$

so ist die Projektion l' der Schnittkurve l in die $[xy]$-Ebene eine Kurve 3. Ordnung, deren Gleichung von der Form

$$l' \ldots \quad q^3(x) + My^2 + y \cdot u^1(x) = 0 \tag{7}$$

ist, wobei $q^3(x)$ ein normiertes Polynom 3. Grades und $u^1(x)$ ein lineares Polynom bezeichnet.

Es ist leicht zu zeigen, daß diese Kurve l' eine vollständig zirkuläre Kurve 3. Ordnung der isotropen $[xy]$-Ebene ist, und zwar eine divergente Parabel (vgl. [4]). Eine solche Kurve hat bekanntlich im absoluten Punkt einen Inflexionspunkt mit der absoluten Geraden als Inflexionstangente. Daraus ergibt sich, daß die *Zyklide* (2) *die absolute Gerade* f *als Inflexionsgerade hat.* Die Fernebene ω berührt und schneidet zugleich die Zyklide $\phi(2)$ längs der absoluten Geraden.

6. Wir betrachten weiter einen interessanten Sonderfall der Zykliden des Hauptfalls I.

Sonderfall I_1: $A = B \neq 0$, $C = 0$.

Die Gleichung der entsprechenden Zyklide ϕ lautet nun

$$\phi \ldots \quad p^3(x) + A(y^2 + z^2) + y \cdot r^1(x) + z \cdot s^1(x) = 0. \tag{8}$$

Jede euklidische Ebene schneidet eine solche Zyklide außer f noch in einem euklidischen Kreis

$$y^2 + z^2 + \frac{r^1(x)}{A} y + \frac{s^1(x)}{A} z + p^3(x) = 0 \tag{9}$$

Die Mittelpunkte aller dieser euklidischen Kreise liegen auf einer Geraden

$$g \ldots \; y = \frac{r^1(x)}{2A}, \qquad z = \frac{s^1(x)}{2A}. \tag{10}$$

Eine *euklidische Drehung des galileischen Raumes* G_3 um eine Achse g ist eine einparametrige stetige Bewegungsgruppe des galileischen Raumes G_3, bei welcher eine eigentliche nichtisotrope Achse g aus lauter Fixpunkte existiert. Die absolute Gerade f bleibt hierbei ebenenweise fest. Die Bahnkurven sind euklidische Kreise in den euklidischen Ebenen des galileischen Raumes G_3, deren Mittelpunkte auf der nichtisotropen Achse g liegen, die wir als Drehachse bezeichnen wollen (vgl. [6]). Man schließt daraus, daß die *Zyklide* (8) *eine Drehzyklide*

3. Ordnung ist, die durch eine euklidische Drehung um die Achse (10) *erzeugbar ist.*

Wir können weiter die Gleichung (8) der Zyklide ϕ mittels einer galileischen Bewegung auf der Normalform

$$A(y^2 + z^2) + p^3(x) = 0. \tag{11}$$

transformieren. Die Drehachse ist nun die x-Achse des Koordinatensystems. Schneiden wir diese Zyklide mit der Meridianebene $z = 0$, so erhalten wir die Gleichung des Meridians in der $[xy]$-Ebene in der Form

$$Ay^2 + p^3(x) = 0. \tag{12}$$

Man ersieht leicht, daß dies eine divergente Parabel mit der x-Achse als Symmetrieachse ist. Damit gilt der

Satz 3. *Die Zykliden 3. Ordnung* (8) *des galileischen Raumes G_3 vom Hauptfall I mit $A = B \neq 0$, $C = 0$ sind Drehzykliden des Raumes G_3, die durch eine euklidische Drehung einer divergenten Parabel um ihre Achse entstehen. Dies sind die einzige Drehzykliden 3. Ordnung des galileischen Raumes G_3.*

7. Sonderfall I_2: Wir betrachten nochmals die Kegelschnitte κ welche die euklidischen Ebenen aus der Zyklide $\phi((2))$ als Restschnitte herausschneiden. Dazu setzen wir in (2) $x =$ konst. Dieser Kegelschnitt κ zerfällt bekanntlich dann in zwei Geraden, wenn

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & \frac{C}{2} & r^1(x) \\ \frac{C}{2} & B & s^1(x) \\ r^1(x) & s^1(x) & p^3(x) \end{vmatrix} = 0 \tag{13}$$

gilt. Wenn noch zusätzlich

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} A & \frac{C}{2} \\ \frac{C}{2} & B \end{vmatrix} = AB - \frac{1}{4}C^{2=0} \tag{14}$$

erfüllt ist, so zerfällt der Kegelschnitt κ in zwei parallele isotrope Geraden. Beachtet man (14), so ergibt sich aus (13)

$$s^1(x) = \pm\sqrt{\frac{A}{B}} \cdot r^1(x). \tag{15}$$

Wenn also die Bedingungen (14) und (15) gelten, so zerfällt der Kegelschnitt κ in der euklidischen Ebene $x =$ konst in zwei parallele Geraden. Man sieht weiter: *Gilt* (14) *und* (15) *für eine bestimmte Ebene* $x =$ konst, *dann gilt dies für alle euklidischen Ebenen.*

Alle Geraden der Fläche ϕ in den erwähnten Ebenen gehen nach (4) durch den absoluten Punkt

$$S \ldots \left(0:0:1:-\frac{A}{B}\right) \tag{16}$$

Wegen der Realität solcher Flächen müssen die Koeffizienten A und B in (16) das gleiche Vorzeichen haben. Daraus folgt der

Satz 4. *Eine Zyklide $\phi((2))$, die die Bedingungen des Hauptfalles I, und noch* (14) *und* (15) *erfüllt, ist eine Punktkugel 3. Ordnung mit der Spitze von* (16) *gegebene S. Man kann sie erhalten als Menge der Verbindungsgeraden aller Punkte einer divergenten Parabel in einer (S nicht enthaltenden) isotropen Ebene mit dem absoluten Punkt S.*

HAUPTFALL II: $A = B = C = 0$.

8. Setzen wir in (2) $A = B = C = 0$, so erhalten wir die Gleichung

$$\psi \ldots \quad p^3(x) + y \cdot r^1(x) + z \cdot s^1(x) = 0, \tag{17}$$

wobei $p^3(x)$ ein normiertes Polynom 3. Grades ist und $r^1(x)$ und $s^1(x)$ Polynome von höchstens 1. Grad bezeichnen. Aus der Gleichung (17) ist ersichtlich, daß die Zyklide ψ die absolute Gerade f als Doppelgerade besitzt. Jede euklidische Ebene schneidet diese Zyklide außer in f noch in einer Geraden. *Die Zyklide ψ der Gestalt* (17) *ist also eine Regelfläche 3. Ordnung.* Hier können wir zwei Sonderfälle unterscheiden, je nach dem die Polynome $r^1(x)$ und $s^1(x)$ vom Grad 1 oder 0 sind.

9. Sonderfall II_1: Es sei mindestens eines der Polynome $r^1(x)$ und $s^1(x)$ vom 1. Grad. Da wir

$$\begin{aligned} p^3(x) &= r^1(x) \cdot u^2(x) + k \\ s^1(x) &= r^1(x) \cdot l + m, \end{aligned} \tag{18}$$

schreiben können, wobei $u^2(x)$ ein Polynom 2. Grades ist, so können wir die Gleichung (17) der Zyklide ψ in der Form

$$\psi \ldots \quad r^1(x)[u^2(x) + y + lz] + mz + k = 0 \tag{19}$$

ansetzen, wobei $\chi \ldots\ u^2(x) + y + lz = 0$ eine Punktkugel χ 2. Ordnung des galileischen Raumes G_3 mit der Spitze

$$T(0:0:-l:1) \tag{20}$$

ist. Schneiden wir die Zyklide $\psi((17))$ mit der Ebene $z = -\frac{k}{m}$, die parallel zu der $[xy]$-Ebene ist, dann erhalten wir als Projektion dieser

Schnittkurve in der $[xy]$-Ebene:

$$r^1(x) \cdot u^2(x) + y - l\frac{k}{m} = 0.$$

Die Schnittkurve besteht daher aus einer zur y-Achse parallelen Geraden

$$r^1(x) = 0; \qquad z = -\frac{k}{m}$$

und einem isotropen Kreis

$$u^2(x) + y - l\frac{k}{m} = 0, \qquad z = -\frac{k}{m}. \tag{21}$$

Jede Ebene $x_0 =$ konst schneidet die Zyklide $\psi((19))$ in einer Geraden mit dem Fernpunkt $P\big(0 : 0 : l \cdot r^1(x) + m : -r^1(x)\big)$. Jede dieser Ebenen schneidet auch den Kreis (21) in einem Punkt $Q(x_0)$. Damit haben wir eine projektive Abbildung $P \longmapsto Q$ hergestellt und die Verbindungsgeraden PQ sind die Erzeugenden der Zyklide $\psi((17))$. Damit haben wir bewiesen (vgl. auch [2]) den

Satz 5. *Die Regelzyklide $\psi((17))$ ist eine cayleysche Fläche 3. Ordnung mit der absoluten Geraden als Doppelgeraden.*

Schneiden wir nun die Zyklide $\psi((17))$ (Sonderfall II_1) mit einer beliebigen Ebene

$$\alpha \ldots \quad ax + by + cz + d = 0, \tag{22}$$

so erhalten wir die Gleichung der Projektion κ' der Schnittkurve κ in die $[xy]$-Ebene:

$$\kappa' \ldots \quad \overline{p}^3(x) + y \cdot \overline{r}^1(x) = 0. \tag{23}$$

Dabei ist

$$\overline{p}^3(x) = p^3(x) - \frac{a}{c}x \cdot s^1(x) - \frac{d}{c} \cdot s^1(x) \;\text{ und }\; \overline{r}^1(x) = r^1(x) - \frac{b}{c} \cdot s^1(x).$$

Da es auch $\overline{p}^3(x) = \overline{r}^1(x) \cdot q^2(x) + K = 0$ gilt, kann man die Gleichung (23) auch in der Form

$$\overline{r}^1(x)[q^2(x) + y] + K = 0 \tag{24}$$

schreiben. Die Kurve κ' und damit auch die Schnittkurve κ der Zyklide $\psi((17))$ mit der Ebene α ist daher ein Tridens 3. Ordnung (vgl. [2], S. 181).

Satz 6. *Die Fernebene ω ist die einzige Torsalebene der Zyklide $\psi((17))$ und der Punkt $T((20))$ ist der einzige Kuspidalpunkt dieser Fläche.*

10. Sonderfall II_2: $s^1(x) = l \cdot r^1(x)$. Schneiden wir die Zyklide $\psi((17))$ mit einer euklidischen Ebene $x =$ konst, so schneidet diese Ebene die Zyklide ψ außer in der absoluten Geraden f noch nach einer Geraden, deren absoluter Fernpunkt $F(0 : 0 : s^1(x) : -r^1(x))$ ist. Gilt noch

$$s^1(x) = l \cdot r^1(x), \tag{25}$$

dann hängt die Lage des Punktes F nicht von x ab, d.h. alle Erzeugenden der Zyklide $\psi((17))$ haben denselben Fernpunkt F. Unter Beachtung von (25) können wir nach (18) ($m = 0$) und (19) die Gleichung der Zyklide ψ in der Form

$$\psi \ldots \quad r^1(x)[u^2(x) + y + lz] + k = 0 \tag{26}$$

schreiben.

Zusammenfassend gilt:

Satz 7. *Die Regelzyklide $\psi((26))$ ist eine Punktkugel 3. Ordnung, die man als Menge aller Verbindungsgeraden einer in einer isotropen Ebene liegenden Tridens 3. Ordnung mit einem absoluten Punkt erhalten kann. Anderseits ist die Regelzyklide $\psi((26))$ eine Potenzproduktfläche einer Punktkugel 2. Ordnung und einer euklidischen Ebene.*

Sonderfall II_3: $r^1(x)$ und $s^1(x)$ sind Polynome vom Grad 0, also Konstanten: $r^1(x) = m$; $s^1(x) = n$. Die Gleichung der Zyklide χ ist daher im Sonderfall II_3 von der Form

$$\chi \ldots \quad p^3(x) + my + nz = 0. \tag{27}$$

Schneiden wir diese Fläche χ mit einer beliebigen Ebene $\alpha((22))$, so erhalten wir als Gleichung der Projektion κ' der Schnittkurve κ in die $[xy]$-Ebene

$$\kappa' \ldots \quad \overline{p}^3(x) + \left(m - \frac{bn}{c}\right) y = 0, \tag{28}$$

wobei

$$\overline{p}^3(x) = p^3(x) - \frac{na}{c}x - \frac{nc}{c}$$

ist. Die Kurve $\kappa'((28))$ und damit auch die Kurve κ ist eine kubische Parabel.

Eine beliebige euklidische Ebene $x =$ konst schneidet die Zyklide $\chi((27))$ (außer in f) noch nach einer Geraden $my + nz + \overline{p}^3(x) = 0$.

Diese Gerade schneidet die absolute Gerade f im Punkt

$$T(0 : 0 : -n : m). \tag{29}$$

Da die Lage des Punktes T nicht von x abhängt, gilt:

Satz 8. *Die Zyklide $\chi((27))$ ist eine Punktkugel 3. Ordnung mit der Spitze $T((29))$. Diese Punktkugel erhalten wir als Menge aller Verbindungsgeraden des Punktes T mit allen Punkten einer kubischen Parabel in einer isotropen, T nicht enthaltenden Ebene.*

Literatur

[1] DARBOUX, G.: Sur une classe remarquable des courbes et des surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires, Paris, I–VIII, 1–340.

[2] MÜLLER, E.: Vorlesungen über darstellende Geometrie III: Konstruktive Behandlung der Regelflächen, Leipzig und Wien, 1931.

[3] PALMAN, D.: Drehzykliden 4. Ordnung des einfach isotropen Raumes, *Glasnik Mat.* **15 (35)** (1980), 133–148.

[4] PALMAN, D.: Über zirkuläre Kurven 3. Ordnung der isotropen Ebene, *Rad JAZU* **444** (1989), 36–46.

[5] PALMAN, D.: Vollständig zirkuläre Kurven 4. Ordnung der isotropen Ebene, *Rad JAZU* **456** (1991), 15–32.

[6] RÖSCHEL, O.: Die Geometrie des galileischen Raumes, *Ber. Math.-Statist. Sekt. Forsch. Graz* **256** (1985), 1–120.

[7] SACHS, H.: Zur Geometrie der Sphären im einfach isotropen Raum, *Sitz. Ber. Österr. Akad. Wiss. Wien* **186** (1978), 241–261.

[8] SACHS, H.: Zur Theorie der Zykliden des einfach isotropen Raumes $I_3^{(1)}$, *Glasnik Mat.* **24** (1989), 561–582.

[9] SACHS, H.: Isotrope Raumgeometrie — einfach isotrope Geometrie, Braunschweig–Wiesbaden, 1990.

[10] SACHS, H.: Vollständig zirkuläre Kurven n-ter Ordnung der isotropen Ebene, *Studia Sci. Math. Hungar.* **24** (1989), 377–883.