

ZWANGLÄUFIG BEWEGLICHE POLYEDERMODELLE I

Otto Röschel

Institut für Geometrie, Technische Universität Graz, Kopernikusgasse 24, A-8010 Graz

Meinem verehrten Lehrer, Herrn
o. Univ. Prof. Mag. Dr. H. VOGLER zum 60. Geburtstag gewidmet.

Received January 1995

MSC 1991: 53 A 17

Keywords: Kinematics, overconstrained mechanisms.

Abstract: Given a cube W^* in the fixed euclidean threespace we define a one-parameter motion ζ of the 6 faces of W^* by dividing the edges of the cube with ratio $t \in R$. Our construction gives 6 congruent quadrangles which are stretched from a center by a factor, such that each of the 6 quadrangles remains stiff while t varies. The quadrangles then define a one-parameter motion ζ of 6 systems $\Sigma_1, \dots, \Sigma_6$. It turns out that all partial motions Σ_i / Σ_j ($i, j = 1, \dots, 6, i \neq j$) have the following property: In Σ_i and Σ_j resp. there exist at least planes τ_i and τ_j such that all points of τ_j are moved on spheres with centers in τ_i . Therefore we may add joins with spherical links between the two planes and get moveable (overconstrained) models of the cube. For three neighbour systems $\Sigma_i, \Sigma_j, \Sigma_k$ with a common vertex of W^* the three motions $\Sigma_k / \Sigma_j, \Sigma_j / \Sigma_i$ and Σ_i / Σ_k , have the following property: The relation mentioned above between the planes τ_i, τ_j, τ_k resp. gives closed chains (triangles) of joins. Moreover the planes of these triangles form angles with τ_i, τ_j, τ_k , which remain fixed during the motion ζ . Therefore we are able to construct moveable models of the cube by adding 8 triangles which are linked to the systems $\Sigma_1, \dots, \Sigma_6$ by spherical 2R-links. The resulting mechanism should have the general degree of freedom $F = -18$. Our procedure therefore gives a great family of new overconstrained linkages. The last chapter of the paper is devoted to a more general theorem, which shows that the same results may be reached, if the construction of the one-parameter motion ζ is based on other regular or even nonregular polyhedra with special properties.

In letzter Zeit sind von verschiedenen Autoren bewegliche Strukturen untersucht worden, die bei allgemeinen Abmessungen ihrer Teil-

systeme starr wären, bei spezieller geometrischer Anordnung jedoch zumindest einparametrig (also zwangläufig) beweglich sind (vgl. H. Stachel [14] und [15] bzw. K. Wohlhart [17] und [18] sowie die Fülle der dort angegebenen Literatur). Die vorliegende Serie von Arbeiten ist zwangläufig beweglichen Polyedermodellen gewidmet, wobei auf dem Polyeder zumindest eine Schar regelmäßiger Facetten auftritt.

Zuerst wenden wir uns einem Würfel zu, dessen 6 Seitenflächen als starre Systeme $\Sigma_1, \dots, \Sigma_6$ durch geeignete Stäbe untereinander verbunden sind. Diese Kette von Systemen $\Sigma_1, \dots, \Sigma_6$ gestattet einen Zwanglauf. Überraschend zeigt sich hier, daß die dabei auftretenden Relativzwangläufe Σ_i/Σ_j ($i \neq j$) symmetrische Schrotungen in Krames'schem Sinne (vgl. J. Krames [5]–[11]) mit einer algebraischen Grundregel­fläche 4. Ordnung sind, bei der ∞^2 Punkte von Σ_j auf Kugeln mit Mit­ten in Σ_i geführt werden. Die fraglichen Punkte gehören dabei jeweils 2 Ebenen an, von denen eine stets mit der Ebene des Quadrates auf dem Ausgangswürfel zusammenfällt. Überraschend läßt sich die so entstehende zwangläufige Kette nicht nur als kinematisches Stabmodell

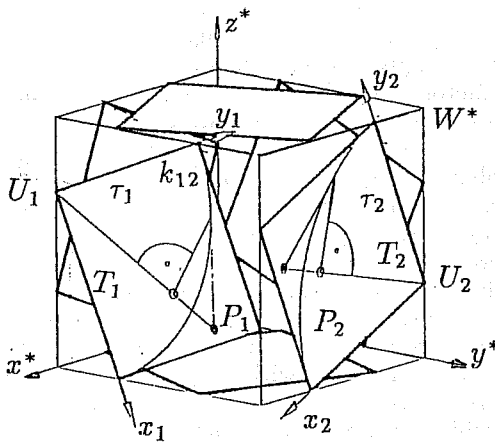


Abbildung 1

untersuchten Drehturm (Offset des Heureka-Polyeders) soll vorläufig unterbleiben.

Daß Teilzwangläufe mit ∞^2 oder sogar ∞^3 sphärischen Bahnen möglich sind, läßt sich auch für bewegliche Modelle der oben genannten Polyederklasse nachweisen. Weitere Beispiele für solche bewegliche Polyedermodelle sollen in zwangloser Reihenfolge in weiteren Teilen dieser Arbeit untersucht werden. Vor allem die regulären Polyeder verdienen

sondern auch als Serie von Systemen herstellen, die aus 6 Vierecken und 8 Dreiecken besteht. Benachbarte Dreiecke und Vierecke sind dabei durch 24 sphärische 2R-Gelenke aneinandergebunden. Damit ist eine Verallgemeinerung eines von H.F. Verheyen [16] gefundenen Mechanismus aus 6 Quadraten und 8 gleichseitigen Dreiecken gefunden. Eine Offsetbildung wie beim von K. Wohlhart in [17] und [18]

unser besonderes Augenmerk — der zweite Teil der Arbeit ist dem Tetraeder gewidmet.

1. Ein äquiformer Zwanglauf und ein bewegliches Würfelmodell

Wir legen den Einheitswürfel W^* des ruhenden Systems Σ^* wie in Abbildung 1 zugrunde und bezeichnen die Eckpunkte wie folgt in einem kartesischen Normalkoordinatensystem $\{O^*; x^*, y^*, z^*\}$:

$$\begin{aligned} \vec{a}_1^* &= (1, 0, 0)^t, & \vec{a}_2^* &= (1, 1, 0)^t, & \vec{a}_3^* &= (1, 1, 1)^t, & \vec{a}_4^* &= (1, 0, 1)^t, \\ \vec{a}_5^* &= (0, 0, 0)^t, & \vec{a}_6^* &= (0, 1, 0)^t, & \vec{a}_7^* &= (0, 1, 1)^t, & \vec{a}_8^* &= (0, 0, 1)^t. \end{aligned}$$

Für benachbarte Eckpunkte definieren wir (einer für den beweglichen Mechanismus des „Heureka-Polyeders“ von H. Stachel [14] vorgeführten Überlegung folgend) auf den Kanten des Würfels von $t \in \mathbb{R}$ abhängige Teilungspunkte.

$$(1) \quad \vec{t}_{ij}^*(t) := (1-t)\vec{a}_i^* + t\vec{a}_j^* \quad i, j \in \{1 \dots 8\}, \quad i \neq j.$$

Durch geeignete Verbindung entstehen so 6 kongruente Teilquadrate T_i (vgl. Abbildung 1 für $t = 0.7$) mit der Seitenlänge

$$(2) \quad s(t) = \sqrt{1 - 2t + 2t^2},$$

die nach Ausübung einer Streckung aus O^* mit Faktor $1/s(t)$ in Quadrate übergehen, deren Größe nun sogar von t unabhängig kongruent ist. Die neuen Quadrate bezeichnen wir wieder mit T_i . Mit diesen 6 Quadraten, deren Ebenen mit τ_j bezeichnet werden, lassen sich Systeme $\Sigma_1 \dots \Sigma_6$ verbinden, die gegenüber Σ^* und untereinander vermöge $t \in \mathbb{R}$ im Sinne der euklidischen Bewegungsgruppe des E_3 zwangläufig bewegt werden. Diese Zwanglaufkette werde mit ζ bezeichnet. Ihrer Realisierung durch Stabmodelle oder Modelle mit Drehgelenken wollen wir uns in dieser Arbeit zuwenden. Dazu untersuchen wir zuerst die auftretenden Relativzwangläufe:

Die Relativzwangläufe Σ_i/Σ^* von ζ sind vollkommen steile Darboux'sche Umschwungbewegungen. Die Umschwungachse fällt in das Lot n_j^* aus der Würfelmitte auf die Quadratebene T_i .

Die Relativzwangläufe Σ_j/Σ_i sind bei unserer Auswahl nicht sphärisch (beim analog aus einem regulären Oktaeder hergestellten „Heureka-Polyeder“ werden dagegen benachbarte Facetten sphärisch über 2R-Gelenke verbunden — vgl. H. Stachel [14]). Für sie gilt der folgende

Satz 1. Zu fast jedem Punkt der Ebene des Grundquadrates im System Σ_i ($i = 1 \dots 6$) gibt es bei der Zwanglaufkette ζ einen korrespondierenden Punkt in der Ebene des Grundquadrates im System Σ_j ($j = 1 \dots 6$, $i \neq j$), sodaß der Abstand dieser beiden Punkte bei ζ von t unabhängig ist, also bei Σ_j/Σ_i konstant bleibt.

Beweis. A) BENACHBARTE FACETTEN: Verbunden mit den benachbarten Quadratebenen τ_1, τ_2 führen wir wie in Abbildung 1 kartesische Normalkoordinatensysteme $\{\vec{u}_i, x_i, y_i, z_i\}$ ($i = 1, 2$) ein. Dann gilt für die Ortsvektoren zum jeweiligen Koordinatenursprung

$$(3) \quad \begin{aligned} \vec{u}_1^*(t) &= \frac{1}{s(t)}(1, 0, 1-t)^t \\ \vec{u}_2^*(t) &= \frac{1}{s(t)}(0, 1, t)^t. \end{aligned}$$

Die Einheitsvektoren der Achsen x_i, y_i, z_i werden in Σ^* durch

$$(4) \quad \begin{aligned} \vec{x}_1^*(t) &= \frac{1}{s(t)}(0, t, t-1)^t, & \vec{y}_1^*(t) &= \frac{1}{s(t)}(0, 1-t, t)^t, \\ \vec{z}_1^*(t) &= (1, 0, 0)^t \\ \vec{x}_2^*(t) &= \frac{1}{s(t)}(1-t, 0, -t)^t, & \vec{y}_2^*(t) &= \frac{1}{s(t)}(t, 0, 1-t)^t, \\ \vec{z}_2^*(t) &= (0, -1, 0)^t \end{aligned}$$

erfaßt. Punkte $P_1 \dots (x_1, y_1, 0)$ und $P_2 \dots (x_2, y_2, 0)$ der beiden Quadratebenen besitzen im ruhenden System Σ^* die Ortsvektoren

$$(5) \quad \begin{aligned} \vec{p}_1^*(t, x_1, y_1) &= \vec{u}_1^*(t) + x_1 \vec{x}_1^*(t) + y_1 \vec{y}_1^*(t) \quad \text{bzw.} \\ \vec{p}_2^*(t, x_2, y_2) &= \vec{u}_2^*(t) + x_2 \vec{x}_2^*(t) + y_2 \vec{y}_2^*(t). \end{aligned}$$

Für den Abstand $d(t, x_1, y_1, x_2, y_2)$ dieser Punkte errechnen wir das im allgemeinen vom Parameter t abhängige Quadrat zu

$$(6) \quad \begin{aligned} d^2(t, x_1, y_1, x_2, y_2) &= \\ &= \frac{1}{s^2(t)} \left[\begin{pmatrix} -1 + x_2 \\ 1 - y_1 \\ -1 + x_1 + y_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -x_2 + y_2 \\ -x_1 + y_1 \\ 2 - x_1 - y_1 - x_2 - y_2 \end{pmatrix} \right]^2 := \\ &= \frac{[\vec{a} + t \vec{b}]^2}{s^2(t)}, \end{aligned}$$

wobei die Vektoren \vec{a} und \vec{b} nur von Ausgangs- und Endpunkt $P_1 \dots (x_1, y_1, 0)$ bzw. $P_2 \dots (x_2, y_2, 0)$, nicht aber von t abhängen. Der Ab-

stand $d(t, x_1, y_1, x_2, y_2)$ entsprechender Punkte ist daher genau dann von t unabhängig, wenn im Zähler von (6) ein zu $s^2(t)$ aus (2) proportionales Polynom 2. Grades in t auftritt, also die Beziehung

$$(7) \quad 1 : -2 : 2 = \vec{a}^2 : 2\vec{a}\vec{b} : \vec{b}^2$$

erfüllt ist. (7) läßt sich in die beiden Gleichungen

$$(8) \quad \vec{a}^2 + \vec{a}\vec{b} = 0 \quad \text{und} \quad 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = 0$$

umformen. Nach kurzer Rechnung erhalten wir daraus, daß der Abstand der beiden gewählten Punkte der Quadratebenen genau dann von t unabhängig ist, wenn zwischen den Punktfeldern die Beziehung

$$(9) \quad x_2 = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \quad y_2 = \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}$$

besteht. Die durch (9) beschriebene Abbildung von τ_1 nach τ_2 ist Zusammensetzung einer Inversion am Einheitskreis k_{12} (Zentrum $U_1 = I_{12}$) in τ_1 mit einer nachfolgenden Bewegung, die die Koordinatensysteme von Σ_1 und Σ_2 zur Deckung bringt. Dies gilt auch für die inverse Abbildung. Der Koordinatenursprung wurde in Σ_1 und Σ_2 jeweils so gewählt, daß er mit dem zugehörigen Inversionszentrum zusammenfällt. Der Einheitskreis (Inversionskreis) k_{12} enthält zwei der Quadratecken. Abbildung 1 zeigt den Inversionskreis und die Wirkung der Abbildung

$$(10) \quad V_{12} : \tau_1 \longrightarrow \tau_2$$

zwischen den Quadratebenen, die gemäß (9) erklärt ist. Zwischen sich in dieser Verwandtschaft entsprechenden Punktepaaren lassen sich nun sphärisch in den Quadratebenen angelenkte starre Stäbe einspannen, ohne daß die Beweglichkeit verloren geht. Freilich ist darauf zu achten, daß die Stäbe sich nicht gegenseitig behindern. Abbildung 2 zeigt links eine „recht gute Anordnung“, bei der die Seitenmitten $(1,0.5,0)$ und $(0.5,1,0)$ von T_1 mit den zugehörigen Punkten $(0.8, 0.4,0)$ und $(0.4,0.8,0)$ in der Ebene von T_2 und umgekehrt verbunden werden — Σ_1 und Σ_2 sind dann durch 4 Stäbe aneinandergebunden. Wird derselbe Vorgang für je zwei benachbarte Facetten wiederholt, so entsteht ein zwangläufig bewegliches Gesamtmodell des Würfels. Dieses enthält neben den 6 Quadratflächen noch $12 * 4 = 48$ Stäbe und besitzt bei allgemeinen Abmessungen den theoretischen Freiheitsgrad

$$(11) \quad F = 5 * 6 - 48 = -18.$$

Abbildung 2 zeigt rechts das trotzdem für $t \in [0.5 + \epsilon, 1]$ zwangläufig

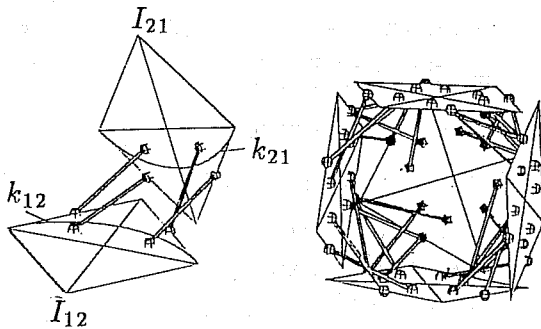


Abbildung 2

viele weitere bewegliche Modelle des Würfels gewinnen.

Ein besonders reizvoller Sonderfall wird in Abschnitt 3 untersucht. Satz 1 ist also für benachbarte Facetten bewiesen. Nun folgt kurz der zweite Fall:

B) GEGENÜBERLIEGENDE FACETTEN: Seien mit T_1 und T_4 gegenüberliegende Quadrate des Würfels bzw. mit Σ_1 und Σ_4 die zugehörigen Systeme bezeichnet. Wir haben zu Beginn festgestellt, daß die Reaktivzwangläufe Σ_1/Σ^* und Σ_4/Σ^* Umschwungbewegungen um die hier zusammenfallenden Achsen $n_1^* = n_4^*$ sind — der Zwanglauf Σ_4/Σ_1 ist als Zusammensetzung ebenfalls eine Umschwungbewegung um diese auch in Σ_1 und Σ_4 feste Achse. Wenn wir mit beiden bewegten Systemen so wie vorhin kartesische Normalkoordinaten verbinden, so besitzt der jeweilige Koordinatenursprung im ruhenden System Σ^* den Ortsvektor

$$(12) \quad \begin{aligned} \vec{u}_1^*(t) &= \frac{1}{s(t)}(1, 0, 1-t)^t \quad \text{bzw.} \\ \vec{u}_4^*(t) &= \frac{1}{s(t)}(0, 0, t)^t. \end{aligned}$$

Wir erkennen unschwer, daß der Abstand dieser beiden Punkte von t unabhängig ist. Der Koordinatenursprung von Σ_4 läuft daher bei Σ_4/Σ_1 auf einer Kugel um den Koordinatenursprung von Σ_1 . Die Umschwungbewegung Σ_4/Σ_1 führt somit alle Punkte von Σ_4 auf Kugeln mit Mitten in Σ_1 . Σ_4/Σ_1 ist demnach als Bricardsche Umschwungbewegung erkannt. Da ein Punkt der Quadratebene τ_4 des Quadrates T_4 auf einer Kugel

bewegliche Modell in der Stellung $t = 0.7$ (ε ist von der Dicke der Stäbe abhängig). Dabei wurden der besseren Übersichtlichkeit wegen eine Quadratfacette und alle zu ihr führenden Stäbe weggelassen.

Durch geeignete Wahl anderer (auch mehrerer Stäbe) lassen sich unter Ausnutzung der Verwandtschaft (9) beliebig

mit Mitte in der Ebene τ_1 des Quadrates T_1 läuft, tun dies alle (vgl. O. Bottema [1, S. 324 f.]). Die so vermittelte Koppelung $G_{14}: \tau_1 \rightarrow \tau_4$ zwischen den Quadratebenen ist wieder eine Inversion (diesmal am Umkreis des Ausgangsquadrates T_1) gefolgt von einer Bewegung (vgl. J. Krames [6]). Damit ist Satz 1 auch für gegenüberliegende Facetten bewiesen. \diamond

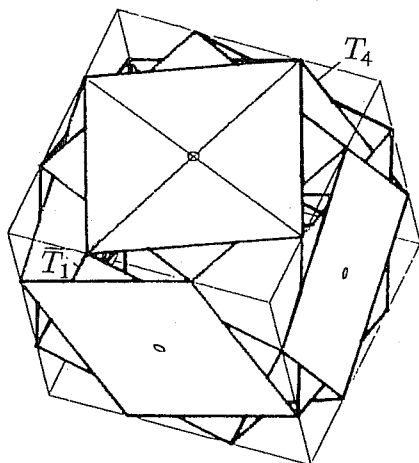


Abbildung 3

Der in dem zweiten Fall auftretende Sachverhalt ist für die Bildung beweglicher Modelle weniger geeignet, da das Innere des Quadrates T_1 auf das Äußere von T_4 abgebildet wird. Bloß die Ecken von T_1 lassen sich durch Stäbe mit den entsprechenden von T_4 verbinden. Werden diese Verbindungen für je zwei gegenüberliegende Würfelseiten realisiert, so entsteht ein Modell aus 12 Stäben und 6 Quadratfacetten, das zwangläufig beweglich ist. Es stellt sich heraus,

daß 6 Paare dieser Stäbe (allerdings von verschiedenen Teilzwangläufen herrührend) während des Gesamtzwanglaufes ihrerseits die Diagonalen fester Quadrate in den Ebenen der Ausgangsquadrate bilden. Die neuen Quadrate sind zu den alten kongruent und vollführen während des Zwanglaufes ζ gegen diese reine Drehbewegungen. Das dann entstehende bewegliche Würfelmodell ließe sich daher aus 12 kongruenten Quadratfacetten herstellen, die in den Quadratecken sphärisch (allerdings genügen wegen der Konstanz der Quadratebenenstellungen sphärische 2R-Gelenke) und in den Quadratmitten über reine Drehgelenke gekoppelt sind (vgl. Abbildung 3 — dort sind auch 2 der oben angesprochenen Verbindungsstäbe eingetragen, die in die Diagonalen der neuen Quadrate fallen). Es handelt sich dabei um ein Analogon des von H. Stachel in [14] erwähnten Tetraederzwanglaufmodells des Jitterbug-Modells.

Bevor wir uns dem nächsten Abschnitt zuwenden, beweisen wir noch den später wichtigen

Hilfssatz 1. *Seien im Fall A der benachbarten Facetten $P_1(x_1, y_1, 0)$ und $P_2(x_2, y_2, 0)$ zwei sich in der Verwandtschaft V_{12} (9) entsprechende Punkte. Wird die Streckung (2) rückgängig gemacht, so beschrei-*

ben P_1 und P_2 auf dem Würfel W^* Bahngeraden, die einer nur von $P_1(x_1, y_1, 0)$ abhängigen Ebene $\varepsilon^*(x_1, y_1)$ angehören.

Beweis. Die Bahnen der im Hilfssatz angesprochenen Punkte besitzen in Σ^* nach (5) bzw. (9) die Parameterdarstellungen

$$(13) \quad \vec{q}_1^*(t, x_1, y_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ tx_1 + (1-t)y_1 \\ (1-t)(1-x_1) + ty_1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie}$$

$$\vec{q}_2^*(t, x_1, y_1) = \frac{1}{x_1^2 + y_1^2} \begin{pmatrix} (1-t)x_1 + ty_1 \\ x_1^2 + y_1^2 \\ t(x_1^2 + y_1^2) - tx_1 + (1-t)y_1 \end{pmatrix}$$

und sind daher geradlinig. Es ist unschwer nachzuprüfen, daß diese beiden Bahngeraden (13) der Ebene

$$(14) \quad \varepsilon^*(x_1, y_1) \dots x^*(x_1^2 + y_1^2 - x_1 - y_1) + y^*(1 - x_1 - y_1) + z^*(x_1 - y_1) = -y_1$$

angehören und sich daher i.a. schneiden. \diamond

2. Der Relativzwanglauf Σ_2 / Σ_1 ist ebenfalls eine symmetrische Schrotung

Untersuchen wir nochmals als Beobachter im System Σ^* (vgl. Abbildung 4) die Bewegung von Σ_2 / Σ_1 : Es ist klar, daß Σ_2 für jedes t

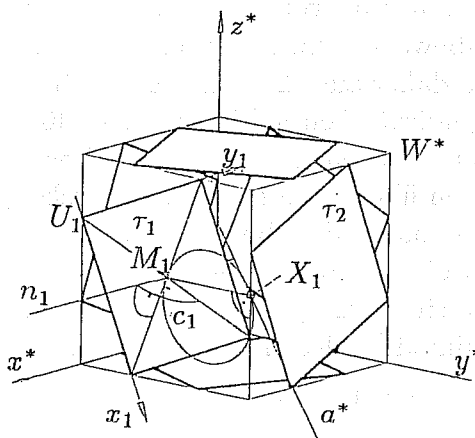


Abbildung 4

durch Spiegelung an der Geraden a^* (Verbindung der gemeinsamen Würfelkantenmitte X_1^* mit dem Würfelmittelpunkt) aus Σ_1 hervorgeht. Nun drücken wir die Gerade a^* ins System Σ_1 durch. Die Spiegelungsachse a^* trifft das Lot n_1 aus dem Mittelpunkt M_1 des 1. Quadrates auf dieses Quadrat. a^* schneidet weiters die Ebene τ_1 der Quadratfacette im Punkt X_1 , der aus M_1 und dem auf der gemeinsamen Würfelkante gleitenden Quadrateckpunkt mit den Gangkoordinaten $(1,1,0)$ unter einem rechten Winkel gesehen wird. Nach

Ausüben der von $t \in R$ abhängigen Streckungen erscheint diese Spiegelungsachse a^* in Σ_t als (stetige) Schar von Erzeugenden einer Regelfläche Γ_1 mit folgenden Eigenschaften:

1) Die Schnittkurve von Γ_1 mit der Quadratebene ist der Thaleskreis c_1 über dem Quadrat-Eckpunkt $(1,1,0)$ und dem Mittelpunkt M_1 des Quadrates.

2) Der Winkel α von a^* zur Ebene $\tau_1 = [x_1 y_1]$ ist der halbe Winkel benachbarter Quadratfacetten — es gilt daher $\alpha = 45^\circ$.

3) Die Positionen von a^* treffen das Lot n_1 auf $\tau_1 = [x_1 y_1]$ durch den Quadratmittelpunkt M_1 . Da die entstehende Regelfläche Γ_1 die Gerade n_1 als Doppelgerade besitzen wird, verwenden wir zu ihrer Beschreibung neue kartesische Normalkoordinaten $\{M_1, x, y, z\}$, die aus den in Σ_1 sonst verwendeten durch Schiebung und nachfolgende Drehung um die z_1 -Achse (Drehwinkel -45°) hervorgehen sollen. In diesen Koordinaten besitzt Γ_1 die einfach zu berechnende Gleichung

$$(15) \quad (x^2 + y^2 - x/\sqrt{2})^2 - z^2(x^2 + y^2) = 0.$$

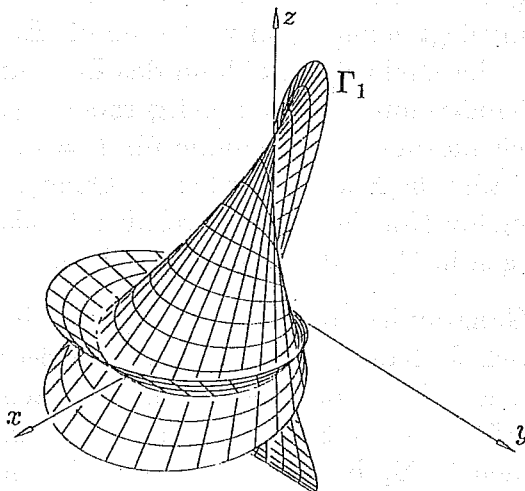


Abbildung 5

Γ_1 ist demnach eine algebraische Regelfläche 4. Grades mit der Doppelgerade n_1 und dem Leitkreis c_1 in der Quadratebene als Doppelkegelschnitt (vgl. Abbildung 5). Die Erzeugenden von Γ_1 sind gegen die Ebene $\tau_1 = [x_1, y_1]$ unter dem Winkel $\alpha = 45^\circ$ konstant geböcht. Der Zwanglauf Σ_2/Σ_1 entsteht daher auch, indem das feste System Σ_1 der Reihe nach an den Erzeugenden von Γ_1 gespiegelt wird — Σ_2/Σ_1 ist demnach nach J. Krames [10] als symmetrische Schrotung anzusprechen.

In [10] studiert J. Krames gerade symmetrische Schrotungen mit dieser Grundregelfläche. Er weist nach, daß die dabei auftretenden Bahnkurven rationale Raumkurven 4. Ordnung sind — vgl. auch die Untersuchungen [13] des Autors über Bewegungen mit durchwegs rationalen Bahnkurven 4. Ordnung.

J. Krames zeigt in [10] auch, daß bei diesen Zwangläufen (neben

den Punkten eines nullteiligen Drehzylinders) genau die Punkte zweier gangfester zueinander orthogonaler Ebenen sphärische Bahnen durchlaufen (auch R. Bricard [3] hat Zwangläufe dieser Art bereits angegeben). Die erste Ebene mit dieser Eigenschaft haben wir bereits gefunden — es ist dies die Ebene τ_2 des Quadrates T_2 , deren zugehörige Bahnkugelmitten in der Ebene des Quadrates T_1 bereits bestimmt wurden. Wir fassen zusammen in

Satz 2. *Die Relativzwangläufe Σ_1/Σ_j benachbarter Facetten unseres beweglichen Würfelmodells sind symmetrische Schrotungen mit speziellen algebraischen Grundregelflächen 4. Ordnung. Nach J. Krames [10] sind diese Zwangläufe rationale räumliche Zwangläufe 4. Ordnung, bei denen die Punkte je zweier zueinander orthogonaler gangfester Ebenen auf Kugeln geführt werden.*

Hier können wir uns auch klarmachen, wie das Inversionszentrum für (9) synthetisch zu ermitteln wäre: Die Momentanbewegungen des Relativzwanglaufes Σ_2/Σ_1 sind nach J. Krames i. a. Schraubungen um die Zentraltangente der Grundregelfläche Γ_1 in der entsprechenden Erzeugenden. Eine Momentandrehung liegt genau dann vor, wenn die Erzeugende auf Γ_1 Torsallinie ist — die Drehachse ist dann das Lot auf die zugehörige Torsalebene im Schnittpunkt mit der Leitgeraden n_1 . Eine Momentandrehung stellt sich bei unserer Annahme für $t = 0.5$ ein — Momentandrehachse durchstößt die Ebenen der beiden Quadrate genau in den Zentren der Inversion (9), die wir von vornherein als Zentren unserer Koordinatisierungen in Σ_1 und Σ_2 gewählt haben.

Für die beiden Ebenen des Gangraumes, deren Punkte sphärische Bahnen durchlaufen, kommen nach J. Krames [10] nur Symmetrieebenen der Grundregelfläche in Frage. Neben der bereits untersuchten Quadratebene $z = 0$ besitzt Γ_1 (15) noch die Symmetrieebene $x = 0$. Ihre Punkte gehören zu den beiden in Σ_1 bzw. Σ_2 fixierten Ebenen $x_1 = y_1$ bzw. $x_2 = y_2$ und besitzen in Σ^* die Ortsvektoren

$$(16) \quad \begin{aligned} \vec{p}_1^*(t, y_1, z_1) &= \vec{u}_1^*(t) + y_1 (\vec{x}_1^*(t) + \vec{y}_1^*(t)) + z_1 \vec{z}_1^*(t) \\ \vec{p}_2^*(t, y_2, z_2) &= \vec{u}_2^*(t) + y_2 (\vec{x}_2^*(t) + \vec{y}_2^*(t)) + z_2 \vec{z}_2^*(t). \end{aligned}$$

Für das Quadrat der Verbindungsvektoren $\vec{p}_1^*(t, y_1, z_1) - \vec{p}_2^*(t, y_2, z_2) :=$

$\vec{d}(t, y_1, z_1, y_2, z_2)$ finden wir wie in Abschnitt 1

$$\begin{aligned}
 \vec{d}^2(t, y_1, z_1, y_2, z_2) &= \\
 (17) \quad &= \left\{ \frac{1}{2s(t)} \left[\begin{pmatrix} -1+y_2 \\ 1-y_1 \\ -1+y_1+y_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2(1-y_1-y_2) \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} -z_1 \\ -z_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}^2 := \\
 &:= \left\{ \frac{1}{s(t)} [\vec{a} + t \vec{b}] + \vec{c} \right\}^2.
 \end{aligned}$$

Dieser Abstand ist genau dann von $t \in \mathbb{R}$ unabhängig, wenn $1: -2: 2 = \vec{a}^2 : 2\vec{a} \vec{b} : \vec{b}^2$ und $\vec{a} \vec{c} = 0$ gilt. Ersteres führt mit (9) auf eine einzige Beziehung, letzteres auf eine zweite Gleichung. Die Auswertung liefert Abbildungsgleichungen

$$(18) \quad y_2 = \frac{1}{2y_1} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{z_1(2y_1 - 1)}{2y_1(1 - y_1)}.$$

Sie vermitteln zwischen den beiden Ebenen $x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$ wieder eine (symmetrische) quadratische Verwandtschaft Q_{12} .

Die Einschränkung auf die Schnittgerade $x_1 = y_1, z_1 = 0$ mit der Ebene τ_1 des Quadrates T_1 stimmt mit der Inversion (9) überein. Die Grundpunkte der quadratischen Verwandtschaft finden sich in der Quadratecke $(1,1,0)$ und im Fernpunkt der z_1 -Achse. Eine der Grundgeraden liegt in der Normalen $n_1 \dots (x_1 = y_1 = 0.5)$ — die entsprechenden Bildpunkte finden sich im Grundpunkt $(1,1,0)$ (Quadratecke) in Σ_2 . Diese Ecke des Quadrates T_2 läßt sich daher über ein in n_1 angebrachtes Scharniergelenk mit dem System Σ_1 koppeln — ihre Bahn ist bei Σ_2/Σ_1 ein Kreis mit Drehachse n_1 . Werden die Quadratecken reihum mit den geeigneten benachbarten Quadratmittlen über Scharniergelenke verbunden, so entsteht im wesentlichen wieder das bereits in Abbildung 3 gezeigte Modell, da sich nachweisen läßt, daß die in einem Lot n_i zusammenlaufenden Stäbe konstanten Winkel behalten und die Diagonalen eines der eingefügten zusätzlichen 6 Quadrate bilden.

3. Bewegliche Modelle eines Würfels aus Drehgelenken

Nun wollen wir Spezialfälle des in Abschnitt 1 diskutierten Stabwerkes betrachten: Wir fügen zu den benachbarten Systemen Σ_1 und Σ_2 noch ein drittes Σ_3 hinzu, das zu einem an die Quadrate T_1 und

T_2 angrenzenden Quadrat T_3 gehört (vgl. Abbildung 6 — dort wurden die jeweiligen Inversionskreise k_{ij} und Inversionszentren I_{ij} der Transformationen V_{ij} eingetragen). Nun wollen wir von T_1 ausgehend Stäbe zu den Nachbarquadraten T_2 und T_3 so einfügen, daß sich das Stabwerk in der Quadratebene τ_1 nach einem Umlauf um die angrenzende Würfecke schließt. Wir müssen dabei in τ_1 von einem Punkt P ausgehen, für den die Identität

$$(19) \quad P := V_{31}(V_{23}(V_{12}(P)))$$

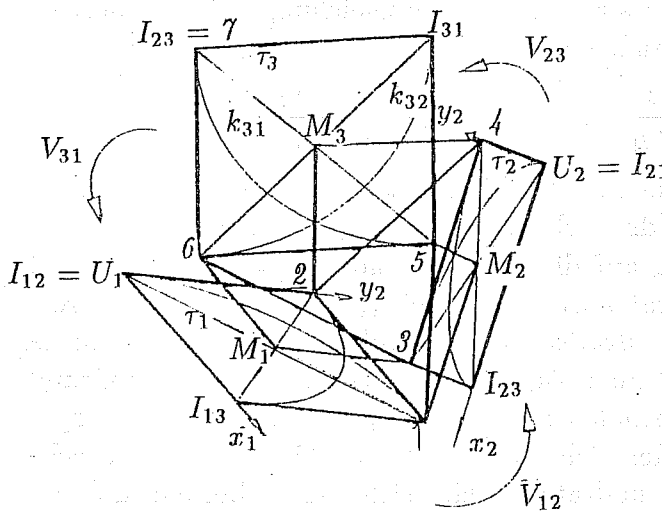


Abbildung 6

gilt. Die Zusammensetzung der drei in Formel (19) angeführten Inversionen und Bewegungen bewirkt in der Ebene τ_1 eine Möbiustransformation M_{123} . P muß einer der Fixpunkte von M_{123} sein. Beim Studium von Möbiustransformationen ist es üblich, die euklidische Ebene um einen Punkt ∞ zu erweitern. Er wird (zur Ebene τ_1 gerechnet) bei den Inversionen V_{12} bzw. V_{13} in die jeweils entsprechenden Zentren I_{21} bzw.

I_{31} abgebildet (vgl. Abbildung 6), die sich in der Inversion V_{23} entsprechen. Der Punkt ∞ ist daher Fixpunkt von $M_{123} - M_{123}$ ist damit sogar eine euklidische Ähnlichkeit. Weiters zeigt Figur 6, daß die zwei Quadratecken $1 \dots (1, 1, 0)$ und $2 \dots (0, 1, 0)$ sowie der Quadratmittelpunkt $M_1 \dots (0.5, 0.5, 0)$ ebenfalls Fixpunkte von M_{123} sind. Man hat dazu bloß für die genannten Punkte der Reihe nach die Wirkung der entsprechenden Inversionen zu verfolgen (vgl. die in Figur 6 eingetragenen Dreiecke $1, 5, M_2$ sowie $2, 4, M_3$ bzw. $M_1, 3, 6$). Eine Ähnlichkeit mit 3 nichtkollinearen Fixpunkten ist die Identität: M_{123} ist damit als Identität in τ_1 erkannt. Zu jedem Punkt P_1 aus der ersten Ebene erhält man so zwei weitere $P_2 := V_{12}(P_1)$ und $P_3 := V_{13}(P_1)$ in den Nachbarebenen,

sodaß das Dreieck $P_1P_2P_3$ beim Zwanglauf ζ starr bleibt. Nach Hilfssatz 1 wissen wir, daß sich die Bahngeraden je zweier Dreieckseckpunkte auf dem ungestreckten Würfelmodell jeweils in einer Ebene befinden. Die drei so entstehenden Ebenen sind daher identisch — nach der Streckung behält daher das Dreieck $P_1P_2P_3$ beim Zwanglauf ζ konstante Neigung gegen die Ebenen τ_1, τ_2, τ_3 der Quadratfacetten. Das Dreieck $P_1P_2P_3$ kann daher an den Systemen $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ in den Punkten P_1, P_2, P_3 nicht nur sphärisch sondern sogar über sphärische 2R-Gelenke mit Scharnieren in den Ebenennormalen von τ_i und der Dreiecksebene $[P_1P_2P_3]$ angebunden werden.

Wählt man eines dieser Dreiecke für die Konstruktion eines Stabwerkes und vervollständigt sinngemäß für alle anderen (geeigneten) Tripel von in einer Würfecke benachbarten Quadratfacetten, so entstehen zu den 6 in den Quadratebenen entstehenden Vierecksfacetten zusätzlich noch 8 während des Zwanglaufes starre Dreiecke $D_1 \dots D_8$. Der Mechanismus besteht demnach aus 14 Systemen, die über $8 * 3 = 24$ sphärische 2R-Gelenke aneinandergeschnitten sind. Er würde bei allgemeinen Abmessungen den Freiheitsgrad $F = 6 * 13 - 4 * 24 = -18$ besitzen. Wir haben damit eine ganze Serie neuer übergeschlossener Mechanismen gefunden.

Die interessanteste Konfiguration stellt sich ein, wenn als Ausgangspunkt P_1 in τ_1 der Schnittpunkt von k_{12} und k_{13} gewählt wird — das Dreieck ist dann gleichseitig: Abbildung 7 zeigt die Positionen dieses zwangläufig beweglichen Mechanismus für die Parameterwerte $t = 0$ und $t = 0.5$ in allerdings verschieden skalierten Ansichten. Dabei wurden die Quadrate $T_1 \dots T_6$ nur innerhalb jener vom Punkt P_1 und seinen entsprechenden herrührenden Quadrate $Q_1 \dots Q_6$ materiell ausgeführt. Durch Aufsetzen von geraden Prismen auf die Quadrate und Dreiecke entsteht das abgebildete Modell, das sich in dieser Form auch gut aus Karton herstellen läßt. Die Doppelscharniere wurden durch starre Kreissektoren verbunden. Der Mechanismus ist in dieser Ausführung sogar in einem knapp über das Intervall $t \in [0, 1]$ hinausgehenden Parameterbereich zwangläufig beweglich. Die volumsmäßig größte Ausdehnung erfährt das Modell für den Wert $t = 0.5$ — das von den Dreiecken und Quadraten begrenzte konvexe Polyeder ist ein ecken- und kantengestutzter Würfel, bei dem die Dreiecksseiten allerdings nicht gleiche Länge wie die Quadratseiten besitzen. Der Neigungswinkel zwischen Quadrat- und Dreiecksebenen besitzt

hier den Wert $\alpha = \arccos(1/(1/\sqrt{3}))$. Dieses bewegliche Würfelmodell ist identisch mit einem bereits von H.F. Verheyen in [16] vorgestellten Mechanismus.

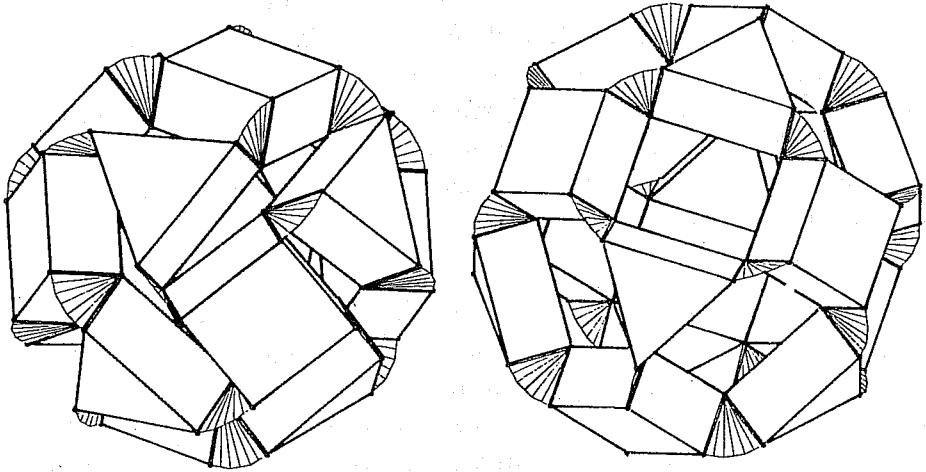


Abbildung 7

Ein weiteres — bislang anscheinend unbekanntes — Beispiel sei in Abbildung 8 vorgestellt: Von einem Seitenmittelpunkt P_1 des Aus-

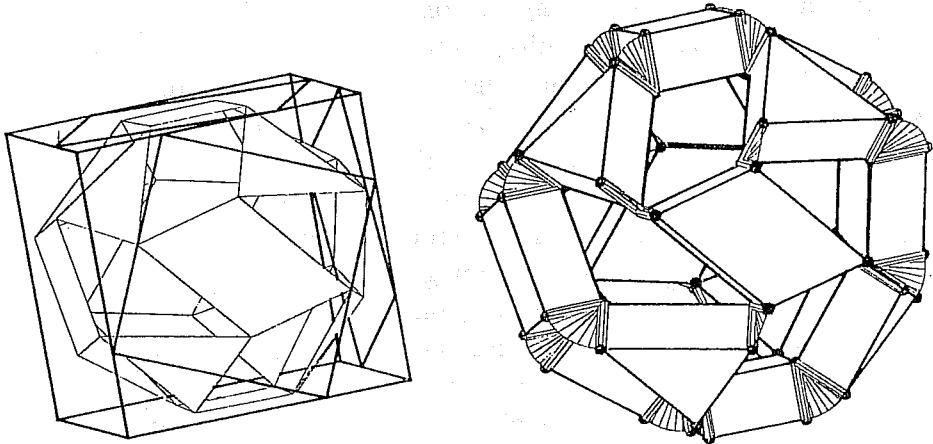


Abbildung 8

gangswürfels aus wurde das zugehörige (dann gleichschenkelige) Dreieck konstruiert. Wird diese Konstruktion reihum für die 4 Seitenflächen des Würfels, nicht aber für Deck- und Bodenfläche wiederholt, so erzeugen die entstehenden 8 kongruenten gleichschenkeligen Dreiecke in den

Würfelseitenflächen Parallelogramme, die für Deck- und Bodenfläche sogar Quadrate sind. Abbildung 8 zeigt diesen zwangläufig beweglichen Mechanismus aus 8 kongruenten gleichschenkeligen Dreiecken, 4 kongruenten Parallelogrammen und 2 Quadraten. In den Dreiecksecken sind entsprechende Systeme jeweils durch sphärische 2R-Gelenke verbunden. Damit ist erstmals gezeigt, daß solche zwangläufig bewegliche Modelle nicht nur — wie man aus den Arbeiten von H.F. Verheyen [16] vermuten könnte — aus zwei Scharen kongruenter regelmäßiger Facetten bestehen müssen.

Um gezielter allgemeine Modelle nach diesem Ergebnis herstellen zu können, benötigen wir eine Charakterisierung der Ebenen, in denen die Dreiecke vor unserer Streckung bleiben. Diese Ebenen werden für den Fall der Seitenfacetten Σ_1 und Σ_2 durch Gleichung (14) beschrieben. Es ist leicht nachzuweisen, daß es sich bei dieser zweiparametrischen Ebenenschar um die Tangentialebenen der Kugel

$$(20) \quad K^* \dots (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 + (z - 0.5)^2 = 0.25$$

handelt. (20) ist genau die Inkugel unseres Würfels W^* . In jeder Quadratebene des Ausgangswürfels läuft ein ebener äquiformer Zwanglauf mit globalem Fixpunkt M_i ($i = 1 \dots 6$) in den Seitenmitten ab. Alle Punkte der Würfebene durchlaufen dabei Geraden und befinden sich zum Zeitpunkt $t = 0.5$ in den Fußpunkten ihrer Bahngeraden für das Lot aus den Fixpunkten M_i . . Daraus läßt sich eine einfache Konstruktionsvorschrift für die Herstellung solcher beweglicher Modelle ableiten. Sie wird am einfachsten für den Parameterwert $t = 0.5$ formuliert und besteht aus folgenden 3 Schritten (vgl. Abbildung 9 für die Herstellung des Modelles aus Abbildung 8):

a) Am Ausgangswürfel W^* werden mit Hilfe von 8 Tangentialebenen der Inkugel K^* von W^* die Ecken gestutzt (so gewählt, daß noch Dreiecksfacetten entstehen).

b) Jede Seitenfläche τ_i des Würfels schneidet die zugehörigen 4 eckenstutzenden Tangentialebenen von K^* i. a. nach vier Geraden, auf denen wir die Lotfußpunkte der Lote aus der Seitenmitte M_i bestimmen. Durch Verbinden entstehen so in den Würfelseitenflächen i.a. 6 Vierecke $V_1 \dots V_6$, in den zum Stutzen verwendeten Tangentialebenen i.a. 8 Dreiecke $D_1 \dots D_8$.

c) Werden Dreiecke und benachbarte Vierecke wie oben durch geeignete sphärische Doppelscharniere aneinandergebunden (der Winkel der Facetten kann am eckengestutzten Würfel abgelesen werden), so

entsteht ein Mechanismus aus 14 Systemen, die über 24 Gelenke gekoppelt sind. Trotz des allgemeinen Freiheitsgrades $F = -18$ ist jeder der so hergestellten Mechanismen zumindest zwangsläufig beweglich. Die Abbildungen 7 und 8 zeigen zwei übergeschlossene Systeme, die sich auch nach diesem Prinzip herstellen lassen. In Abbildung 9 ist dieser Algorithmus zur Herstellung solcher zwangsläufiger Modelle anhand zweier Tangentialebenen der (nicht eingetragenen) Inkugel des Würfels vorgeführt.

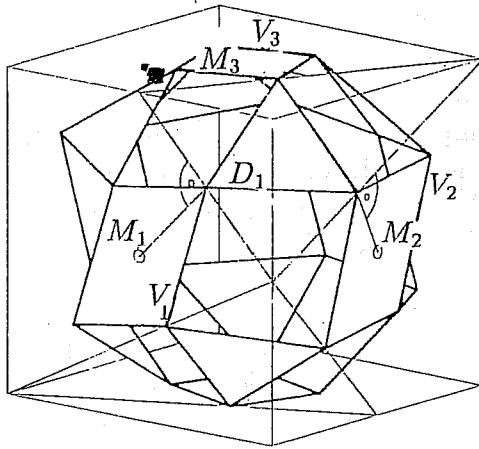


Abbildung 9

festgelegten Vierecke (bzw. Dreiecke) i.a. *nicht untereinander kongruent sein*.

Wird diese Situation auf alle Seitenflächen (ausgenommen Deck- und Grundfläche) des Würfels durch Drehung übertragen, so entsteht das angedeutete Modell, das übrigens mit jenem aus Abbildung 8 übereinstimmt.

Bemerkung. Werden 8 beliebige Tangentialebenen der Inkugel zum Eckenstützen verwendet, so werden die nach obigem Algorithmus

4. Stabmodelle einer allgemeinen Polyederklasse

Zum Abschluß verallgemeinern wir noch die Ideen von Abschnitt 1 weiter: Wir geben im E_3 ein beliebiges Polyeder π^* vor, auf dem zumindest eine Serie von kongruenten regelmäßigen Facetten Φ_i^* ($i = 1 \dots n$) existiere. Zu jeder Facette lassen sich wie in Abschnitt 1 durch Streckenteilung mit Faktor $t \in R$ dazu ähnliche Facetten Φ_i erklären, die gegen π^* jeweils von t abhängige äquiforme Zwangsläufe beschreiben. Da der von $t \in R$ abhängige Verzerrungsfaktor für alle Φ_i^* ($i = 1 \dots n$) derselbe ist, sind die Relativzwangsläufe Φ_i/Φ_j ($i, j = 1 \dots n, i \neq j$) sogar Zwangsläufe in der euklidischen Bewegungsgruppe. Nach geeigneter — von $t \in R$ abhängiger — Streckung oder Stauchung entsteht demnach ein zwangsläufig bewegliches Modell der ausgewählten Menge kongruen-

ter Facetten von π^* . Die bewegten Facetten Φ_i werden zu bewegten Räumen Σ_i fortgesetzt. Dann läßt sich vollkommen analog zu Satz 1 folgender allgemeiner Satz beweisen:

Satz 3. *Im E_3 sei eine Menge kongruenter regelmäßiger Facetten Φ_i^* ($i = 1 \dots n$) auf einem geeigneten Polyeder π^* gegeben. Wird aus diesen Facetten wie beschrieben ein zwangläufiges (geschlossenes) Modell mit Teilsystemen Σ_i ($i = 1 \dots n$) erzeugt, so gilt: Alle Relativzwangläufe Σ_i/Σ_j ($i \neq j$) führen fast alle Punkte der Facettenebenen $\varphi_j \subset \Sigma_j$ auf Kugeln, deren Mitten der Ebene $\varphi_i \subset \Sigma_i$ angehören.*

Der Beweis verläuft identisch zu jenem von Satz 1 und werde hier daher unterdrückt. Ohne Beweis sei erwähnt, daß die regelmäßigen Facetten sogar nur ähnlich zueinander sein brauchen, ohne daß obiger Sachverhalt seine Gültigkeit verliert. Zwischen entsprechenden Punkten lassen sich Stäbe einfügen, die sphärisch an die entsprechenden Systeme angelenkt sind. Damit sind bewegliche Stabmodelle der genannten Polyederklasse herstellbar.

Literaturverzeichnis

- [1] BOTTEMA, O. und ROTH, B.: Theoretical kinematics. North-Holland Series, Amsterdam, 1979.
- [2] BOREL, E.: Mémoire sur les déplacements à trajectoires sphériques, *Mém. Acad. Sciences* **33/2** (1908), 1–128.
- [3] BRICARD, M.: Mémoire sur les déplacements à trajectoires sphériques, *Journ. de l'École Polytechnique* **2/11** (1906), 1–93.
- [4] GIERING, O.: Vorlesung über höhere Geometrie, Vieweg, Braunschweig–Wiesbaden, 1982.
- [5] KRAMES, J.: Über Fußpunktkurven von Regelflächen und eine besondere Klasse von Raumbewegungen (Über symmetrische Schrotungen I), *Monatsh. Math.* **45** (1937), 394–406.
- [6] KRAMES, J.: Zur Bricardschen Bewegung, deren sämtliche Bahnkurven auf Kugeln liegen (Über symmetrische Schrotungen II), *Monatsh. Math.* **45** (1937), 407–417.
- [7] KRAMES, J.: Zur aufrechten Ellipsenbewegung des Raumes (Über symmetrische Schrotungen III), *Monatsh. Math.* **46** (1937), 48–50.
- [8] KRAMES, J.: Zur kubischen Kreisbewegung des Raumes (Über symmetrische Schrotungen IV), *Sb. d. Österr. Akad. d. Wiss.* **146** (1937), 145–158.
- [9] KRAMES, J.: Zur Geometrie des Bennettschen Mechanismus (Über symmetrische Schrotungen V), *Sb. d. Österr. Akad. d. Wiss.* **146** (1937), 159–173.

- [10] KRAMES, J.: Die Borel-Bricard-Bewegung mit punktweise gekoppelten orthogonalen Hyperboloiden (Über symmetrische Schrotungen VI), *Monatsh. Math.* **146** (1937), 172–195.
- [11] KRAMES, J.: Über eine konoidale Regelfläche fünften Grades und die darauf gegründete symmetrische Schrotung, *Sb. d. Österr. Akad. d. Wiss.* **190** (1981), 221–230.
- [12] MÜLLER, E. und KRAMES, J.: Konstruktive Behandlung der Regelflächen (Vorlesungen über Darstellende Geometrie III), Leipzig/Wien, 1931.
- [13] RÖSCHEL O.: Rationale räumliche Zwangläufe vierter Ordnung, *Sber. d. Österr. Akad. Wiss.* **194** (1985), 185–202.
- [14] STACHEL H.: Zwei bemerkenswerte bewegliche Strukturen, *Journal of Geometry* **43** (1992), 14–21.
- [15] STACHEL H.: The Heureka-Polyhedron, *Proc. Conf. Intuitive Geometry*, Szeged 1991 (im Druck).
- [16] VERHEYEN, H. F.: The complete set of Jitterbug transformers and the analysis of their motion, *Computers Math. Appl.* **17** (1989), 203–250.
- [17] WOHLHART, K.: Dynamic of the “Turning Tower”. *Ber. d. IV. Ogólnopolska Konf. Maszyn Włokienniczych i Dzwigowych* (1993), 325–332.
- [18] WOHLHART, K.: Heureka Octahedron and Brussels Folding Cube as Special Cases of the Turning Tower, *Syrom 93 II* (1993), 303–312.