

DAS DREIFACH PLANSYMMETRISCHE „OKTOID“ UND SEINE PUNKTBAHNEN

K. Wohlhart

Technische Universität Graz, Institut für Mechanik, Kopernikusgasse 24, A 8010 Graz, Österreich

Received September 1994

MSC 1991: 53 A 17, 70 B 15

Keywords: Synthese räumliches Zwanglauf Mechanismen, übergeschlossene (paradoxe) Getriebe, sphärische Raumkurven.

Zusammenfassung: Der vorliegenden Untersuchung liegt ein neuer hochgradig übergeschlossener Raummechanismus zugrunde, der eine der zwei möglichen Verallgemeinerungen des bekannten „Heureka“-Octaeders repräsentiert. Infolge der Übergeschlossenheit gehört dieser Mechanismus zu den sogenannten „paradoxen Mechanismen“, für die die topologische Struktur-Formel von Kutzbach Starrheit voraussagt, die aber, dank besonderer Abmessungen, sich als beweglich erweisen. Ziel der Arbeit ist der Nachweis der Beweglichkeit des allgemeinen, dreifach plansymmetrischen Oktoids, die Ermittlung der relativen Übertragungsfunktionen, und schließlich die Bestimmung und Diskussion der relativen Punktbahnen der acht starren Körper, aus denen der Mechanismus in der Hauptsache besteht.

Einleitung

Wegen des besonderen Aufsehens das das große bewegliche Oktaeder bei der „Heureka“-Ausstellung 1991 in Zürich erregte, ist der eigenartige Mechanismus, der ihm zugrunde liegt, seither mehrfach Gegenstand von wissenschaftlichen Untersuchungen gewesen [13,14,18,7]. Dieser ungewöhnliche Mechanismus steht in engem Zusammenhang mit dem von dem Architekten R. Fuller Buckminster 1947 erdachten „Jitterbug“ [5], einem Mobile der Art Cinétique. D. Dreher hatte 1974 die Idee, die Kugelgelenke des Jitterbug durch V-förmige Doppel-Drehgelenke (Vee-pins) zu ersetzen [12], wodurch aus dem hochgradig beweglichen Jitterbug ein Mechanismus mit Zwanglauf entstand. Für die großmaßstäbliche Verwirklichung eines beweglichen Oktaeders, als attrakti-

ves Schaustück der Heureka Ausstellung in Zürich — ausgeführt von der Firma Bolliger-Maillard — hat sich C. Schwabe besonders eingesetzt. Das Oktaeder besteht im wesentlichen aus acht gleichseitigen Dreieckplatten die durch sechzehn V-förmige Doppel-Drehgelenke verbunden sind. Geometrisch gesehen enthält es nur einen einzigen Systemparameter, die Seitenlänge der Dreieckflächen. Eine erste Verallgemeinerung des Heureka-Polyeders stellt der „Drehturm“ dar, dessen Geometrie und Dynamik in zwei Arbeiten des Verfassers [15, 16] ausführlich dargestellt sind. Die Geometrie des Drehturms ist durch zwei Systemparameter festgelegt. Wenn die doppelten Drehgelenke durch entsprechende Schraubgelenke ersetzt werden, erhält man einen Schraubturm, dessen Kinematik in einer weiteren Arbeit des Verfassers [17] dargestellt ist.

Das Oktoid, das in der vorliegenden Arbeit behandelt wird, stellt wahrscheinlich die größtmögliche Verallgemeinerung des Heureka Oktaeders dar. Es besteht aus acht gleichen Dreieckplatten mit beliebiger Dreieck-Grundfläche die durch drei Typen von Doppel-Drehgelenken (mit nur zwei frei wählbaren Öffnungswinkeln) verbunden sind. Die Geometrie des zwangsläufig beweglichen Oktoids legen demnach fünf Systemparameter fest.

Das an den Koordinatenflächen sich abstützende Dreieck

Werden drei Punkte eines starren Körpers auf je drei starren, krummen oder ebenen Flächen geführt und dabei die Richtung einer, nicht in der Ebene die die drei Punkte bestimmen, liegenden, körperfesten Geraden beibehalten, dann ist der Körper mit einem Freiheitsgrad beweglich. Ein Dreieck berühre mit seinen Eckpunkten 1, 2, 3 die entsprechenden Koordinaten-Ebenen (Y, Z) , (Z, X) , (X, Y) des Koordinatensystems $(O; \mathbf{E}_X, \mathbf{E}_Y, \mathbf{E}_Z)$ (Bild 1). Mit dem Dreieck fest verbunden seien die beiden Koordinatensysteme $(o; \mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z)$ und $(o; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$. Mit den (transponierten) Vektor-Matrizen

$$(1) \quad \underline{\mathbf{E}}^T = [\mathbf{E}_X, \mathbf{E}_Y, \mathbf{E}_Z], \quad \underline{\mathbf{n}}^T = [\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z], \quad \underline{\mathbf{e}}^T = [\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z],$$

sowie den Euler-Matrizen \underline{A}_ψ , \underline{A}_θ , \underline{A}_ϕ

$$\underline{A}_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{A}_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

$$\underline{A}_\phi = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

und der Matrize \underline{U} :

$$(2) \quad \underline{U} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

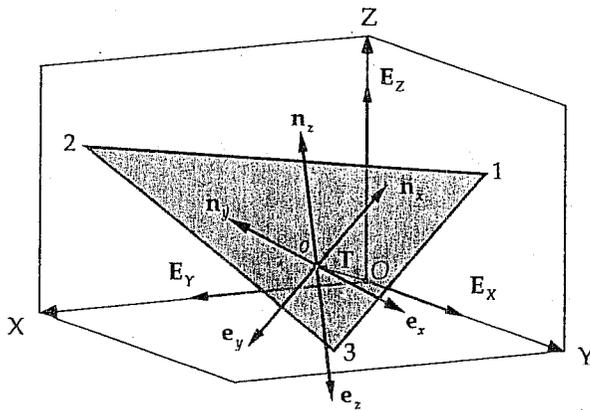


Bild 1

können die Zusammenhänge zwischen den Einheitsvektoren der verschiedenen Koordinatensysteme mit

$$\underline{A} = \underline{A}_\phi \cdot \underline{A}_\theta \cdot \underline{A}_\psi$$

und

$$\underline{A}^T = \underline{A}^{-1}$$

bzw.

$$\underline{U}^{-1} = \underline{U}$$

in der folgenden Weise dargestellt werden:

$$(3) \quad \underline{n} = \underline{A} \underline{E} = \underline{U} \underline{e} \Rightarrow \underline{E} = \underline{A}^T \underline{U} \underline{e}, \quad \underline{e} = \underline{U} \underline{A} \underline{E}.$$

Die beiden Winkel θ und ψ bestimmen den Einheitsvektor $\underline{n}_z = -\underline{e}_z = \underline{N}_1$ in $(O; \underline{E}_X, \underline{E}_Y, \underline{E}_Z)$. Will man die Richtung von \underline{n}_z festhalten, so muß dafür gesorgt werden, daß die Winkel α_1, α_2 und α_3 (Bild 2), die \underline{n}_z mit den entsprechenden Koordinatenebenen $(Y, Z), (Z, X), (X, Y)$ einschließt, unveränderlich sind. Diese Winkel sind nicht unabhängig voneinander, sie genügen der Bedingung

$$(4) \quad \left(\sin \frac{\alpha_1}{2}\right)^2 + \left(\sin \frac{\alpha_2}{2}\right)^2 + \left(\sin \frac{\alpha_3}{2}\right)^2 = 1 \quad \text{bzw.} \Rightarrow$$

$$(5) \quad \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3 = 1.$$

Die Winkel α_1, α_2 und α_3 legen die beiden Eulerwinkel θ und ψ (Bild 3) fest. Aus $\theta = \pi/2 - \alpha_3/2$ folgen:

$$(6) \quad \sin \theta = \cos \frac{\alpha_3}{2}, \quad \cos \theta = \sin \frac{\alpha_3}{2},$$

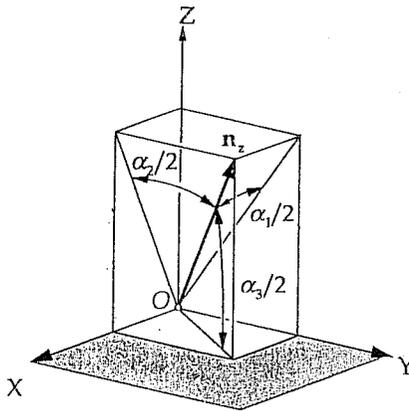


Bild 2

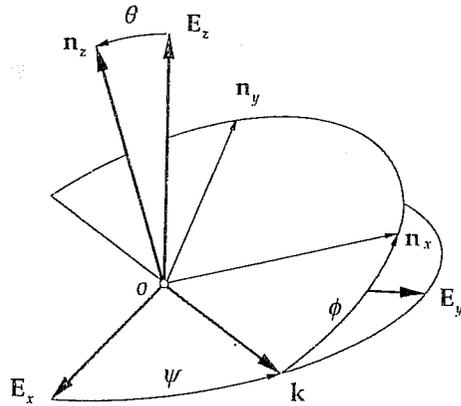


Bild 3

und die Koordinaten von $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{E}_Z \times \mathbf{n}_z}{\sin \theta}$ in $(O; \mathbf{E}_X, \mathbf{E}_Y, \mathbf{E}_Z)$ liefern für ψ :

$$(7) \quad \sin \psi = \frac{\sin \frac{\alpha_1}{2}}{\cos \frac{\alpha_3}{2}}, \quad \cos \psi = \frac{-\sin \frac{\alpha_2}{2}}{\cos \frac{\alpha_3}{2}}.$$

Die resultierende Matrix $\underline{A}^T \underline{U}$ ist damit nur mehr eine Funktion des Winkels ϕ . Das Dreieck ist, wenn es mit den Ecken die Koordinatenebenen $(Y, Z), (Z, X), (X, Y)$ berührt, unter der Voraussetzung $\mathbf{n}_z = \text{konst.}$ mit einem Freiheitsgrad beweglich, seine Lage mit dem Winkel ϕ bestimmt. Zur Festlegung aller mit dem Dreieck verbundenen Punkte soll im folgenden das Koordinatensystem $(o; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ verwendet werden. Der Ortsvektor eines mit dem Dreieck fest verbundenen Punktes P , bzw. die Ortsvektoren der Eckpunkte des Dreiecks seien in $(o; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ gegeben durch ihre Koordinaten-Matrizen

$$(8) \quad \underline{x}^T = [x, y, z], \quad \underline{x}_1^T = [x_1, y_1, 0], \quad \underline{x}_2^T = [x_2, y_2, 0], \quad \underline{x}_3^T = [x_3, y_3, 0].$$

Ihre entsprechenden Koordinaten-Matrizen in $(O; \mathbf{E}_X, \mathbf{E}_Y, \mathbf{E}_Z)$ ergeben sich mit (3) und dem (zunächst unbestimmten) Translations-Vektor \underline{T} zu:

$$(9) \quad \begin{aligned} \underline{X} = \underline{T} + \underline{x} &\Rightarrow \underline{E} = \underline{T}^T \underline{E} + \underline{x}^T \mathbf{e} = \underline{T}^T \underline{E} + \underline{x}^T \underline{U} \underline{A} \underline{E} = \\ &= (\underline{T} + \underline{A}^T \underline{U} \underline{x})^T \underline{E} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \underline{X} = \underline{T} + \underline{A}^T \underline{U} \underline{x}, \quad \text{bzw.} \quad \underline{X}_\alpha = \underline{T} + \underline{A}^T \underline{U} \underline{x}_\alpha. \end{aligned}$$

Den Translations-Vektor bestimmen die drei Berührbedingungen

$$(10) \quad \mathbf{E}_X \circ \mathbf{X}_1 = 0, \quad \mathbf{E}_Y \circ \mathbf{X}_2 = 0, \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_Z \circ \mathbf{X}_3 = 0.$$

Mit $\underline{E}_X^T = [1, 0, 0]$, $\underline{E}_Y^T = [0, 1, 0]$, $\underline{E}_Z^T = [0, 0, 1]$ und (9) erhält man daraus für die Koordinaten von \mathbf{T} in $(O; \mathbf{E}_X, \mathbf{E}_Y, \mathbf{E}_Z)$:

$$(11) \quad T_X = -\underline{E}_X^T \underline{A}^T \underline{U} \underline{x}_1, \quad T_Y = -\underline{E}_Y^T \underline{A}^T \underline{U} \underline{x}_2, \quad T_Z = -\underline{E}_Z^T \underline{A}^T \underline{U} \underline{x}_3,$$

und damit ergeben sich die Bahnen der Eckpunkte zu:

$$(12) \quad \begin{aligned} X_\alpha &= \underline{E}_X^T \underline{A}^T \underline{U} (\underline{x}_\alpha - \underline{x}_1), & Y_\alpha &= \underline{E}_Y^T \underline{A}^T \underline{U} (\underline{x}_\alpha - \underline{x}_2), \\ Z_\alpha &= \underline{E}_Z^T \underline{A}^T \underline{U} (\underline{x}_\alpha - \underline{x}_3), & \alpha &= 1, 2, 3, \end{aligned}$$

oder ausgeschrieben in Koordinaten:

$$(13) \quad \begin{aligned} X_1 &= 0 \\ Y_1 &= \frac{1}{\cos \frac{\alpha_3}{2}} \left\{ \left[(x_1 - x_2) \sin \frac{\alpha_1}{2} + (y_1 - y_2) \sin \frac{\alpha_2}{2} \sin \frac{\alpha_3}{2} \right] \sin \phi + \right. \\ &\quad \left. + \left[-(y_1 - y_2) \sin \frac{\alpha_1}{2} + (x_1 - x_2) \sin \frac{\alpha_2}{2} \sin \frac{\alpha_3}{2} \right] \cos \phi \right\} \\ Z_1 &= -\cos \frac{\alpha_3}{2} \{ (x_1 - x_3) \sin \phi + (y_1 - y_3) \cos \phi \} \\ X_2 &= \frac{1}{\cos \frac{\alpha_3}{2}} \left\{ \left[(x_1 - x_2) \sin \frac{\alpha_2}{2} - (y_1 - y_2) \sin \frac{\alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_3}{2} \right] \sin \phi + \right. \\ &\quad \left. + \left[-(y_1 - y_2) \sin \frac{\alpha_2}{2} - (x_1 - x_2) \sin \frac{\alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_3}{2} \right] \cos \phi \right\} \\ Y_2 &= 0 \\ Z_2 &= -\cos \frac{\alpha_3}{2} \{ (x_2 - x_3) \sin \phi + (y_2 - y_3) \cos \phi \} \\ X_3 &= \frac{1}{\cos \frac{\alpha_3}{2}} \left\{ \left[(x_1 - x_3) \sin \frac{\alpha_2}{2} - (y_1 - y_3) \sin \frac{\alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_3}{2} \right] \sin \phi + \right. \\ &\quad \left. + \left[-(y_1 - y_3) \sin \frac{\alpha_2}{2} - (x_1 - x_3) \sin \frac{\alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_3}{2} \right] \cos \phi \right\}, \\ Y_3 &= \frac{1}{\cos \frac{\alpha_3}{2}} \left\{ \left[-(x_2 - x_3) \sin \frac{\alpha_1}{2} - (y_2 - y_3) \sin \frac{\alpha_2}{2} \sin \frac{\alpha_3}{2} \right] \sin \phi + \right. \\ &\quad \left. + \left[(y_2 - y_3) \sin \frac{\alpha_1}{2} - (x_2 - x_3) \sin \frac{\alpha_2}{2} \sin \frac{\alpha_3}{2} \right] \cos \phi \right\} \\ Z_3 &= 0. \end{aligned}$$

Demnach sind die Eckpunkt-Bahnen zentrisch liegende Ellipsen (Bild 4). Dies läßt vermuten, daß jeder mit dem Dreieck festverbundene Punkt

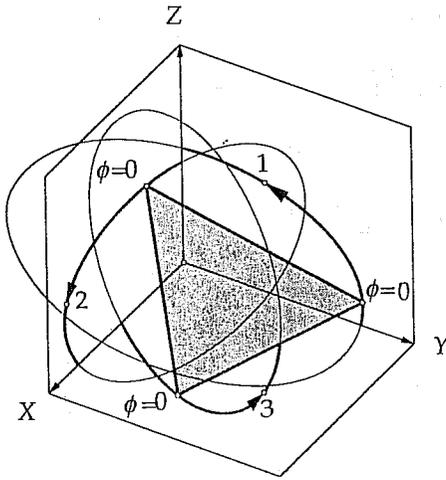


Bild 4

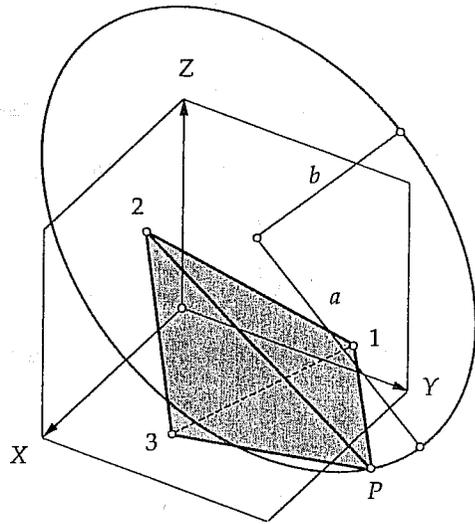


Bild 5

in $(O; \mathbf{E}_X, \mathbf{E}_Y, \mathbf{E}_Z)$ eine Ellipse beschreibt, d.h. daß die Bewegung des Dreieckskörpers eine Darboux'sche Bewegung [6] ist, bei der sämtliche Punkte sich in nicht zueinander parallelen Ebenen bewegen und dabei Ellipsen beschreiben. Tatsächlich bestätigt sich diese Vermutung. Ein Punkt P mit der Ortskoordinaten-Matrize \underline{x} in $(o; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ beschreibt in $(O; \mathbf{E}_X, \mathbf{E}_Y, \mathbf{E}_Z)$ eine Kurve, die gegeben ist durch (9). Mit den Komponenten von \underline{T} gemäß (11) erhält man aus $\underline{X} = \underline{T} + \underline{A}^T \underline{U} \underline{x}$ mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
 X_0 &= -z \sin \frac{\alpha_1}{2}, & Y_0 &= -z \sin \frac{\alpha_2}{2}, & Z_0 &= -z \sin \frac{\alpha_3}{2} \\
 A_1 &= \frac{1}{\cos \frac{\alpha_3}{2}} \left\{ (y - y_1) \sin \frac{\alpha_2}{2} + (x - x_1) \sin \frac{\alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_3}{2} \right\} \\
 A_2 &= \frac{1}{\cos \frac{\alpha_3}{2}} \left\{ -(y - y_2) \sin \frac{\alpha_1}{2} + (x - x_2) \sin \frac{\alpha_2}{2} \sin \frac{\alpha_3}{2} \right\} \\
 (14) \quad A_3 &= -(x - x_3) \cos \frac{\alpha_3}{2}, \\
 B_1 &= \frac{1}{\cos \frac{\alpha_3}{2}} \left\{ -(x - x_1) \sin \frac{\alpha_2}{2} + (y - y_1) \sin \frac{\alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_3}{2} \right\} \\
 B_2 &= \frac{1}{\cos \frac{\alpha_3}{2}} \left\{ (x - x_2) \sin \frac{\alpha_1}{2} + (y - y_2) \sin \frac{\alpha_2}{2} \sin \frac{\alpha_3}{2} \right\} \\
 B_3 &= -(y - y_3) \cos \frac{\alpha_3}{2},
 \end{aligned}$$

für die Komponenten von \underline{X} die folgenden Funktionen von ϕ :

$$(15) \quad \begin{aligned} X(\phi) &= X_0 + A_1 \cos \phi + B_1 \sin \phi \\ Y(\phi) &= Y_0 + A_2 \cos \phi + B_2 \sin \phi \\ Z(\phi) &= Z_0 + A_3 \cos \phi + B_3 \sin \phi. \end{aligned}$$

Die geschlossene Raumkurve (15) schneidet eine beliebige Ebene in genau zwei Punkten und stellt demnach eine schräg im Raum liegende Ellipse, mit den Mittelpunkts-Koordinaten X_0, Y_0, Z_0 dar (Bild 5). Die ersten drei Gleichungen von (14) zeigen, daß die Mittelpunkte aller Ellipsenbahnen auf einer festen Geraden liegen. Diese Gerade ist parallel zur Normalen der Dreiecksfläche und der Abstand des Ellipsen-Mittelpunktes von O ist, unabhängig von den Punktkoordinaten x und y , gleich der Koordinate z . Die Elimination von ϕ aus (15) ergibt für die Ellipsenebene

$$(16) \quad \begin{aligned} (A_3 B_2 - A_2 B_3)(X - X_0) + (-A_3 B_1 + A_1 B_3)(Y - Y_0) + \\ + (A_2 B_1 - A_1 B_2)(Z - Z_0) = 0, \end{aligned}$$

deren Normale über (14) von den Punktkoordinaten x, y, z abhängt, also von Punkt zu Punkt verschieden ist. Mit (15) und den Abkürzungen

$$(17) \quad h_1 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2, \quad 2(A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3), \quad B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$$

erhält man für den Abstand $a = \sqrt{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2}$ den Ausdruck:

$$(18) \quad a = \sqrt{h_1(\cos \phi)^2 + h_2(\cos \phi)(\sin \phi) + h_3(\sin \phi)^2}.$$

Aus $d(a)/d\phi = 0$ findet man für die Winkelparameter, die den Scheitelpunkten zugeordnet sind:

$$(19) \quad \phi_1 = \arctan \frac{h_2}{h_1 - h_3}, \quad \phi_2 = \arctan \frac{h_2}{h_1 - h_3} + \frac{\pi}{2},$$

womit über (15) die Koordinaten der Scheitelpunkte und mit (18) die Halbmesser der Ellipse bestimmt werden können.

Die Winkelgeschwindigkeit des Dreieckes in der durch den Winkel ϕ bestimmten Lage ist richtungskonstant und gegeben durch

$$(20) \quad \omega = \mathbf{n}_z \dot{\phi} = -\mathbf{e}_z \dot{\phi}.$$

Die Komponenten von ω in $(O; \mathbf{E}_X, \mathbf{E}_Y, \mathbf{E}_Z)$ bzw. in $(o; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ können natürlich auch der orthogonalen Matrize $(UA)^T(U\dot{A})$ bzw. $(U\dot{A})(UA)^T$ entnommen werden. Mit der Geschwindigkeit des Koordinatenur-

sprungs von $(o; e_x, e_y, e_z)$

$$(21) \quad \dot{\mathbf{T}} = \frac{d\mathbf{T}}{d\phi} \dot{\phi},$$

kann die Steigung der momentanen Schraubbewegung

$$(22) \quad p = \frac{\dot{\mathbf{T}} \circ \omega}{\omega \circ \omega},$$

berechnet werden und die Lage der momentanen Schraubachse ist festzulegen durch den Ortsvektors \mathbf{q} bzw. $\mathbf{Q} = \mathbf{q} + \mathbf{T}$ des Punktes Q durch den sie hindurchzieht:

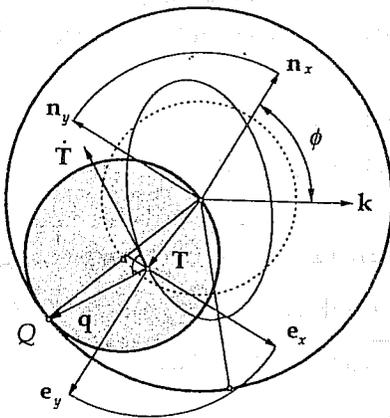


Bild 6

$$(23) \quad \mathbf{q} = \frac{\omega \times \dot{\mathbf{T}}}{\omega \circ \omega}.$$

Da die Richtung von $e_z (= -\mathbf{n}_z)$, und damit auch die Richtung von ω unveränderlich ist, muß sowohl das bewegliche wie auch das feste Axoid eine Zylinderfläche sein. Nach Darboux [6] sind diese Flächen sich innen berührende Kreiszylinder, und der Durchmesser der bewegten Schraubfläche ist halb so groß wie der Durchmesser der festen [4]. Im vorliegenden Fall verläuft die Achse des festen Zylinders

durch den Ursprung des Koordinatensystems $(O; E_X, E_Y, E_Z)$. Demnach sind die beiden Axoide bereits vollständig zu bestimmen, wenn man nur den Punkt Q der einer bestimmten Dreieckslage entspricht, kennt. Die Projektion der Axoide in der Richtung von e_z zeigt Bild 6.

Das Oktoid

Für das mit seinen Spitzen die Koordinatenflächen berührende Dreieck im vorstehenden Abschnitt wurde angenommen, daß seine Flächennormale konstant ausgerichtet bleibt. Dies läßt sich auf verschiedene Weise realisieren; eine Möglichkeit besteht z.B. darin, daß man eine kinematische Kette mit zwei Schubgelenken und einem Zylindergelenk

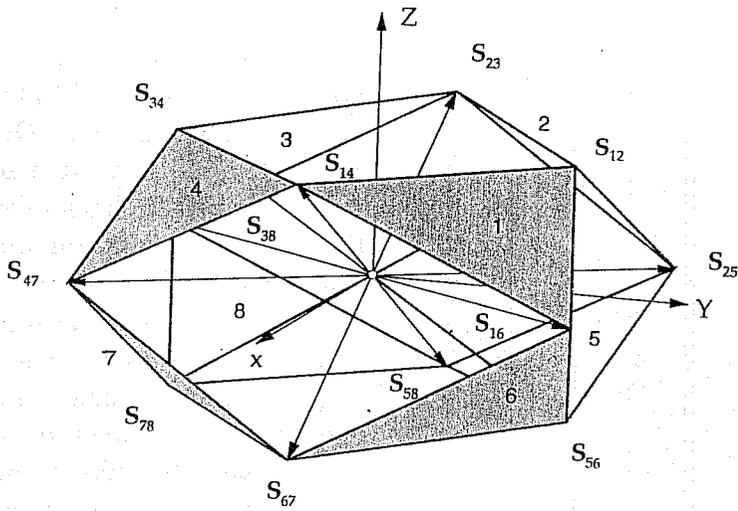


Bild 7

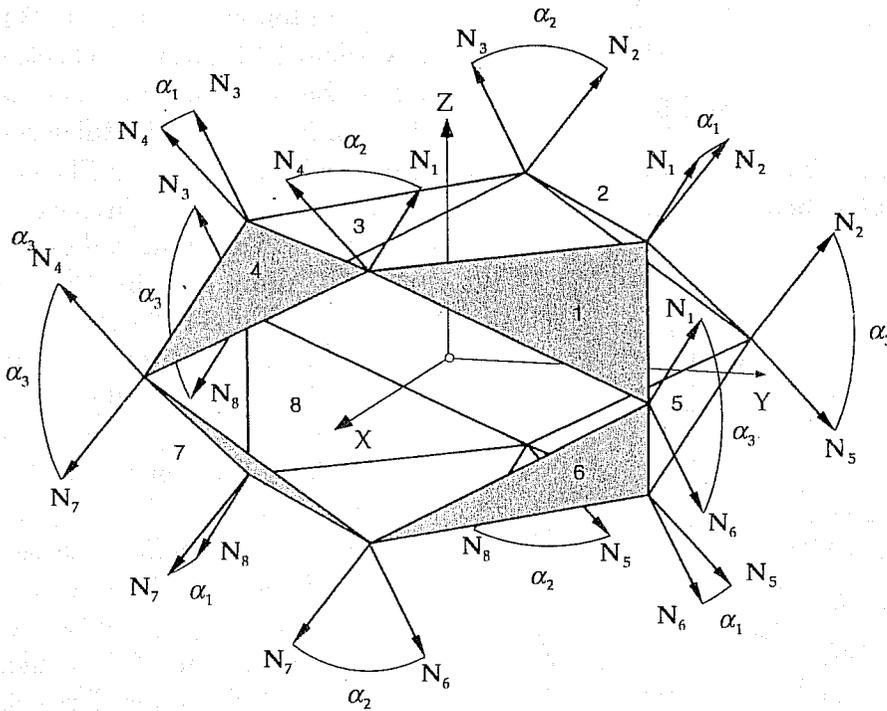


Bild 8

zwischen die Koordinatenebene (XY) und die Dreiecks-Flächennormale einfügt. Eine andere Möglichkeit wird im folgenden aufgezeigt.

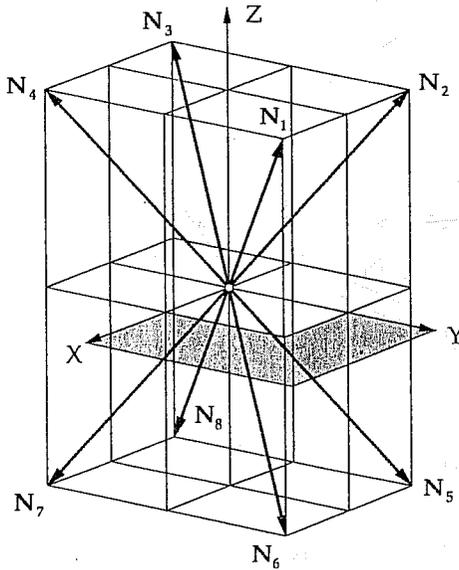


Bild 9

Offensichtlich können die Dreiecke auch in der Richtung ihrer Flächennormalen beliebig versetzt werden. Wählt man für jedes Dreieck die

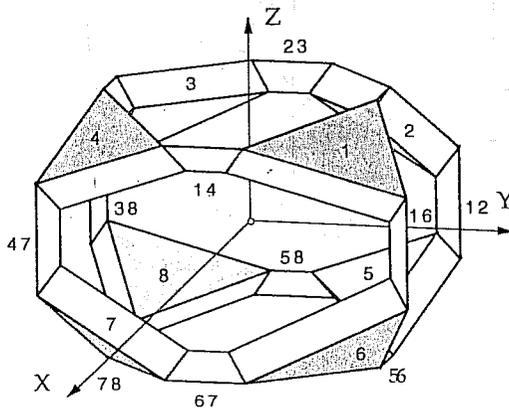


Bild 10

Nehmen wir an, das Dreieck 1 werde an den drei Koordinatenebenen gespiegelt (Bild 7) und die so entstandenen acht Dreiecke 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 werden mittels zwölf Doppel-Drehgelenken verbunden, deren Achsen mit den Flächennormalen der Dreiecke, die sie verbinden, zusammenfallen. Je vier von den zwölf Doppel-Drehgelenken müssen demnach die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ einschließen. In Bild 8 sind die Flächennormalen N_i ($i=1 \div 6$) der acht Dreiecke in den Gelenkpunkten eingezeichnet, Bild 9 verdeutlicht ihren wechselseitigen Zusammenhang. N_1 ist dabei mit \mathbf{n}_z zu identifizieren.

gleiche Versetzung, dann erhält man den in Bild 10 bzw. Bild 11 dargestellten Mechanismus, den wir „Oktoid“ nennen wollen. Dieses dreifach plansymmetrische Oktoid enthält sieben frei wählbare Systemparameter: die drei Seitenlängen der Dreiecke, die drei Winkel der Doppelgelenke (die aber Gleichung (5) erfüllen müssen), die innere Dreieck-Versetzung und schließlich die Plattendicke. Für das Oktoid sagt die Kutzbach-

Formel [10] Starrheit voraus, dank der besonderen Geometrie aber erweist sich das Oktoid als mit einem Freiheitsgrad beweglich. Das Oktoid besitzt fünf Fundamentalschleifen ($s = 5$), und die Summe der vorgesehenen relativen Freiheitsgrade ist $\sum f = 12 \times 2 = 24$, womit aus der topologischen Strukturformel $F = \sum f - 6s$ für den globalen Freiheitsgrad $F = -6$ erhalten wird. Die Kutzbachsche Strukturformel liefert also, auf den siebenfach übergeschlossenen Mechanismus angewendet, ein falsches Ergebnis.

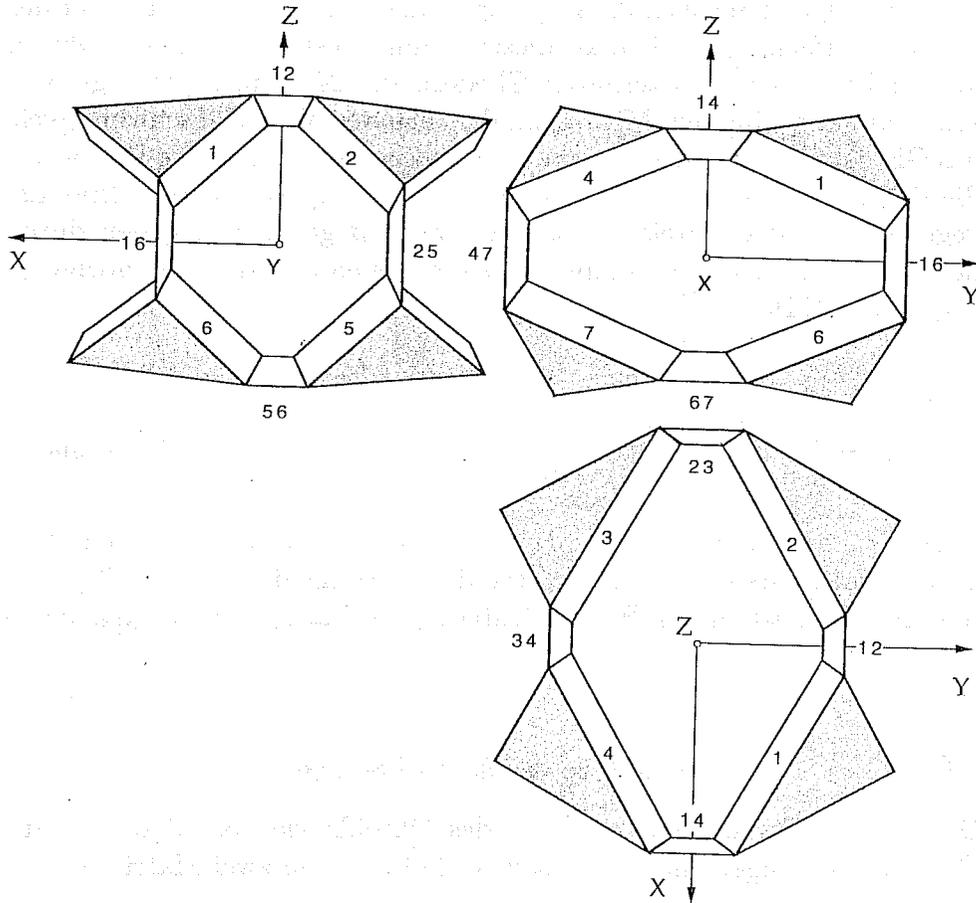


Bild 11

Der Nachweis, daß das Oktoid in Wahrheit ein zwangsläufiger Mechanismus ist, kann erfolgen, indem man nachweist, daß es in jeder Lage infinitesimal mit einem Freiheitsgrad beweglich ist. Für jede der fünf Fundamentalschleifen kann mit Hilfe der relativen Winkelgeschwindig-

keiten bzw. der relativen Geschwindigkeiten, die die Gelenke zulassen, als Schließbedingung eine Motorgleichung formuliert werden, die zusammengefaßt in die Form einer homogenen Matrixgleichung geschrieben werden kann. Die Matrix dieser Gleichung ist die lokale Jakobi-Matrix mit der Dimension $6s \times \sum f$. Der Rangabfall der lokalen Jakobi-Matrix, oder gleichbedeutend die Dimension (genauer gesagt der Rang) des Kernraumes dieser Jakobi-Matrix, gibt dann den Grad der infinitesimalen Beweglichkeit des Mechanismus in der gegebenen Position an [1].

Im folgenden sollen die Doppelgelenke als binäre Glied-Körper des Oktoids aufgefaßt werden. In diesem Sinne besteht dann das Oktoid aus 12 binären und 8 ternären Gliedern die 24 einfache Drehgelenke miteinander verbinden. Mit $\omega_{\alpha\beta|\alpha}$, der relativen Winkelgeschwindigkeit des Gliedkörpers $\alpha\beta$ gegenüber dem Körper α um die relative Drehachse die durch den Ortsvektor $S_{\alpha\beta}$ und den Richtungsvektor N_α (Bild 12) gegeben ist, ist die Relativbewegung von $\alpha\beta$ gegen α gegeben durch den auf den Koordinatenursprung O bezogenen relativen Geschwindigkeitsmotor [11]:

$$(24) \quad \widehat{V}_{\alpha\beta|\alpha} = \begin{bmatrix} \omega_{\alpha\beta|\alpha} N_\alpha \\ \omega_{\alpha\beta|\alpha} N_\alpha \times (-S_{\alpha\beta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_\alpha \\ S_{\alpha\beta} \times N_\alpha \end{bmatrix} \omega_{\alpha\beta|\alpha} = \widehat{N}_\alpha \omega_{\alpha\beta|\alpha},$$

worin \widehat{N}_α den Einheitsmotor der relativen Drehachse bezeichnet. Der Geschwindigkeitsmotor der die Relativbewegung des Gliedes β gegen α beschreibt, ist, unter Berücksichtigung von $\omega_{\beta|\alpha} = -\omega_{\alpha\beta|\beta}$, dann gegeben durch:

$$(25) \quad \widehat{V}_{\beta|\alpha} = \widehat{N}_\alpha \omega_{\alpha\beta|\alpha} - \widehat{N}_\beta \omega_{\alpha\beta|\beta}.$$

Da in allen Fundamentalschleifen des Oktoids viermal diese Zweier-Gruppierung angetroffen wird, sollen die folgenden zwei Matrizen

$$(26) \quad \underline{\omega}_{\alpha\beta}^T = \{\omega_{\alpha\beta|\alpha}, \omega_{\alpha\beta|\beta}\}, \quad \underline{N}_{\alpha\beta} = \{\widehat{N}_\alpha, -\widehat{N}_\beta\},$$

eingeführt werden, mit deren Hilfe es möglich wird, die Gleichung (25) in Matrizenform wie folgt anzuschreiben:

$$(27) \quad \widehat{V}_{\beta|\alpha} = \underline{N}_{\alpha\beta} \underline{\omega}_{\alpha\beta}, \quad \text{bzw.} \quad \widehat{V}_{\alpha|\beta} = -\underline{N}_{\alpha\beta} \underline{\omega}_{\alpha\beta} = \underline{N}_{\beta\alpha} \underline{\omega}_{\alpha\beta}.$$

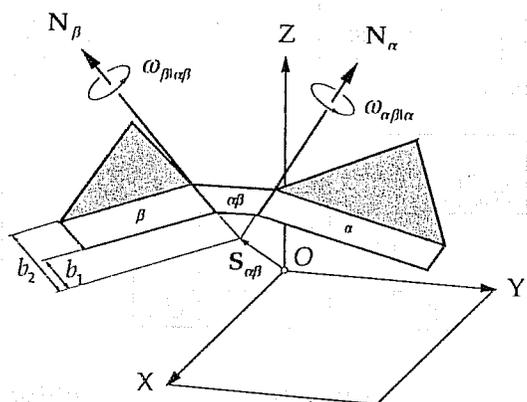


Bild 12

Die Dreieckskörper sollen nun durchlaufend mit den Ziffern 1 bis 8 bezeichnet werden, und die Doppelgelenke mit einer Doppelschleife, enthaltend die Ziffern der beiden Dreieckskörper (die niedrigere als erste), die das Doppelgelenk verbindet (Bild 10, Bild 11). Als Fundamentalschleifen des Oktoids seien die folgenden fünf geschlossenen kinematischen Ketten gewählt:

$$S_1: 1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$$

$$S_2: 2 \Rightarrow 1 \Rightarrow 6 \Rightarrow 5 \Rightarrow 2$$

$$S_3: 3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 5 \Rightarrow 8 \Rightarrow 3$$

$$S_4: 4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 8 \Rightarrow 7 \Rightarrow 4$$

$$S_5: 5 \Rightarrow 6 \Rightarrow 7 \Rightarrow 8 \Rightarrow 5.$$

Mit (27) können nun die Schließbedingungen der fünf Schleifen in einfacher Weise angeschrieben werden. Sie lauten:

$$(28) \quad \begin{aligned} \widehat{V}_{1|1} &= 0, & \widehat{V}_{2|2} &= 0, \\ \widehat{V}_{3|3} &= 0, & \widehat{V}_{4|4} &= 0, \\ \widehat{V}_{5|5} &= 0, \end{aligned}$$

bzw. ausgeschrieben:

$$(29) \quad \begin{aligned} \underline{N}_{12}\omega_{12} + \underline{N}_{23}\omega_{23} + \underline{N}_{34}\omega_{34} + \underline{N}_{41}\omega_{41} &= 0 \\ \underline{N}_{21}\omega_{12} + \underline{N}_{16}\omega_{16} + \underline{N}_{65}\omega_{65} + \underline{N}_{52}\omega_{52} &= 0 \\ \underline{N}_{32}\omega_{23} + \underline{N}_{25}\omega_{52} + \underline{N}_{58}\omega_{58} + \underline{N}_{83}\omega_{83} &= 0 \\ \underline{N}_{43}\omega_{34} + \underline{N}_{38}\omega_{83} + \underline{N}_{87}\omega_{87} + \underline{N}_{74}\omega_{74} &= 0 \\ \underline{N}_{56}\omega_{65} + \underline{N}_{67}\omega_{67} + \underline{N}_{78}\omega_{87} + \underline{N}_{85}\omega_{85} &= 0. \end{aligned}$$

Mit der, die unbekanntenen Winkelgeschwindigkeiten zusammenfassenden 1×24 -Matrize $\underline{\omega}$:

$$(30) \quad \underline{\omega}^T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \omega_{12}^T & \omega_{23}^T & \omega_{34}^T & \omega_{41}^T & \omega_{16}^T & \omega_{65}^T & \omega_{52}^T & \omega_{58}^T & \omega_{83}^T & \omega_{87}^T & \omega_{74}^T & \omega_{67}^T \\ \hline \end{array}$$

und der lokalen Jakobi-Matrix \underline{J}

$$(31) \quad \underline{J} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline N_{12} & N_{23} & N_{34} & N_{41} & & & & & & & & \\ \hline N_{21} & & & & N_{16} & N_{65} & N_{52} & & & & & \\ \hline & N_{32} & & & & & N_{25} & N_{58} & N_{83} & & & \\ \hline & & N_{43} & & & & & & N_{38} & N_{87} & N_{74} & \\ \hline & & & & & N_{56} & & & N_{85} & & N_{78} & & N_{67} \\ \hline \end{array}$$

kann der Gleichungssatz (29) in der Form einer einzigen homogenen Matrixgleichung geschrieben werden:

$$(32) \quad \underline{J} \underline{\omega} = 0.$$

Die 30×24 -Matrix \underline{J} , deren strukturelle Besetztheit (31) verdeutlicht, ist eine Funktion des Lageparameters ϕ . Ihr Rang bestimmt die Anzahl der frei wählbaren relativen Winkelgeschwindigkeiten. Da (31) mehr skalare Gleichungen enthält als Unbekannte vorhanden sind, ist zunächst ungewiß, ob (31) überhaupt Lösungen besitzt. Die Durchrechnung aber zeigt, daß der Rang von \underline{J} , unabhängig von ϕ , gleich 23 ist, womit nachgewiesen ist, daß das Oktoid einen Freiheitsgrad besitzt, also ein zwangsläufiger Mechanismus darstellt. Die Rechnung zeigt ferner, daß alle relativen Winkelgeschwindigkeiten gleich groß sind:

$$(33) \quad \omega_{\alpha\beta|\alpha} = \omega_{\beta|\alpha\beta} = -\omega_{\beta\gamma|\beta}.$$

Dieses Ergebnis kann freilich aus der Entstehungsgeschichte des Oktoids, den Dreiecksspiegelungen, unmittelbar gefolgert werden. Zuzufolge (33) könnten im Oktoid sämtliche Drehgelenke auch durch Schraubgelenke mit in jeder Schleife abwechselnd positiver bzw. negativer, gleich großer Steigung ersetzt werden, wobei die dreifache Plansymmetrie des Schraub-Oktoids bei der Zwanglaufbewegung erhalten bliebe, und sich nur die Versetzungsmaße b_1 und b_2 proportional mit ϕ ändern würden.

Die drei Typen von Relativbahnen

Wird einer der Dreieckskörper des Oktoids festgehalten, dann beschreiben die Punkte der anderen sieben Dreieckskörper verschiedene Relativbahnen, die drei Typen zuzuordnen sind. Wenn das Glied

Bild 13

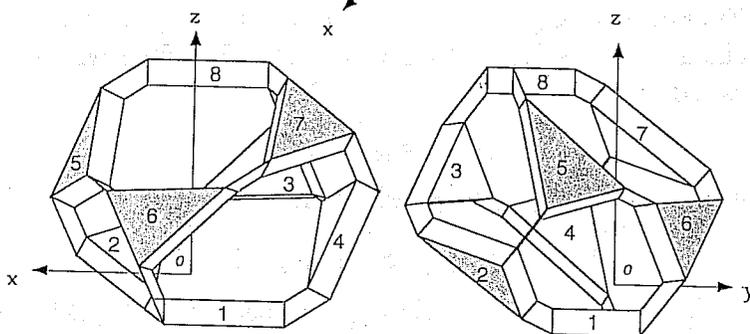
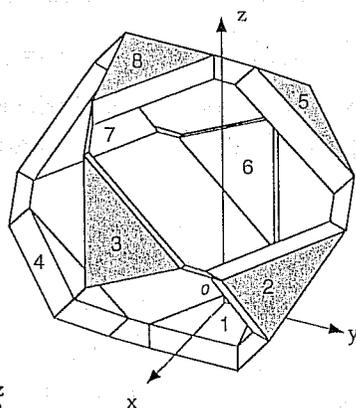
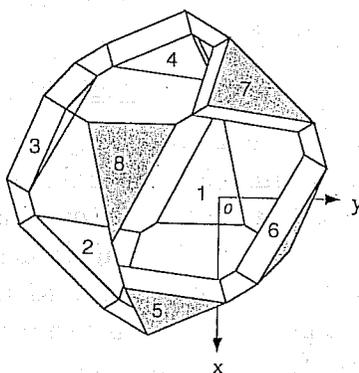


Bild 14



1 bzw. das mit ihm fest verbundene Koordinatensystem $(o; e_x, e_y, e_z)$ festgehalten wird (Bild 13, Bild 14), dann beschreiben die Punkte der Gliedkörper 2, 4, und 6 Raumkurven eines gleichen Typs I, die Punkte der Glieder 3, 5 und 7 Bahnen des Typs II, und die Punkte des Gliedes 8 schließlich Bahnen des Typs III.

BAHNTYPUS I. Bezeichnen wir nun die Koordinaten der mit dem Dreieck α fest verbundenen Punkte in $(O; E_X, E_Y, E_Z)$ mit $X_{(\alpha)}$,

$Y_{(\alpha)}$, $Z_{(\alpha)}$ und fassen sie wieder zusammen zur Spaltenmatrize $\underline{X}_{(\alpha)}$:

$$(34) \quad \underline{X}_{(\alpha)}^T = [X_{(\alpha)}, Y_{(\alpha)}, Z_{(\alpha)}] \quad \alpha = (1 \div 6).$$

Die Punkte des Dreiecks 2 sind denen des Dreiecks 1 in ein-eindeutiger Weise durch Spiegelung an der (YZ) -Ebene zugeordnet. Mit der Spiegelungsmatrix

$$(35) \quad \underline{S}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

kann der Zusammenhang der Koordinaten der entsprechenden Punkte des Dreiecks 2 und des Dreiecks 1 in $(O; \mathbf{E}_X, \mathbf{E}_Y, \mathbf{E}_Z)$ wie folgt angeschrieben werden:

$$(36) \quad \underline{X}_{(2)} = \underline{S}_2 \underline{X}_{(1)}.$$

Mit Gleichung (9) und $\underline{X}_{(1)} \equiv \underline{X}$ erhält man

$$\underline{X}_{(2)} = \underline{S}_2 \underline{X} = \underline{S}_2 (\underline{T} + \underline{A}^T \underline{U} \underline{x}).$$

Der durch $\underline{X}_{(2)}$ in $(O; \mathbf{E}_X, \mathbf{E}_Y, \mathbf{E}_Z)$ gekennzeichnete Punkt besitzt in $(o; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ die Koordinaten $x_{(2)}, y_{(2)}, z_{(2)}$, das sind die Elemente der Matrix $\underline{x}_{(2)}$, die sich aus

$$(37) \quad \underline{x}_{(2)} = \underline{U} \underline{A} (-\underline{T} + \underline{S}_2 (\underline{T} + \underline{A}^T \underline{U} \underline{x}))$$

berechnet. Die Elemente von $\underline{x}_{(2)}$ sind Funktionen des Positionswinkels ϕ , somit bestimmt (37) die Bahnen der Punkte des Gliedes 2 in Bezug auf das Koordinatensystem $(o; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$. Es ist unmittelbar klar, daß diese auf konzentrischen Kugeln liegen müssen, daß sie also sphärische Bahnen sind. Der Mittelpunkt M aller dieser Kugeln ist identisch mit der Dreieckspitze 1, dessen Ortsvektor mit $\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_x x_1 + \mathbf{e}_y y_1 + \mathbf{e}_z 0$ gegeben ist. Die Rechnung zeigt, daß die Punktbahnen einerseits auf einer Kugel und andererseits auf einem Kreiskegel liegen: die Bahnkurve (37) ist identisch mit der Schnittkurve der Kugel, deren Radius und Mittelpunkt gegeben sind durch

$$(38) \quad R = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + z^2}, \quad x_M = x_1, \quad y_M = y_1, \quad z_M = 0,$$

mit dem, die Kugel im Punkt $\underline{x}_{(2)} = \underline{x}$ innen berührenden Kreiskegel, dessen Achse parallel zur z -Achse ist und dessen Öffnungswinkel γ und Spitze S festgelegt sind durch

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \arcsin \frac{z}{R}, \\
 x_s &= x + (x_1 - x) \left\{ 1 - \left[\frac{\sin \frac{\alpha_1}{2}}{\cos \gamma} \right]^2 \right\}, \\
 y_s &= y + (y_1 - y) \left\{ 1 - \left[\frac{\sin \frac{\alpha_1}{2}}{\cos \gamma} \right]^2 \right\}, \\
 z_s &= z \left[\frac{\sin \frac{\alpha_1}{2}}{\sin \gamma} \right]^2.
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

Für Punkte in der Koordinatenebene (xy) , d.h. für $z = 0$, entartet die Kurve zu einer Hippopede [8], der Schnittkurve einer Kugel mit einem die Kugel innen tangierenden Zylinder. Der Aufriß in Bild 15 zeigt die Schnittkurve von Kugel und Kegel projiziert in der Richtung einer der beiden „horizontalen“ Tangenten der Bahnkurve. Die Projektionslinie der Schnittkurve ist eine quadratische Parabel mit „horizontaler“ Achse. Da nach (33) die relative Winkelgeschwindigkeit des Doppelgelenkes 12 gegenüber dem Glied 1 bzw. die des Gliedes 2 gegenüber dem Doppelgelenk 12 gleich groß ist, liegt die resultierende Winkelgeschwindigkeit des Gliedes gegenüber dem Glied 1 immer in der Symmetralen des Doppelgelenkes. Daraus folgt, daß die beiden Axoide Kreiskegel mit dem gleichen Öffnungswinkel $\frac{\alpha_1}{2}$ sein müssen (Bild 16). Die Relativbewegung des Oktoidgliedes 2 gegen 1 kann man sich demnach durch das Abrollen eines mit 2 verbundenen Kegels auf einem gleich großen, mit 1 verbundenen Kegel, entstanden denken.

BAHNTYPUS II. Die Punkte des Dreiecks 3 sind denen des Dreiecks 1 in ein-eindeutiger Weise durch zwei aufeinander folgende Spiegelungen an der (YZ) -Ebene und an der (XZ) -Ebene, zugeordnet. Die vermittelnde Spiegelungsmatrix ist

$$\underline{S}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \tag{40}$$

Damit ist der Zusammenhang der Koordinaten von entsprechenden Punkten des Dreiecks 3 und des Dreiecks 1 in $(O; \mathbf{E}_X, \mathbf{E}_Y, \mathbf{E}_Z)$ gegeben durch:

$$\underline{X}_{(2)} = \underline{S}_2 \underline{X}_{(1)}.
 \tag{41}$$

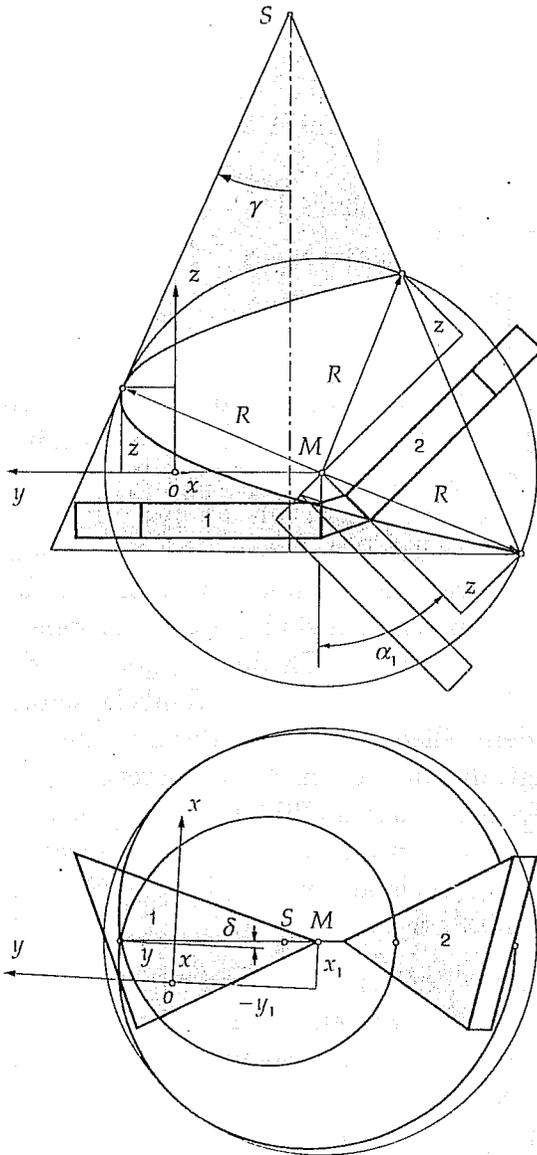


Bild 15

sphärische Kurven und von denen soll im folgenden ausführlicher die

Mit Gleichung (9) und $\underline{X}_{(1)} \equiv \underline{X}$ erhält man

$$\begin{aligned} \underline{X}_{(3)} &= \underline{S}_3 \underline{X} = \\ &= \underline{S}_3 (\underline{T} + \underline{A}^T \underline{U} \underline{x}). \end{aligned}$$

Der durch $\underline{X}_{(3)}$ in $(O; \mathbf{E}_X, \mathbf{E}_Y, \mathbf{E}_Z)$ gekennzeichnete Punkt besitzt in $(o; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ die Koordinaten $x_{(3)}, y_{(3)}, z_{(3)}$, die Elemente der Matrix $\underline{x}_{(3)}$, die sich aus

$$(42) \quad \underline{x}_{(3)} = \underline{U} \underline{A} [-\underline{T} + \underline{S}_3 (\underline{T} + \underline{A}^T \underline{U} \underline{x})]$$

ergibt. Die Elemente von $\underline{x}_{(3)}$ bestimmen die Bahnkurve jedes beliebigen Punktes des Gliedes 3 als Funktionen des Positionswinkels ϕ . Wie unschwer zu zeigen ist, sind diese Bahnen ebenfalls räumliche Kurven vierter Ordnung, sie weisen aber im allgemeinen keine Besonderheiten auf. Eine Ausnahme bilden die Bahnen der Punkte des Dreieckskörpers 3, die in $(o; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ den Punkten der (xy) Ebene entsprechen. Diese Bahnen sind nichttriviale

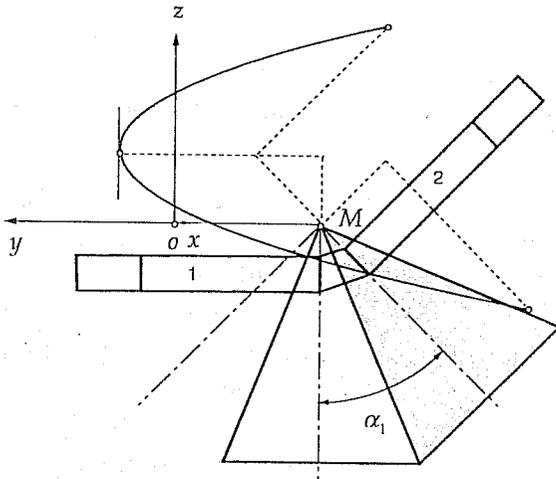


Bild 16

$$\begin{aligned}
 (43) \quad x_{(3)} &= x_m + k \cos \phi + r \cos(2\phi - \rho) \\
 y_{(3)} &= y_m + k \sin \phi + r \sin(2\phi - \rho) \\
 z_{(3)} &= k_0 + h \cos(\phi - \lambda).
 \end{aligned}$$

Die hierin auftretenden Größen sind einerseits Funktionen der System-Parameter, darüber hinaus enthalten r , ρ , h und λ die Koordinaten x und y , und die Größen k und k_0 sind direkt proportional zur Koordinate z . Demnach vereinfacht sich (43) für die Punkte der (xy) -Ebene zu:

$$\begin{aligned}
 (44) \quad x_{(3)} &= x_m + r \cos(2\phi - \rho) \\
 y_{(3)} &= y_m + r \sin(2\phi - \rho) \\
 z_{(3)} &= h \cos(\phi - \lambda).
 \end{aligned}$$

Die Bahnkurve vierter Ordnung die die Gleichung (44) in Parameterform beschreibt ist eine Hippopede [8], die Schnittkurve einer Kugel mit einem die Kugel innen tangierenden Kreiszyylinder (Bild 17). Die Achse des Kreiszyinders mit dem Radius r ist zur z Achse parallel und schneidet die (xy) -Ebene in dem Punkt $(x_m, y_m, 0)$. Der Mittelpunkt M der Kugel mit dem Radius

eines starren Körpers haben etwa gleichzeitig R. Bricard [2] und E. Borel [3] in ausführlichen Arbeiten behandelt. Die Relativbewegung des Oktoid-Gliedes 3 gegenüber dem Gliedkörper 1 kann als Sonderfall einer Bricard-Borel Bewegung aufgefaßt werden. Die sich aus (42) errechnenden Elemente von $\underline{x}_{(3)}$ können in der folgenden Weise dargestellt werden:

ist durch seine Koordinaten in $(o; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ festgelegt:

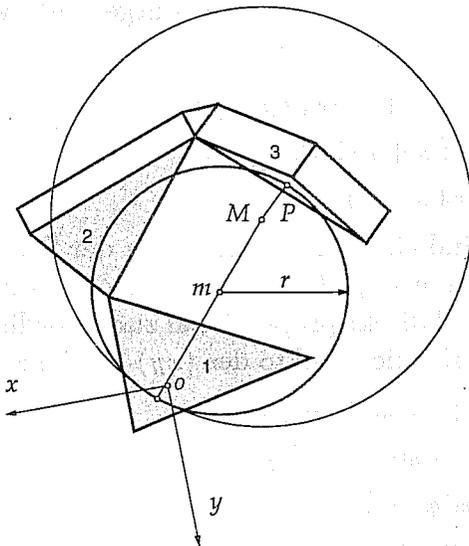
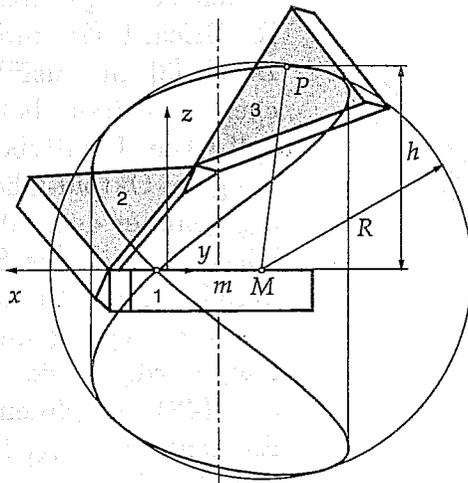


Bild 17

(46)

$$x_M = x_m + (R-r) \cos(2\lambda - \rho)$$

$$y_M = y_m + (R-r) \sin(2\lambda - \rho)$$

$$z_M = 0.$$

Jedem Punkt in der Basisebene des Gliedkörpers 3 entspricht genau ein Kugelmittelpunkt in der Basisebene (x, y) des festgehaltenen Gliedkörpers 1.

Die zwangsläufige Bewegung des Gliedkörpers 3 als Teil des Oktoids kann daher auch in anderer Weise verwirklicht gedacht werden, nämlich dadurch, daß fünf (oder mehrere) Stäbe konstanter Länge zwischen die entsprechenden Punkte in 1 bzw. 3 kugelgelenkig eingesetzt werden (Bild 18). Werden 6 Stäbe in entsprechenden Punkten eingefügt, dann liegt eine „singuläre Stewart-Plattform“ vor, d.i. eine Plattform, endlich beweglich ist. Die sechs Stabachsen bestimmen in jeder Lage (mindestens) einen linearen Komplex.

Blockiert man die Beweglichkeit der Plattform durch einen beliebigen, zwischen 1 und 3 eingezogenen weiteren Stab, dann erhält man über (43) eine algebraische Bestimmungsgleichung für den Tangens des halben Positionswinkel ϕ die vier reelle Lösungen zuläßt. M. L. Husty und P. Zsombor-Murray haben kürzlich einen ähnlicheren, etwas allgemeineren Fall ausführlich dargestellt [9].

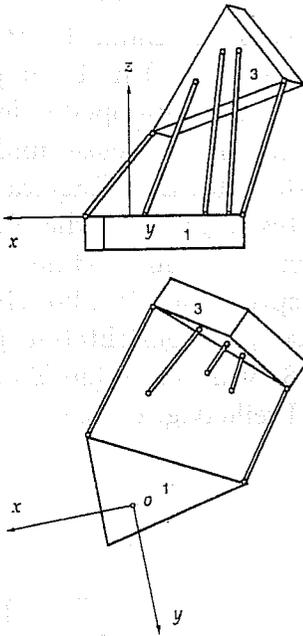


Bild 18

BAHNTYPUS III. Die Punkte des Deckkörpers 8 sind den Punkten des Basiskörpers 1 ein-eindeutig durch Zentralspiegelung am Ursprung des Koordinatensystems $(O; \mathbf{E}_X, \mathbf{E}_Y, \mathbf{E}_Z)$ zugeordnet. Die dazugehörige Spiegelungsmatrix ist gleich der negative Einheitsmatrix $\underline{S}_8 = -I$. Damit gilt für die Koordinaten der entsprechenden Punkte von 8 und von 1 in $(O; \mathbf{E}_X, \mathbf{E}_Y, \mathbf{E}_Z)$:

$$(47) \quad \underline{X}_{(8)} = \underline{S}_8 \underline{X}_{(1)} = -\underline{X}_{(1)},$$

und mit der Gleichung (9) sowie der Gleichsetzung von $\underline{X}_{(1)} \equiv \underline{X}$ erhält man dafür

$$\underline{X}_{(8)} = -(\underline{T} + \underline{A}^T \underline{U} \underline{x}).$$

Der durch $\underline{X}_{(8)}$ in $(O; \mathbf{E}_X, \mathbf{E}_Y, \mathbf{E}_Z)$ gekennzeichnete Punkt besitzt in $(o; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ die Koordinaten $x_{(8)}$,

$y_{(8)}$, $z_{(8)}$, die Elemente der Matrix $\underline{x}_{(8)}$ die sich aus

$$(48) \quad \underline{x}_{(8)} = \underline{U} \underline{A} (-\underline{T} + \underline{S}_8 (\underline{T} + \underline{A}^T \underline{U} \underline{x})) = -\underline{U} \underline{A} (2\underline{T} + \underline{A}^T \underline{U} \underline{x})$$

errechnen zu:

$$(49) \quad \begin{aligned} x_{(8)} &= -x + x_{mo} + r \cos(2\phi - \rho) \\ y_{(8)} &= -y + y_{mo} + r \sin(2\phi - \rho) \\ z_{(8)} &= -z + h \cos(\phi - \lambda). \end{aligned}$$

Die formale Ähnlichkeit von (50) und von (43) ist nur eine äußerliche. Der Unterschied besteht vornehmlich darin, daß die in (50) auftretenden Größen x_{mo} , y_{mo} , r , ρ , h und λ nur von den Systemparametern des Oktoids abhängen. Das aber bedeutet, daß die Bahnen aller Punkte der Gliedes 8 zu einander kongruent sind und also die Relativbewegung von 8 gegen 1 eine reine Translationsbewegung ist. Dies folgt unmittelbar auch aus der verschwindenden relativen Winkelgeschwindigkeit von 8 gegen 1:

$$(51) \quad \omega_{8|1} = (\mathbf{n}_1 \dot{\phi} + \mathbf{n}_2 \dot{\phi}) - (\mathbf{n}_2 \dot{\phi} + \mathbf{n}_3 \dot{\phi}) + (\mathbf{n}_3 \dot{\phi} + \mathbf{n}_8 \dot{\phi}) = 0.$$

Stellvertretend für alle Punktbahnen kann die Bahn des Punktes in 8 der dem Koordinatenursprung von $(o; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ in 1 entspricht, diskutiert werden. Es handelt sich wieder um eine Hippopede, der Schnittkurve eines Kreiszyinders (r) mit zu z paralleler Achse, und einer Kugel (R) die der Zylinder innen berührt (Bild 19). Den Kugelradius R und die Koordinaten des Kugelmittelpunktes bestimmen die Formeln (45) bzw. (46). Die Bewegung von 8 gegenüber 1 im Oktoidverband kann nun aber nicht durch 5, zwischen entsprechende Punkte eingezeichnete Stäbe ersetzt werden; die in jeder Lage gleichgerichteten, gleichlangen Stäbe (Bild 20) würden dem Glied 8 zwar eine reine Translationsbewegung aufzwingen, ließen aber zwei Freiheitsgrade zu..

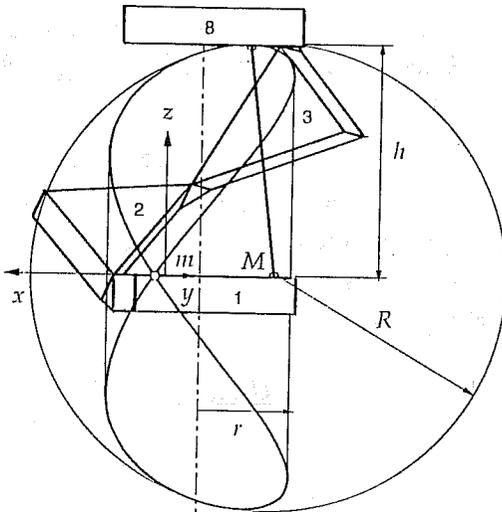


Bild 19

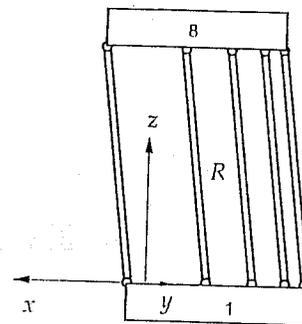


Bild 20

Literatur

- [1] ANGELES, J.: Rational Kinematics, Springer, 1988.
- [2] BRICARD, R.: Mémoire sur les déplacements à trajectoires sphériques, *J. Éc. Polyt.* **11**, 1–96.
- [3] BOREL, E.: Mémoire sur les déplacements à trajectoires sphériques, *Mém. présenté par des divers sav. Paris* (2), **33/1** (1908), 1–128.
- [4] BOTTEMA, O. and ROTH, B.: Theoretical Kinematics, Dover edition, Reprint 1990, 304–310.

- [5] BUCKMINSTER FULLER, R.: Synergetics: Explorations in Geometry and Thinking, Macmillan, New York, 1975, 190–215.
- [6] DARBOUX, G.: Sur le déplacement d'une figure invariable, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* **82** (1881), 118–121.
- [7] EDDIE BAKER, J.: On a Network of Continuously Modified Bennett Linkages, Proceedings of the 6th Intern. Symposium on Linkages and Computer Aided Design, Bucharest, 1993.
- [8] GIERING, O.: Bemerkenswerte Eigenschaften der Hippopeden, Proceedings of the 3rd Congress of Geometry, Thessaloniki, 1991, 162–174.
- [9] HUSTY, M. L. and ZSOMBOR-MURRAY, P.: A special Type of Singular Stewart-Gough Platform, Advances in Robot Kinematics and Computational Geometry, Kluwer Academic Publishers, 1994, 449–458.
- [10] KUTZBACH, K.: Mechanische Leistungsverzweigung, Maschinenbau, *Der Betrieb* **8** (1929), 710–716.
- [11] v. MISES, R.: Motorrechnung, ein neues Hilfsmittel der Mechanik, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **4/2** (1924), 155–181; **4/3** (1924), 193–213.
- [12] SCHWABE, C.: Briefliche Mitteilung an den Verfasser.
- [13] STACHEL, H.: The HEUREKA-Polyhedron, Preprint, Proceedings Intuitive Geometry, Szeged, 1991.
- [14] STACHEL, H.: Zwei bemerkenswerte bewegliche Strukturen, *Journal of Geometry* **43** (1992), 14–21.
- [15] WOHLHART, K.: Heureka Octahedron and Brussels Folding Cube as Special Cases of the Turning Tower, Proceedings of the 6th Intern. Symposium on Linkages and Computer Aided Design, Bucharest, 1993, 303–311.
- [16] WOHLHART, K.: Dynamics of the Turning Tower, IV Gesamtpolnische Conference on TMM, Bielsko-Biala, 1993, 325–332.
- [17] WOHLHART, K.: The Screwtower, an Overconstrained Multi-Loop Space Mechanism, Proceedings of the Intern. Conference on Spatial Mechanisms and High-Class Mechanisms, Almaty (Kazakhstan), 1994.
- [18] ZSOMBOR-MURRAY, P. J.: The Brussels Folding Cube, Proceedings of the 3rd Intern. Workshop on Advances in Robot Kinematics, Ferrara, 1992, 159–164.