Mathematica Pannonica
6/1 (1995), 229 – 236

DIE SATELLIT-KINEMATIK IN DER BOLYAI – LOBATSCHEFSKYSCHEN GEOMETRIE IN ELEMENTAR-GEOMETRISCHER BEHANDLUNG

I. Vermes

Lehrstuhl für Geometrie, Technische Universität, Egry József u. 1, H–1521 Budapest, Ungarn

Herrn o. Univ.-Prof. Dr. H. Vogler zum 60. Geburtstag gewidmet

Received January 1995

MSC 1991: 53 A 17; 53 A 35.

Keywords: Kinematics, Non-Euclidean differential geometry

Abstract: In the present paper we discuss the kinematics of satellites in the hyperbolic space by using the synthetic differential geometric methods elaborated in [6] and [4]. We assume that the orbit of a satellite is a cycle (circle, horocycle, hypercycle). Let the planet, belonging to the satellite, be found in the real or ideal centre of this cycle and let permanent or periodic radio link be established between them. Using these assumptions, we determine the kinematic characteristics of the satellite which revolves with constant angular velocity, namely, the period and the angular velocity of the movement, the length of one revolution, the centripetal acceleration, furthermore, the relations between these quantities and the curvatures of the cycle-orbits.

Wir können die folgenden Eigenschaften für die Bewegung eines Satellits voraussetzen:

(i) Diese Bewegung ist eine ebene Bewegung.

(ii) Die Bahnkurve des Satellits ist ein Kreis oder ein Zykel, dessen eigentlicher oder uneigentlicher Mittelpunkt mit dem geometrischen

Unterstützt von der Ungarischen Akademie der Wissenschaften im Projekt OTKA Nr. 1615 (1991).
Diese Arbeit wurde in Rahmen der Zusammenarbeit des Institutes der Geometrie der TU Graz und des Lehrstuhls für Geometrie der TU Budapest verfertigt.

Mittelpunkt des Planeten fällt zusammen.

(iii) Die Drehachsen wie des Satellits als auch seines Planeten stehen zur Ebene der Bewegung senkrecht.

(iv) Wie der Satellit als auch sein Planet je eine Kugel bilden, die durch ihre geometrischen Mittelpunkte ersetzt werden können.

(v) Die Bahngeschwindigkeit (bzw. die Winkelgeschwindigkeit) ist konstant.

(vi) Der Satellit verfolgt seinen Planeten immer — *einfache Satellitbewegung* — bzw. periodisch — *zusammengesetzte Satellitbewegung.* Im ersten Fall können der Satellit und sein Planet ständig in einer „Rundfunk-Verbindung" bleiben.

Im zweiten Fall haben sie erst bestimmte, periodisch nacheinanderfolgende Augenblicke zur „Rundfunk-Verbindung".

Zur Behandlung werden die synthetischen differentialgeometrischen Kenntnisse für die ebenen Kurven der Bolyai–Lobatschefskyschen Geometrie verwendet [6], die auf Grund der Arbeiten [1, 2, 3, 4, 5], insbesondere des Buches von O. Perron ausgearbeitet wurden.

Einfache Satellitbewegung

a) Der Satellit S bewegt auf einem Kreis vom Radius r, und er

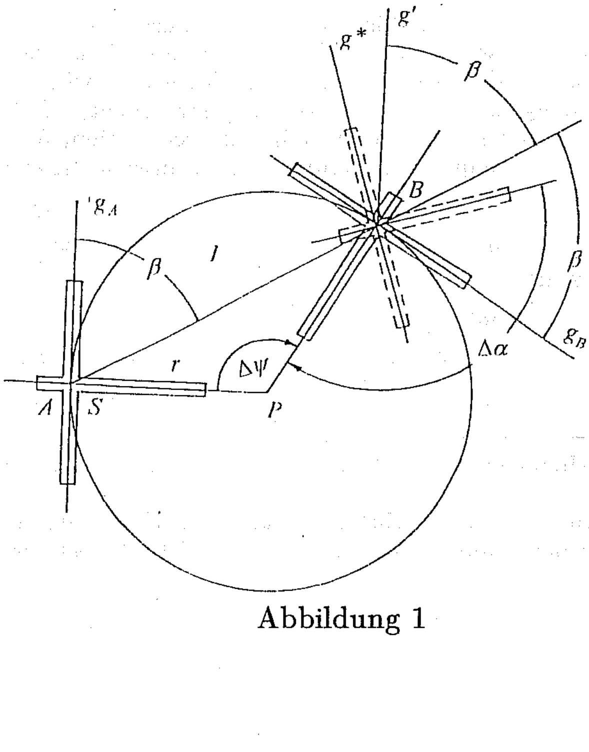

Abbildung 1

umläuft um seinem Planeten P, der mit dem Kreismittelpunkt inzidiert. Falls der Satellit S keine Selbstdrehung hätte, so müßte seine Bahntangente g_A sich — während der Bewegung von A bis B — in die Lage g^* in der entgegengesetzten Drehrichtung im Vergleich mit der Umlaufrichtung drehen (Abb. 1). Wegen der Verschiebung entlang des Kreisbogens $\overset{\frown}{AB}$ wird der Winkel $\angle(g^*, g') = \frac{I}{k^2}$, wobei g' die entlang der Strecke AB verschobene Tangente und I den Inhalt des Kreissegmentes AB bedeuten (vgl. [6]). Die totale Krümmung des Bogens $\overset{\frown}{AB}$ ist

$$\Delta\alpha = \angle(g^*, g_B),$$

wobei g_B die Tangente im Punkt B bezeichnet. Da die Verschiebung winkeltreu ist, so einschließen die entlang des Bogens $\overset{\frown}{AB}$ verschobene Normale und die Normale in B auch den Winkel $\Delta\alpha$. Also $\Delta\alpha = \frac{I}{k^2} + 2\beta$ ist, wobei β diejenige Winkel bezeichnet, die die Sehne AB und die Tangente g_A bzw. g_B einschließen. Daraus folgt, daß der Satellit mit $\Delta\alpha$ in der Richtung des Umlaufes — zwischen A und B — sich drehen soll. Bezeichnen $\Delta\psi$ den Zentriwinkel des Bogens $\overset{\frown}{AB}$, und ω bzw. ω^* die Winkelgeschwindigkeiten des Umlaufes bzw. der Selbstdrehung des Satellits, so erhalten wir $\omega = \frac{\Delta\psi}{\Delta t}$ bzw. $\omega^* = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$. Da $I = k^2(\Delta\psi \cosh\frac{r}{k} - 2\beta)$ gilt (vgl. [6] S. 293), so besteht $\Delta\alpha = \Delta\psi\cosh\frac{r}{k}$. Also zwischen ω und ω^* die folgende Beziehung gilt: $\omega^* = \omega\cosh\frac{r}{k}$. Es ist leicht zu ersehen, daß (wegen $r > 0$) $\omega^* = \frac{2\pi}{\tau} > \omega = \frac{2\pi}{T}$ und $\tau < T$, wobei τ bzw. T die Zeit der Selbstdrehung bzw. des Umlaufes bezeichnet.

Wir setzen voraus, daß die Bahngeschwindigkeit $\nu =$ konstant ist. Wir erhalten $\nu\Delta t = \Delta s$, wobei $\Delta s = k\Delta\psi\sinh\frac{r}{k}$ die Bogenlänge von $\overset{\frown}{AB}$ ist (vgl. [3] S. 89, [4] S. 99, [5] S. 184). Es ergibt sich für die Winkelgeschwindigkeit $\omega^* = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \nu\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \nu\frac{\Delta\psi\cosh\frac{r}{k}}{k\Delta\psi\sinh\frac{r}{k}} = \frac{\nu}{k}\coth\frac{r}{k}$, was aber ν-mal die Krümmung K_k eines Kreises vom Radius r wird (vgl. [6] S. 293).

Einfache Rechnung gibt für die Drehzeit τ des Satellits $\tau = \frac{k2\pi}{\nu\coth\frac{r}{k}}$, folglich — wegen $\coth\frac{r}{k} > 1$ — $\tau < \frac{k2\pi}{\nu}$ gilt.

Man sieht auf Grund der Gleichung $\Delta\alpha = \Delta\psi\cosh\frac{r}{k}$, daß eine vollständige Drehung des Satellits zum Zentriwinkel $\psi_0 = \frac{2\pi}{\cosh\frac{r}{k}}$ gehört, und für die zu ihm gehörigen Bogenlänge $s_0 = k2\pi\tanh\frac{r}{k} = \frac{2\pi}{K_k}$ besteht.

Die zentripetale Beschleunigung des Satellits ergibt sich, wenn man die Bahngeschwindigkeit ν auf die aus dem Punkt B ausgehenden Halbgeraden g^* und g_B – in einer maßstäblichen Skizze – abträgt (Abb. 2), und das erhaltene Dreieck BXY betrachtet. Bezeichne Δy die Strecke XY. Man erhält auf Grund der Trigonometrie

$$(*)\quad \sinh\frac{\Delta y}{2k} = \sinh\frac{\nu}{k}\sin\frac{\Delta\alpha}{2}$$

bzw.

$$\sinh\frac{\Delta y}{2k} = \sinh\frac{\nu}{k}\sin\left(\frac{1}{2}\psi\cosh\frac{r}{k}\right).$$

Die Größe der zentripetalen Beschleunigung wird $a_z = \lim\frac{\Delta y}{\Delta t}$, falls Δt bzw. $\Delta\alpha$ gegen 0 strebt.

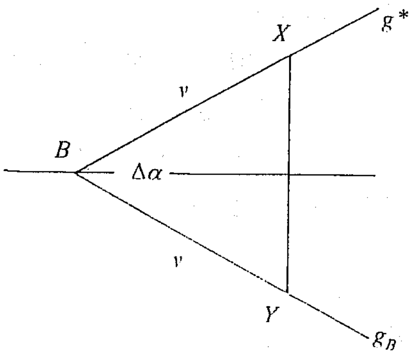

Abbildung 2

Aus $(*)$ folgt:

$$\frac{\frac{\Delta y}{2k}}{\Delta t}\,\frac{\sinh\frac{\Delta y}{2k}}{\frac{\Delta y}{2k}} = \sinh\frac{\nu}{k}\,\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\Delta\psi\cosh\frac{r}{k}\right)}{\frac{1}{2}\Delta\psi\cosh\frac{r}{k}}\,\frac{1}{2}\,\frac{\Delta\psi\cosh\frac{r}{k}}{\frac{k}{\nu}\Delta\psi\sinh\frac{r}{k}}.$$

Da $\lim\limits_{x=0}\frac{\sin x}{x} = 1$ und $\lim\limits_{x=0}\frac{\sinh x}{x} = 1$, und die Krümmung des Kreises vom Radius r $K_k = \frac{1}{k}\coth\frac{r}{k}$ ist, die folgenden Formeln ergeben sich für die zentripetalen Beschleunigung:

$$a_z = \nu\sinh\frac{\nu}{k}\coth\frac{r}{k} \quad \text{bzw.} \quad a_z = k\nu\sinh\frac{\nu}{k}K_k.$$

b) Einfache Satellitbewegung auf einem Grenzkreis (Horozykel).

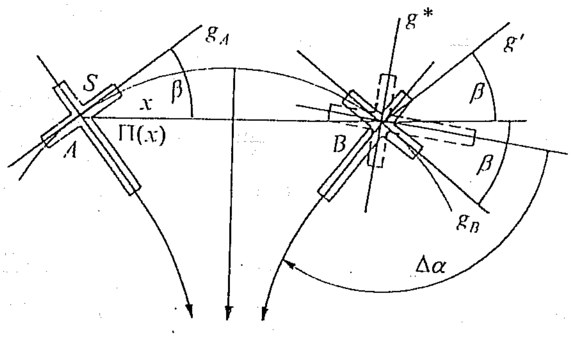

Abbildung 3

In diesem Fall können wir uns vorstellen, daß der Planet am Rand der „hyperbolischen Milchstraße" oder des „Galaxis" liegt. Hier kann die Winkelgeschwindigkeit des Umlaufes nicht erklärt werden. Die Bahngeschwindigkeit sei $\nu =$ konst., und die weiteren Daten der Bewegung ergeben sich mit der Bezeichnungen der Abb. 3 auf analoge Weise, wie vorher. So gelten die folgenden Gleichungen:

$$\nu \Delta t = \Delta s = 2k \sinh \frac{x}{k} \quad \text{und} \quad \Delta\alpha = 2 \sinh \frac{x}{k}$$

(vgl. [6] 293–294; [1] bzw. in [2] Bolyai §. 32, V. S. 32; [4] S. 106; [5] S. 187) Daraus folgt

$$\omega^* = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \nu \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\nu}{k},$$

d.h. die Winkelgeschwindigkeit der Selbstdrehung des Satellits ist ν-mal die Krümmung $K_g = \frac{1}{k}$ des Grenzkreises.

Die Drehungszeit des Satellits wird $\tau = \frac{k2\pi}{\nu}$, und es ist leicht zu ersehen, daß eine vollständige Drehung des Satellits zur Länge s_0 des Umgangsbahn gehört, wobei $s_0 = k2\pi = \frac{2\pi}{K_g}$.

Die „zentripetale" Beschleunigung ist auch auf Grund der Abb. 2, nach $(*)$ berechnenbar. Es gilt

$$\sinh \frac{\Delta y}{2k} = \sinh \frac{\nu}{k} \sin \left(\sinh \frac{x}{k} \right),$$

und so

$$\frac{\frac{\Delta y}{2k}}{\Delta t} \frac{\sinh \frac{\Delta y}{2k}}{\frac{\Delta y}{2k}} = \sinh \frac{\nu}{k} \frac{\sin \left(\sinh \frac{x}{k} \right)}{\sinh \frac{x}{k}} \frac{\sinh \frac{x}{k}}{\frac{2k}{\nu} \sinh \frac{x}{k}}.$$

Die „zentripetale" Beschleunigung a_z ist durch $\lim \frac{\Delta y}{\Delta t}$ bestimmt, falls Δt und als auch Δy bzw. x gegen 0 strebt. Wir erhalten

$$a_z = \nu \sinh \frac{\nu}{k} \quad \text{bzw.} \quad a_z = k\nu \sinh \frac{\nu}{k} K_g.$$

c) Einfache Satellitbewegung auf einem Hyperzykel vom Abstand l.

Dieser Fall kann sich so vorgestellt werden, daß der Planet des Satellits außer der „Milchstraße" oder dem „Galaxis" liegt. Die Winkelgeschwindigkeit des Umlaufes kann hier auch nicht erklärt werden. Die Bahngeschwindigkeit sei $\nu =$ konst., und die Folgenden ergeben sich mit der Bezeichnungen der Abb. 4 auf ähnliche Weise, wie vorher. Man kann schreiben

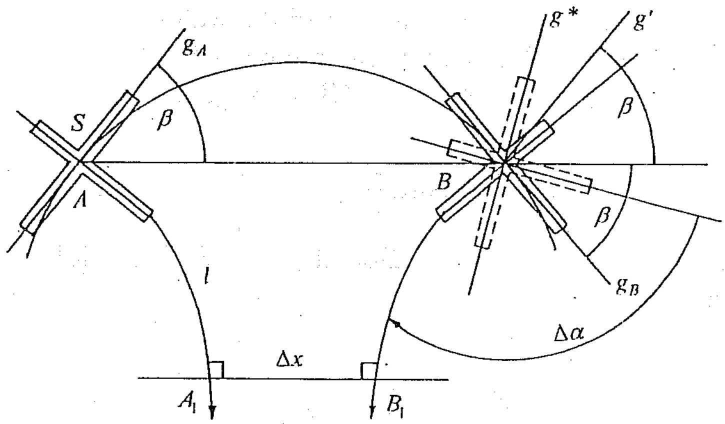

Abbildung 4

$$\nu\Delta t = \Delta s = \Delta x \cosh\frac{l}{k} \quad \text{und} \quad \Delta\alpha = \frac{1}{k}\Delta x \sinh\frac{l}{k}$$

(vgl. [6] 294–295; [3] S. 95; [4] S. 119; [5] S. 184 und 243), wobei Δx die auf der Grundlinie liegende, zum Bogen $\overset{\frown}{AB}$ des Hyperzykels gehörige Strecke A_1B_1 bedeutet. Die Winkelgeschwindigkeit der Selbstdrehung ω^* ist damit

$$\omega^* = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \nu\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\nu}{k}\tanh\frac{l}{k}.$$

Das ist genau ν-mal die Krümmung eines Hyperzykels vom Abstand l wobei die Krümmung in der Form $K_h = \frac{1}{k}\tanh\frac{l}{k}$ aufgeschrieben werden kann (vgl. [6] S. 295). Die Drehungszeit τ des Satellits wird $\tau = \frac{k2\pi}{\nu\tanh\frac{l}{k}}$, und, wegen $\tanh\frac{l}{k} < 1$, die Ungleichung $\tau > \frac{k2\pi}{\nu}$ gilt. In der Bewegung gehört eine vollständige Selbstdrehung des Satellits zu einem Bogen, dessen Projektion auf der Grundlinie eine Strecke x_0 ist:

$$x_0 = \frac{k2\pi}{\sinh\frac{l}{k}}.$$

Die zur x_0 gehörige Bogenlänge ist

$$s_0 = k2\pi\coth\frac{l}{k} = \frac{2\pi}{K_h}.$$

Zur Bestimmung der „zentripetalen" Beschleunigung können die folgenden Gleichungen auf Grund der Abb. 2 und $(*)$ zu diesem Fall aufgeschrieben werden:

$$\sinh\frac{\Delta y}{2k} = \sinh\frac{\nu}{k}\sin\left(\frac{\Delta x}{2k}\sinh\frac{l}{k}\right),$$

bzw.

$$\frac{\frac{\Delta y}{2k}}{\Delta t}\frac{\sinh\frac{\Delta y}{2k}}{\frac{\Delta y}{2k}} = \sinh\frac{\nu}{k}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2k}\sinh\frac{l}{k}\right)}{\frac{\Delta x}{2k}\sinh\frac{l}{k}}\frac{\frac{\Delta x}{2k}\sinh\frac{l}{k}}{\frac{\Delta x}{\nu}\cosh\frac{l}{k}}.$$

Die Größe der „zentripetalen" Beschleunigung wird $a_z = \lim\frac{\Delta y}{\Delta t}$, falls Δt und als auch Δy bzw. Δx gegen 0 strebt. So ergibt sich

$$a_z = \nu\sinh\frac{\nu}{k}\tanh\frac{l}{k} \quad \text{bzw.} \quad a_z = k\nu\sinh\frac{\nu}{k}K_h.$$

Zusammengesetzte Satellitbewegung

Es ist leicht zu ersehen, daß der Satellit, der keine Selbstdrehung hat, seinen Planeten mit demselben Strahl periodisch sehen kann. Diese Perioden entsprechen — in alle drei Fällen — den Bogenlängen s_0 der Umläufe. Jetzt wollen wir erst solche periodische Bewegungen betrachten, wobei die Bahnkurve ein Kreis vom Radius r ist, und der Satellit m vollständige Selbstdrehungen macht, inzwischen er einen zum Zentriwinkel $\Delta\psi = \frac{2\pi}{n}$ gehörigen Bahnbogen durchläuft. Man muß hier zwischen zwei Fällen Unterschied machen:

1) Die Drehrichtung und die Umlaufrichtung stimmen (z.B. mit der Uhrzeugerbewegung) überein: *avancierte* Winkelgeschwindigkeit (Abb. 5 a).

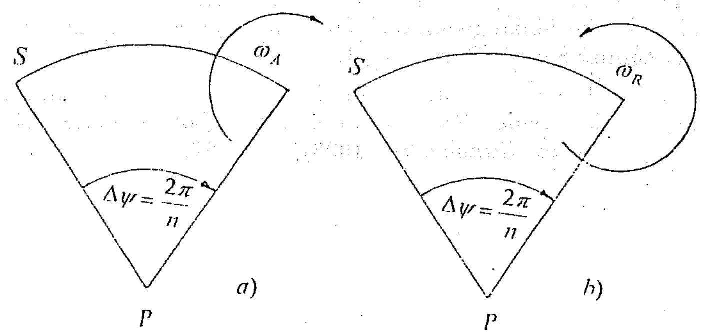

Abbildung 5

2) Die Drehrichtung und die Umlaufrichtung sind entgegengesetzt: *retardierte* Winkelgeschwindigkeit (Abb. 5 b).

Es ergibt sich unmittelbar, daß $\Delta t = \frac{T}{n}$ und $\Delta\alpha = \frac{2\pi}{n}\cosh\frac{r}{k}$.

Im ersten Fall soll der Satellit sich mit dem Winkel $m2\pi + \Delta\alpha$ während Δt umdrehen. Die avancierte Winkelgeschwindigkeit ω_A ist

$$\omega_A = \frac{m2\pi + \Delta\alpha}{\frac{T}{n}} = \omega\Big(mn + \cosh\frac{r}{k}\Big),$$

wobei $\omega = \frac{2\pi}{T}$ die Winkelgeschwindigkeit des Umlaufes ist.

Im zweiten Fall dreht der Satellit sich mit dem Winkel $m2\pi - \Delta\alpha$ während Δt um. Die retardierte Winkelgeschwindigkeit ω_R ist

$$\omega_R = \frac{m2\pi - \Delta\alpha}{\frac{T}{n}} = \omega\Big(mn - \cosh\frac{r}{k}\Big).$$

Literatur

[1] BOLYAI, J.: Appendix Scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate axiomatis XI Euclidei a priori haud unquam decidenda, independentem: adiecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.

[2] BONOLA, R.: Non-Euclidean geometry, a critical and historical study of its developments. With a supplement containing the George Bruce Halsted translations of “The science of absolute space” by John Bolyai and “The theory of parallels” by Nicholas Lobachevski, Dover Publications, Inc., New York, 1955.

[3] LIEBMANN, H.: Nichteuklidische Geometrie, Zweite neubearbeitete Auflage, Sammlung Schubert, No. 49, G. J. Göschen’sche Verlagshandlung G.m.b.H., Berlin und Leipzig, 1912.

[4] PERRON, O.: Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene, Math. Leitfäden B. G. Teubner Vlg., Stuttgart, 1962.

[5] SZÁSZ, P.: Bevezetés a Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometriába [Introduction to Bolyai–Lobachevskian geometry], Disquisitiones Mathematicae Hungaricae, No. 5, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973.

[6] VERMES, I.: Über die synthetische Behandlung der Krümmung und des Schmiegzykels der ebenen Kurven in der Bolyai–Lobatschefskyschen Geometrie, *Studia Sci. Math. Hungar.* **28** (1993), 289–297.