

EBENE BÉZIERKURVEN 3. ORDNUNG: EINIGE GEOMETRISCHE ÜBERLEGUNGEN

Johann Lang

*Institut für Geometrie, Technische Universität, Kopernikusgasse
24, A-8010 Graz, Österreich*

Herrn Prof. Dr. Hans Vogler zum 60. Geburtstag gewidmet

Received October 1994

MSC 1991: 51 N 15, 68 K 05

Keywords: Bézier curves, rational curves of order 3.

Abstract: A geometrical point of view outlines the connections between the control polygon of a plane Bézier curve of third order and its shape (singularities). Many results on such curves appear more obvious treating with geometric properties of cubic parabolas in 3-space.

1. Einleitung

Ebene Bézierkurven 3. Ordnung sind ebene rationale Kurven 3. Grades und liefern eine Vielfalt von Formen (siehe etwa H. Wieleitner [11]), die vor allem durch die Singularitäten gekennzeichnet sind. Um die einzelnen dieser Typen aber gezielt aus geeigneten Kontrollpolygonen zu erhalten oder zu vermeiden, benötigt man eine genaue Kenntnis des Zusammenhanges zwischen dem Kontrollpolygon und den Formen der Bézierkurve selbst. A.R. Forrest [5], Liu, D. und Su, B. [7], M.C. Stone/T.D. DeRose [9] und C.Y. Wang [10] haben interessante Kriterien für das Auftreten solcher Singularitäten angegeben und sogenannte *charakteristische Diagramme* beschrieben. In der vorliegenden Arbeit soll eine geometrische Herleitung solcher Bedingungen aus bekannten Eigenschaften kubischer Parabeln und ebener Kurven 3. Ordnung den Zusammenhang zwischen diesen Kurven und den schon in [5], [7], [9]

und [10] gefundenen Resultaten beleuchten.

Auf diese Weise ist es leicht möglich einzusehen, warum die gefundenen Zusammenhänge bestehen: Neben dieser Einsicht ergibt sich auch eine genauere Aussage über die Lage der Singularitäten, was besonders im Falle der Doppelpunkte auffällt: Wir können die Beziehung zwischen dem Kontrollpolygon der Kubik und der Lage des Doppelpunktes herstellen.

Je zwei Raumkurven 3. Ordnung des projektiv abgeschlossenen Anschauungsraumes sind projektiv äquivalent (siehe etwa H. Brauner [1b, 195ff.], K. Fladt und A. Baur [4]). Je zwei Bézierkurven 3. Ordnung sind sogar affin äquivalent: Es handelt sich dabei um *kubische Parabeln*, also um Kubiken, deren Fernpunkte zusammenfallen, sodaß die Fernebene Schmiegeebene der Kurve in ihrem Fernpunkt ist (siehe E. Müller und J. Krames [8, 229ff.]). Dies hat zur Folge, daß jede ebene Bézierkurve 3. Ordnung als Projektion einer geeigneten *Normkubik* gedeutet werden kann.

Wir stellen uns den affinen Raum \mathcal{A}_3 projektiv abgeschlossen und komplex erweitert vor. Die Koordinaten bezüglich eines affinen Koordinatensystems $\Sigma = \{O; P_0, P_1, P_2\}$ in \mathcal{A}_3 bezeichnen wir mit $(x/y/z)$. Das zugehörige projektive Koordinatensystem besitzt den Ursprung O und die Fernpunkte der Koordinatenachsen als Grundpunkte. Für eigentliche Punkte $X \dots (x/y/z)$ und ihre projektiven Koordinaten $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ gilt:

$$1 : x : y : z = x_0 : x_1 : x_2 : x_3.$$

Wir werden diese Koordinatensysteme bei den folgenden Berechnungen verwenden, aber stets darauf achten, daß die Resultate in affininvarianter Weise gedeutet werden.

Das Polygon $P_0P_1P_2P_3$ mit $P_0 \dots (0/0/0)$, $P_1 \dots (1/0/0)$, $P_2 \dots (0/1/0)$, $P_3 \dots (0/0/1)$ kann durch eine geeignete Affinität in jedes beliebige nichtebene Viereck übergeführt werden.

Die Bézierkurve k , welche durch das Kontrollpolygon $P_0P_1P_2P_3$ ($P_i \dots \mathbf{p}_i$, $i = 0, 1, 2, 3$) bestimmt ist, hat die Darstellung

$$(1) \quad \mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} (1-t)^i t^{3-i} \mathbf{p}_i = \begin{pmatrix} 3t(1-t)^2 \\ 3t^2(1-t) \\ t^3 \end{pmatrix}$$

Sie hängt in affininvarianter Weise vom Kontrollpolygon $P_0P_1P_2P_3$ ab. Jede räumliche Bézierkurve 3. Ordnung ist zu k affin.

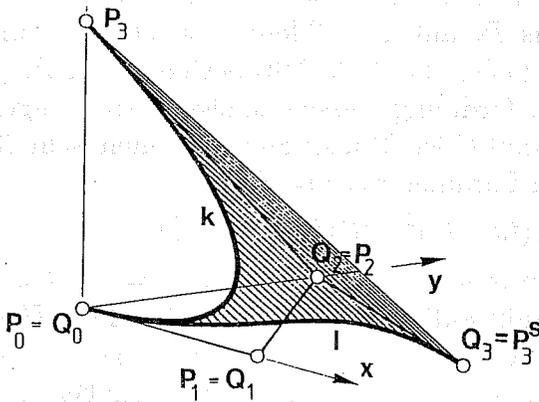


Fig. 1
Eine ebene Bézierkurve als Parallelprojektion einer räumlichen Bézierkurve 3. Ordnung

Wir betrachten nun eine ebene Bézierkurve l der Ordnung 3: Ihre Trägerebene sei die xy -Ebene π , ihr Kontrollpolygon $Q_0Q_1Q_2Q_3$. Der Fall, daß alle Punkte Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 auf einer Geraden liegen, ist nicht von Interesse. Liegen die Punkte Q_0, Q_1, Q_2 kollinear, so kehren wir die Nummerierung um. Liegen neben Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 auch noch die Punkte Q_1, Q_2, Q_3 kollinear, so muß $Q_1 = Q_2$ gelten.

Wir wollen also davon ausgehen, daß $Q_0Q_1Q_2$ ein Dreieck ist. Neben der ebenen Bézierkurve l mit dem Kontrollpolygon $Q_0Q_1Q_2Q_3$ betrachten wir die räumliche Bézierkurve k (Kontrollpolygon $P_0P_1P_2P_3$), wobei wir $Q_0 = P_0, Q_1 = P_1, Q_2 = P_2$ voraussetzen. Eine Parallelprojektion auf die Ebene $\pi = Q_0Q_1Q_2$, welche P_3 in $P_3^s = Q_3$ überführt, führt auch k in l über. l ist also durch Parallelprojektion der Normkubik k erhältlich. Die Sehstrahlrichtung ist durch Q_3P_3 gegeben: Das Zentrum der Parallelprojektion ist der Fernpunkt Z_u , welcher als Durchstoßpunkt der Geraden Q_3P_3 mit der Fernebene ω gegeben ist. k ist eine kubische Parabel (siehe E. Müller und J. Krames [8]). Die Tangentenfläche Γ der Raumkurve k ist eine algebraische Fläche der Ordnung 4. Die Ebene π ist ebenso wie die Ebene $Q_1Q_2P_3$ eine Schmiegeebene von k . Dasselbe gilt für die Fernebene ω . Der einzige Fernpunkt von k ist gegeben durch

$$U \dots (0 : 3 : -3 : 1).$$

2. Reduktion der Ordnung

Die Reduktion der Ordnung einer Bézierkurve (siehe etwa J. Hoschek und D. Lasser [6, 134]) können wir nun geometrisch beschreiben: Die Parallelprojektion l einer Raumkurve 3. Ordnung k ist eine ebene

Kurve 3. Ordnung, es sei denn das Projektionszentrum Z_u gehört k an. Dies ist genau dann der Fall, wenn $Z_u = U$ ist, also wenn Q_3 die Parallelprojektion von U aus P_3 auf die Bildebene π ist. Q_3 muß in diesem Fall die Koordinaten $(x/y/z) = (-3/3/0)$ besitzen. Der Projektionskegel ist ein Zylinder 2. Ordnung, dessen einzige Fernerzeugende die Tangente an k im Fernpunkt U ist. Um sie zu bestimmen, schreiben wir (1) auf einen homogenen Parameter $t_1 : t_0 = t$ um:

$$\mathbf{x}(t) = (t_0^3 : 3t_1(t_0 - t_1)^2 : 3t_1^2(t_0 - t_1) : t_1^3).$$

Die partiellen Ableitungsvektoren an der Stelle $t_0 : t_1 = 0 : 1$ spannen die Tangente im Fernpunkt auf; sie lauten $(0, -3, 3, -1) \dots U$ und $(0, -2, 1, 0)$. Die Gleichung der Fernerzeugenden ist also gegeben durch $x_0 = x_1 + 2x_3 + 3x_2 = 0$. Ihr Schnitt mit der Ebene π ist der Fernpunkt $W \dots (0 : -2 : 1 : 0)$. Affinvariant formuliert bedeutet das (siehe Figur 2):

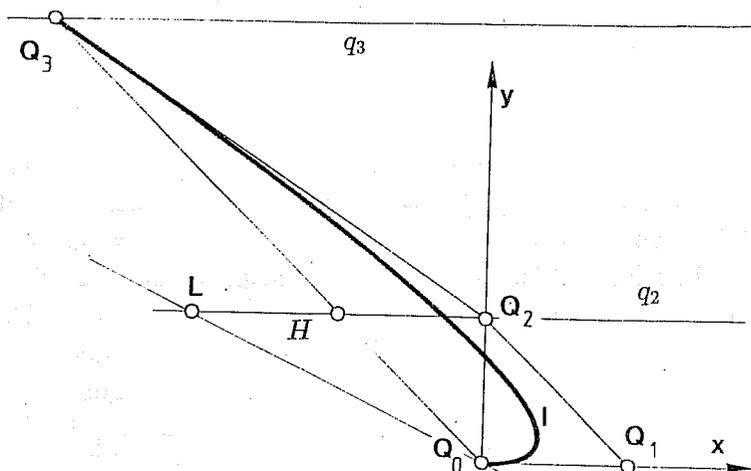


Fig. 2

Reduktion der Ordnung

Satz 1. Sei $Q_0Q_1Q_2$ ein Dreieck in der Ebene π . H sei jener Punkt der Ebene π , der $Q_0Q_1Q_2$ zu einem Parallelogramm $Q_0Q_1Q_2H$ ergänzt. Es gilt: Das Kontrollpolygon $Q_0Q_1Q_2Q_3$ bestimmt genau dann als Bézierkurve eine Kurve l von geringerer als dritter Ordnung, wenn Q_3 auf der Geraden Q_0H liegt und das Teilverhältnis $(Q_0, H; Q_3) = \frac{3}{2}$ bestimmt. l ist dann stets eine Parabel. Auf der Geraden Q_2H liegt ein Punkt L ,

welcher das Teilverhältnis $(Q_2, H; L) = 2$ bestimmt. Die Achsenrichtung von l ist gegeben durch die Gerade Q_0L .

Gegeben seien die Punkte Q_0, Q_1 in π_1 . Sucht man zu jedem Punkt Q_2 der Ebene jenen Punkt Q_3 , für den das Kontrollpolygon $Q_0Q_1Q_2Q_3$ eine Parabel als Bézierkurve liefert (siehe Figur 2), so erhält man eine Punktabbildung der Ebene auf sich. Diese Abbildung ist eine perspektive Affinität mit der Achse $q_{01} = Q_0Q_1$. Eine Anschlußbedingung für Béziersplines legt folgende Aufgabe nahe: Gegeben seien die Punkte Q_0, Q_1 . Die Gerade q_2 sei parallel zu Q_0Q_1 . Gesucht sind alle Punkte Q_3 , welche in dem oben angegebenen Sinn als Bilder von Punkten $Q_2 \in q_2$ auftreten.

Die Punkte liegen also auf einer weiteren Q_0Q_1 -parallelen Geraden q_3 , sodaß $(a, q_2; q_3) = \frac{3}{2}$ gilt. Entsprechende Punkte $X_2 \in q_2$ und $X_3 \in q_3$ haben parallele Verbindungsgeraden. Je zwei solcher Vierecke $Q_0Q_1X_2X_3$ und $Q_0Q_1Y_2Y_3$ gehen durch eine affine Scherung mit der Achse a auseinander hervor. Dieselbe Scherung führt die zugehörigen Parabeln l_X und l_Y ineinander über.

3. Spitzen

Die Deutung der ebenen Bézierkurven l als Parallelprojektion einer Raumkurve erlaubt auch eine einfache geometrische Beschreibung jener Kontrollpolygone, die auf Spitzen von l führen. Der Schnitt der Tangentenfläche Γ der Kubik k mit einer Schmiegebene (durch den Gratpunkt G) von k zerfällt in eine (doppelt zu zählende) Gerade — das ist die Tangente in G — und eine Kegelschnittslinie. Zu den Schmiegeebenen der kubischen Parabel k gehören auch die Ebene π und die Fernebene ω .

Wir schneiden Γ mit π und nennen die so entstehende Kegelschnittslinie s . Sie wird von allen Spurpunkten der Kurventangenten von k durchlaufen.

$$(2) \quad \mathbf{x}(t) = (2t(1-t)/t^2/0)$$

ist eine Parameterdarstellung von s . Daraus erhalten wir die Gleichung

$$(3) \quad x^2 + 4y^2 + 4xy - 4y = 0.$$

Es handelt sich um eine Parabel. Der Fernpunkt $V \dots (0 : 2 : -1 : 0)$ ist der Schnittpunkt der Fernerzeugenden von Γ mit der Ebene π .

Der Kegelschnitt, der auf Γ und der Schmiegebene ω (Fernebene) liegt, heiße k_u . Er wird von allen Fernpunkten der Kurventangenten

von k gebildet. Eine Parameterdarstellung von k_u ist

$$(4) \quad \mathbf{x}(t) = (0 : 1 - 4t + 3t^2 : 2t - 3t^2 : t^2),$$

eine Gleichung von k_u ist gegeben durch

$$(5) \quad x_0 = 0, \quad x_2^2 - 3x_3^2 - 2(2x_1 + x_2)x_3 = 0.$$

Diesen Kegelschnitt, der in der Fernebene ω liegt, projizieren wir aus dem Zentrum P_3 auf die Bildebene π . Wir erhalten den Kegelschnitt k_u^c :

$$(6) \quad \mathbf{x}(t) = \left(\frac{(3t-1)(1-t)}{t^2} / \frac{3t-2}{t} / 0 \right),$$

der auch durch die Gleichung

$$(7) \quad -4(x-1) - (y+1)^2 = 0$$

in π gegeben ist. Es handelt sich dabei um eine weitere Parabel.

Die Kurve k selbst besitzt keine Singularität. Die Parallelprojektion l der Raumkurve k hat genau dann eine Spitze, wenn eine der Kurventangenten projizierend ist. Dies ist dann der Fall, wenn das Zentrum Z_u auf k_u liegt. Jene Tangente von k , welche Z_u trifft, ist also zugleich ein Projektionsstrahl. Ihr Spürpunkt ist eine Spitze von l . Er liegt auf der Spurkurve s der Tangentenfläche Γ . Die Parallelprojektion von Z_u und k_u aus P_3 auf π liefert¹:

Satz 2. Die Bézierkurve l in π besitzt genau dann eine Spitze, wenn Q_3 auf der Parabel k_u^c liegt. Die Spitze liegt dann auf der Parabel s .

Um diese Bedingung für die Anwendung brauchbar zu machen, müssen wir k_u^c und s noch koordinatenunabhängig beschreiben (siehe Figur 3). Aus den Darstellungen (3) und (7) liest man ab:

s berührt Q_0Q_1 in Q_0 , Q_1Q_2 in Q_2 .

k_u^c ist ebenfalls eine Parabel, welche Q_1Q_2 in Q_2 berührt. Ergänzt man $Q_0Q_2Q_1$ zu einem Parallelogramm $Q_0Q_2Q_1R$, so ist R der Berührungspunkt einer weiteren Tangente RQ_1 . Die Achsenrichtung ist folglich durch die Diagonale Q_1Q_0 des angeführten Parallelogramms gegeben².

¹Die xy -Ebene entspricht dem in [9] beschriebenen *charakteristischen Diagramm*.

²In [9] heißt es, daß die *charakteristischen Diagramme* aus Gebieten bestehen, welche von Kegelschnittlinien und Geraden voneinander getrennt werden. Die oben angestellten Überlegungen manchen klar, warum dies so ist.

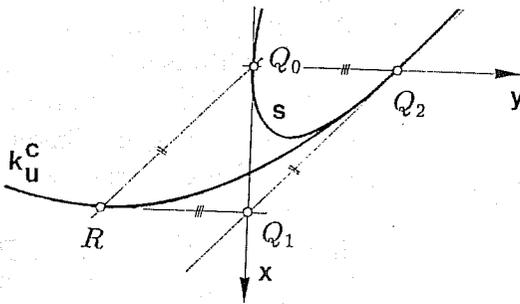


Fig. 3

Die Kegelschnittslinien k_u^c und s .

Wählt man also Q_3 auf k_u^c , so besitzt l eine Spitze auf s . Der Punkt Q_2 teilt diese Parabel in zwei Abschnitte. Damit die Spitze im für eine Bézierkurve interessanten Parameterbereich $[0, 1]$ liegt, muß Q_3 in jenem Abschnitt liegen, dem auch R angehört. Die entsprechende Spitze auf s ergibt sich dann im Abschnitt zwischen Q_0 und Q_2 .

Wir interessieren uns nun für die Beziehung zwischen den Punkten Q_3 auf k_u^c und den entsprechenden Spitzen S auf s . Gemäß (6) und (2) betrachten wir die Abbildung

(8)

$$\sigma: \mathbf{x}_u^c(t) = (t^2 : (3t-1)(1-t) : t(3t-2) : 0) \rightarrow \mathbf{s}(t) = (1 : 2t(1-t) : t^2 : 0).$$

Es handelt sich um eine Projektivität zwischen den Kegelschnitten k_u^c und s . Nach dem zweiten Erweiterungssatz für Kollineationen aus der projektiven Geometrie (siehe H. Brauner I [1a, 66f.]) läßt sich σ eindeutig zu einer projektiven Autokollineation κ der Ebene π fortsetzen. Diese Kollineation ist etwa durch folgende vier Punktepaare festgelegt:

$$(9) \quad \begin{array}{ll} (0 : 1 : 0 : 0) \rightarrow (1 : 0 : 0 : 0) \\ Q_2 = (1 : 0 : 1 : 0) \rightarrow Q_2 = (1 : 0 : 1 : 0) \\ (1 : 1 : -1 : 0) \rightarrow \left(1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : 0\right) \\ (1 : -3 : 3 : 0) \rightarrow (0 : -2 : 1 : 0) \end{array}$$

Die Abbildungsgleichungen dieser projektiven Kollineation sind gegeben durch

$$(10) \quad \begin{array}{l} x'_0 = 3x_0 - x_1 - 2x_2 \\ x'_1 = x_0 - x_2 \\ x'_2 = x_0 \end{array}$$

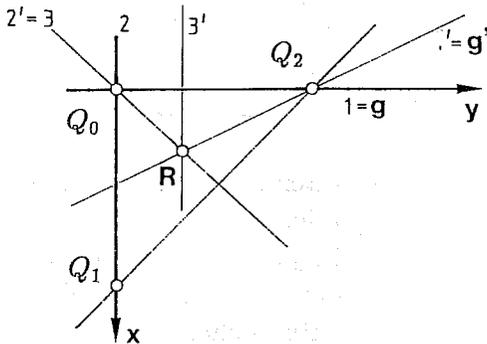


Fig. 4

Vervollständigen der Kollineation κ

Der Punkt Q_2 ist der einzige Fixpunkt von κ . Die Autoprojektivität π_{Q_2} , welche im Strahlbüschel $Q_2(x)$ induziert wird, ist parabolisch mit der einzigen Fixgeraden Q_1Q_2 . Diese Gerade ist auch die einzige Fixgerade der Kollineation κ . Das Bild der Parabel k_u^c ist die Parabel s . Man beachte aber, daß κ keine Affinität ist. π_{Q_2} läßt sich in der Form

$$(11) \quad \pi_{Q_2} : x \dots - \lambda x_0 + x_1 + \lambda x_2 = 0 \rightarrow x' \dots x_0 + (\lambda - 2)x_1 - x_2 = 0$$

darstellen. Der Geraden $g \dots x_1 = 0$ ($\lambda = 0$) entspricht $g' \dots x_0 - 2x_1 - x_2 = 0$ (siehe Figur 4). Zusammen mit der Fixgeraden ($\lambda = 1$) $Q_0Q_1 \dots x_0 - x_1 - x_2 = 0$ ist die parabolische Projektivität dadurch eindeutig festgelegt.

Das Strahlbüschel $Q_0(x)$ geht bei κ in das Strahlbüschel $R(x')$ mit $R = (1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{3} : 0)$ über. Die in Figur 4 eingetragenen Geradenpaare sind

$$(12) \quad \pi_{Q_0} : \begin{cases} Q_0Q_2 = 1 & \rightarrow RQ_2 = 1' \\ Q_0Q_1 = 2 & \rightarrow RQ_0 = 2' \\ Q_0R = 3 & \rightarrow RU = 3' \dots x_0 - 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Mit Hilfe der Projektivitäten π_{Q_2} und π_{Q_0} läßt sich die Kollineation κ einfach vervollständigen.

Satz 3. Die Abbildung, die einem Punkt $Q_3 \in k_u^c$ die Spitze der zum Kontrollpolygon $Q_0Q_1Q_2Q_3$ gehörigen Bézierkurve zuweist, kann in eine projektive Kollineation κ eingebettet werden, welche durch die Vierecke (9) oder auch durch die Projektivitäten (11) und (12) festgelegt ist und vervollständigt werden kann.

Für die Anwendung ist es von Bedeutung sein, zu einer vorgegebenen Spitze $S \in s$ (Gleichung (2)) den dazugehörigen Kontrollpunkt

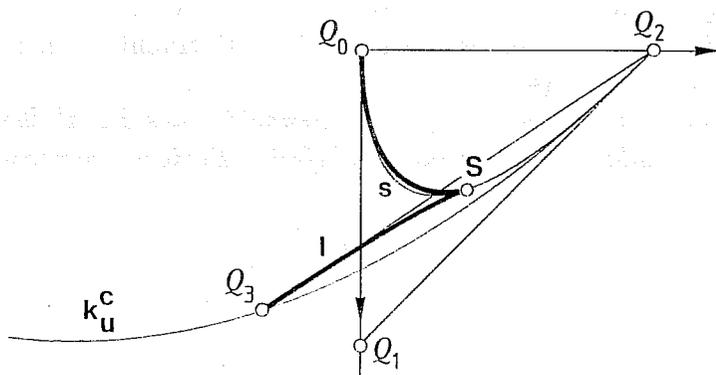


Fig. 5

Ebene Bézierkurve 3. Ordnung mit Spitze

Q_3 zu finden. Dazu ist κ^{-1}

$$(13) \quad \kappa^{-1} : \begin{cases} x_0 = & x'_2 \\ x_1 = -x'_0 + 2x'_1 + x'_2 \\ x_2 = & -x'_1 + x'_2. \end{cases}$$

auf S anzuwenden: $\kappa^{-1}(S) = Q_3$. Die Spitzentangente berührt den Kegelschnitt s .

Figur 5 zeigt ein Beispiel einer Bézierkurve mit Spitze.

4. Wendepunkte

Die bekannte *variation diminishing property* (siehe etwa J. Hoschek und D. Lasser [6, 131]) für Bézierkurven führt unter anderem zu folgender Eigenschaft: Wird ein (ebenes) Kontrollpolygon von keiner Geraden der Ebene in mehr als zwei Punkten geschnitten, so hat die zugehörige Bézierkurve keinen Wendepunkt.

Diese Bedingung ist aber keineswegs notwendig für das Fehlen von Wendepunkten eines Bézierkurvenstücks. Die Erzeugung von l als Parallelprojektion einer kubischen Parabel k erlaubt eine deutliche Verschärfung. Da k selbst keine Wendepunkte besitzt, können Wendepunkte der Projektion $l = k^s$ nur von projizierenden Schmiegeebenen von k herrühren. Die Schmiegeebenen bilden aber die Tangentialebenen der Torse Γ , ihre Ferngeraden sind genau die Tangenten der Fernkurve k_u . Das Zentrum Z_u der Parallelprojektion liegt genau dann auf einer Tangente an k_u , wenn $Q_3 = Q_3^s$ auf einer Tangente von k_u^c liegt (wobei die

Betrachtung der beiden Kurven naturgemäß auf den Parameterbereich $[0, 1]$ (siehe (4) und (6)) eingeschränkt bleibt). Betrachten wir nur reelle Wendepunkte, so gilt also:

Satz 4. Genau dann, wenn Q_3 im Innengebiet des Parabelbogens k_u^c gewählt wird, ergibt sich ein wendepunktfreies Bézierkurvenstück.

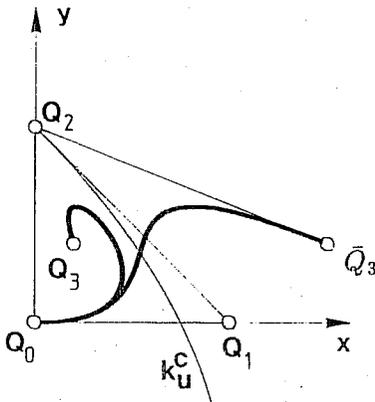


Fig. 6
Bézierkurvenstück mit (ohne)
Wendepunkt

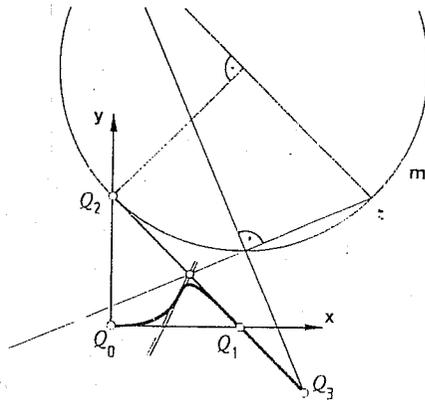


Fig. 7
Bestimmung des Wendetan-
gentenschnittpunktes für Q_3
auf Q_1Q_2

Figur 6 zeigt, daß damit die Bedingung deutlich verschärft wurde. Man kann auch einfach ablesen, für welche Punkte Q_3 zwei Wendepunkte auftreten: Genau dann treten beide Wendepunkte im betrachteten Parameterbereich auf, wenn Q_3 in dem von k_u^c und der Tangente Q_1Q_2 begrenzten Gebiet liegt (siehe Figur 6).

Die Kollineation κ führt nicht nur jeden Punkt Q_3 des Kegelschnitts k_u^c in die Spitze S der durch ihn bestimmten Bézierkurve l über, sondern beliebige Punkte Q_3 aus π in den Schnittpunkt der beiden (reellen oder konjugiert imaginären) Wendetangenten von l (l ist hierfür natürlich im gesamten Parameterbereich $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ zu betrachten). Damit einer der beiden möglichen Wendepunkte in den Endpunkt Q_3 selbst fällt, muß Q_3 auf der Tangente von k_u^c im Punkt Q_2 liegen, also mit Q_1 und Q_2 kollinear sein in Übereinstimmung mit den bekannten Eigenschaften für C^2 -Bézierspines. Die Einschränkung von κ auf die Gerade Q_1Q_2 ist eine parabolische Autoprojektivität auf der Fixgeraden Q_1Q_2 und liefert zu jedem Punkt Q_3 den Schnittpunkt von Q_1Q_2 mit

der zweiten Wendetangente. Da Q_2 selbst ein Fixpunkt ist, müssen die Gegenpunkte (Bildpunkt und Urbild des Fernpunkts der Geraden Q_1Q_2) symmetrisch zu Q_2 liegen. Der Fluchtpunkt ergibt sich als $F = (1 : 1 : 0 : 0) = Q_1$, der Verschwindungspunkt ist $(1 : -1 : 2 : 0)$. Die Projektivität läßt sich durch wenige Linien vervollständigen. Figur 7 gibt ein Beispiel. Der verwendete Kreis m ist unabhängig von $Q_3 = X$, berührt Q_1Q_2 in Q_2 und hat den Radius $\overline{Q_1Q_2}$.

4. Doppelpunkte

Genau dann, wenn ein Projektionsstrahl b die Kurven k in zwei (reellen oder komplexen) Punkten trifft, besitzt $k^s = l$ einen Doppelpunkt. Diese Geraden heißen *Bisekanten* von k . Die Bisekanten einer Raumkurve 3. Ordnung erfüllen eine Strahlkongruenz vom Bündelgrad 1 und vom Feldgrad 3 (siehe E. Müller und J. Krames [8, 43f.]). Also liegt jeder Punkt des Raumes, der nicht k selbst angehört, auf genau einer Bisekante. H. Brauner beschreibt die Abbildung, die von den Bisekanten einer Raumkurve vermittelt wird (siehe [2], [3]). Sie heiße β . Schränken wir diese Bisekantenprojektion auf die Fernebene ω ein, so erhalten wir: $\beta: \omega(X) \rightarrow \pi(X_\pi)$. Wir setzen sie mit der Zentralprojektion ζ aus P_3 aus π auf ω zusammen und erhalten eine Kopplung zwischen den Punkten $Q_3 = P_3^s$ und den zu erwartenden Doppelpunkten:

$$(14) \quad \beta \circ \zeta: \pi(X_u^c) \longrightarrow \pi(X_\pi)$$

Da β den Kegelschnitt k_u auf die Parabel s abbildet, entsprechen einander in (14) k_u^c und s .

Wir wollen nun zu der gegebenen Kubik k jene Bisekante finden, welche das vorgegebene Zentrum Z_u enthält. Dazu denken wir uns die räumliche Bézierkurve k erzeugt durch eine Kollineation zwischen den Ebenenbündeln mit Zentren $Q_0 = P_0$ und P_3 (siehe H. Brauner [2]):

Die Kubik k besitzt die Darstellung (1). Die Ebenen durch den Punkt $Q_0 = (1 : 0 : 0 : 0)$ sind durch Gleichungen der Form

$$(15) \quad x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0,$$

bestimmt, jene durch $P_3 = (1 : 0 : 0 : 1)$ lassen sich in der Form

$$(16) \quad x_0u'_0 + x_1u'_1 + x_2u'_2 + x_3u'_3 = 0, \quad \text{mit} \quad u'_0 + u'_3 = 0$$

darstellen. Eine Kollineation zwischen den beiden Ebenenbündeln $Q_0(\zeta)$ und $P_3(\zeta')$ erzeugt die Kubik k : Geraden aus $Q_0(x)$, welche mit ihren Bildgeraden aus $P_3(x')$ komplanar sind, schneiden diese in Punkten von

k . Die Bisekanten von k erhält man als die Schnittgeraden entsprechender Ebenen der beiden Bündel. Schneidet man die Ebene (15) mit der Kubik (1), so bleibt neben Q_0 selbst ($t = 0$) noch als Bedingung für die Parameterwerte t der Schnittpunkte:

$$(17) \quad t^2(u_1 - u_2 + u_3) + t(-2u_1 + u_2) + u_1 = 0.$$

Analog errechnet man für die Ebene (16):

$$(18) \quad t^2(-u'_1 + u'_2 + u'_3) + t(u'_1 + u'_3) + u'_3 = 0.$$

Ebenen, die einander bei der gesuchten Kollineation zwischen den beiden Bündeln entsprechen, führen auf dasselbe t -Parameterpaar. Ein Vergleich von (17) mit (18) liefert:

$$(19) \quad u_1 - u_2 + u_3 : -u'_1 + u'_2 + u'_3 = -2u_1 + u_2 : u'_1 + u'_3 = u_1 : u'_3.$$

Wir können also die Kollineation χ in den Ebenenkoordinaten so anschreiben:

$$(20) \quad \begin{aligned} u'_0 &= -u_1 \\ u'_1 &= -3u_1 + u_2 \\ u'_2 &= -3u_1 + u_3 \\ u'_3 &= u_1. \end{aligned}$$

Gehen wir von einem Fernpunkt $Z_u \dots (0 : f_1 : f_2 : f_3)$ aus und verlangen wir von einer Ebene $\varepsilon \in Q_0(\zeta)$, daß sowohl ε also auch das Bild $\chi(\varepsilon)$ mit Z_u inzidieren, so erhalten wir für die Koordinaten $(u_0 : u_1 : u_2 : u_3)$ der Ebene ε :

$$(21) \quad \begin{aligned} u_0 : u_1 : u_2 : u_3 &= \\ &= f_1^2 + 3f_1f_2 + 3f_2^2 - f_2f_3 : f_1f_3 - f_2^2 : \\ & : (f_2 + 3f_3)f_1 + 3f_2f_3 - f_3^2 : -(f_1^2 + 3f_1f_2 + 3f_2^2 - f_2f_3). \end{aligned}$$

Die Bildebene ε' erhalten wir aus (20). Der Schnitt der beiden Ebenen ε und ε' ist genau die Bisekante durch den Punkt Z_u , ihr Schnitt mit der Ebene π ergibt den Doppelpunkt $D \dots (d_0 : d_1 : d_2 : 0)$ der Kurve l . Er errechnet sich als:

$$(22) \quad \chi : \begin{cases} d_0 = f_3(f_1 + 2f_2 + 3f_3)^3 \\ d_1 = -(3f_1f_3 - f_2^2)(f_1f_2 + 9f_1f_3 + 9f_2^2) \\ d_2 = (3f_1f_3 - f_2^2)^2. \end{cases}$$

Um von einem Punkt $Q_3 \dots (x_0 : x_1 : x_2 : 0)$ auf den resultierenden Doppelpunkt zu gelangen, projiziert man Q_3 zuerst aus dem Zentrum P_3 in die Fernebene

$$(23) \quad (x_0 : x_1 : x_2 : 0) \rightarrow (0 : x_1 - x_0 : x_2 - x_0 : -x_0) =: (0 : f_1 : f_2 : f_3)$$

und wendet sodann die Abbildung χ an. Es handelt sich bei χ um eine algebraische Verwandtschaft von vierter Ordnung zwischen der Fernebene ω und der Ebene π . Sie läßt sich sogar als Hintereinanderausführung von zwei (quadratischen) Cremonatransformationen herstellen und ist folglich birational. Die Umkehrtransformation läßt sich auf dieselbe Weise erhalten, wobei man von einem Punkt $D \dots (d_0 : d_1 : d_2 : 0)$ in π ausgeht. Sie lautet:

$$(24) \quad \chi^{-1} : \begin{cases} f_1 = (3d_0d_1 + d_2^2)(9d_0(d_1 + d_2 - d_0) - d_1d_2) \\ f_2 = -3(3d_0d_1 + d_2^2)^2 \\ f_3 = 9(3d_1^2 + 11d_1d_2 + 12d_2^2)d_0^2 - 9(d_1^2 + 3d_1d_2 + 3d_2^2)d_0d_2 - \\ \quad 81(d_1 + 2d_2)d_0^3 + 81d_0^4 + d_1^2d_2^2 + 3d_1d_2^3 + 3d_2^4. \end{cases}$$

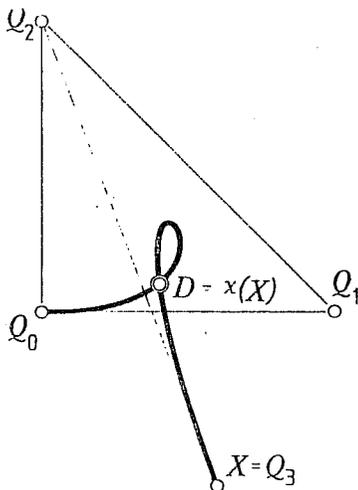


Fig. 8

Der Doppelpunkt einer ebenen Bézierkurve 3. Ordnung für Q_3 auf Q_1Q_2

Zu gegebenem Doppelpunkt D liefert χ^{-1} das zugehörige Projektionszentrum Z_u . Daraus erhält man durch Parallelprojektion aus P_3 (siehe (23)) unmittelbar den zugehörigen Punkt Q_3 .

Wir haben also erhalten:

Satz 5. Bei gegebenen Kontrollpunkten Q_0, Q_1, Q_2 einer ebenen Bézierkurve 3. Ordnung l gilt: Der Zusammenhang zwischen den Punkten Q_3 und den Doppelpunkten der zugehörigen Kurven l ist eine birationale Verwandtschaft von der Ordnung 4. Sie ist durch (23) und (22) gegeben. Die Umkehrtransformation zu (22) liefert (24).

Literatur

- [1a,b] BRAUNER, H.: Geometrie projektiver Räume I, II, Bibliographisches Institut Mannheim, Zürich, 1976.
- [2] BRAUNER, H.: Über die Projektion mittels der Sehnen einer Raumkurve 3. Ordnung, *Mh. Math.* 59 (1955), 258–273.
- [3] BRAUNER, H.: Konstruktive Durchführung der durch die Sehnen einer Raumkurve 3. Ordnung vermittelten Abbildung, *Mh. Math.* 60 (1956), 231–248.

- [4] FLADT, K. und BAUR, A.: Analytische Geometrie spezieller Flächen und Raumkurven, Vieweg, Braunschweig, 1975.
- [5] FORREST, A. R.: The twisted cubic curve: A computer-aided geometric design approach, *Comput. Aided Des.* **12/4** (1980), 165–172.
- [6] HOSCHEK, J. und LASSER, D.: Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung, Teubner, Stuttgart, 1989.
- [7] LIU, D. and SU, B.: An affine invariant and its application in computational geometry, *Scientia Sinica (Serie A)* **24/3** (1983), 259–267.
- [8] MÜLLER, E. und KRAMES, J.: Vorlesungen über Darstellende Geometrie, Deuticke, Leipzig und Wien, 1931.
- [9] STONE, M.C. and DeROSE, T.D.: A Geometric Characterisation of Parametric Cubic Curves, *ACM Transactions on Graphics*, **8/3** (1989), 147–163.
- [10] WANG, C. Y.: Shape classification of the parametric cubic curve and parametric B-spline cubic curve, *Comput. Aided Des.* **13/4** (1981), 199–206.
- [11] WIELEITNER, H.: Algebraische Kurven I, II, Sammlung Götschen Band 435, Berlin, 1943.