Mathematica Pannonica
6/2 (1995), 199 – 202

SUR CERTAINES FONCTIONS DÉFINIES DANS DES ALGÈBRES UNIVERSELLES

I. Gy. **Maurer**

Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences, 1364 Budapest, P. O. Box 127, Hungary

M. **Szilágyi**

Department of Mathematics, Technical University, 4300 Tg. Mureş, str. N. Jorga 1, Romania

À l'occasion de 60-ème anniversaire de M. Prof. Hans Vogler

Received November 1994

MSC 1991: 08 A 99

Keywords: Universal algebra and dual universal algebra, n-ary and nullary operation, image and kernel of a function, homomorphism.

Abstract: Certain functions defined on universal algebras are studied with an application to the solvability of certain equations over universal algebras.

On étude dans cette note certaines fonctions définies dans des algèbres universelles et on applique les résultats obtenus pour résoudre certaines équations définies dans des algèbres universelles. On utilise conçernant les algèbres universelles la términologie de [1], les fonctions seront regardées comme des opérateurs à droit.

Soient G, G' et $\mathcal{G}$ des algèbres universelles du même type. On suppose dans toutes ces algèbres l'existence d'une opération unaire et on dénote par 0, $0'$ et o les éléments évidenciés en G, G' et $\mathcal{G}$ par ces opérations. Inspirée de la construction d'espace dual d'un espace vectoriel, on peut faire à partir de G et $\mathcal{G}$ la suivante construction: 1) on considère l'ensemble $\mathcal{G}^G$ de toutes les applications $\alpha\colon G \to \mathcal{G}$; 2) on introduit en

$\mathcal{G}^G$ un système d'opérations, en fonction des opérations définies en $\mathcal{G}$, à la manière suivante: si ω est une opération n-aire ($n \neq 0$) définie dans $\mathcal{G}$, alors, dans le cas d'un système ordonné quelconque des éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{G}^G$ on doit avoir

$$(1) \qquad x(\alpha_1 \ldots \alpha_n \omega) = (x\alpha_1) \ldots (x\alpha_n)\omega \quad (\forall x \in G);$$

si ω est une opération nullaire et $\mathfrak{o}$ est l'élément évidencié de $\mathcal{G}$ par ω, alors l'élément évidencié correspondant de $\mathcal{G}^G$ soit l'élément $\theta_1 \in \mathcal{G}^G$ pour lequel $G\theta_1 = \mathfrak{o}$. $\mathcal{G}^g$ devient ainsi une algèbre universelle du même type que $\mathcal{G}$, elle peut être dénommée *algèbre universelle duale* de G par rapport à $\mathcal{G}$. On peut construire d'une manière analogue les algèbres universelles duales $\mathcal{G}^{G'}$, $G^{\mathcal{G}}$, $(G')^{\mathcal{G}}$ de toutes les applications $\alpha' \colon G' \to \mathcal{G}$, $\beta \colon \mathcal{G} \to G$, $\beta' \colon \mathcal{G} \to G'$. Si on dénote par θ_2, τ_1, τ_2 les éléments évidenciés de $\mathcal{G}^{G'}$, $G^{\mathcal{G}}$, $(G')^{\mathcal{G}}$ qui correspondent aux éléments $\mathfrak{o}$, 0, $0'$, on a

$$(2) \qquad G\theta_1 = \mathfrak{o}, \quad G'\theta_2 = \mathfrak{o}, \quad \mathcal{G}\tau_1 = 0, \quad \mathcal{G}\tau_2 = 0'.$$

Soit maintenant une fonction quelconque $f \colon G \to G'$ et définissons à l'aide de f les fonctions $f^* \colon \mathcal{G}^{G'} \to \mathcal{G}^G$ et ${}^*f \colon G^{\mathcal{G}} \to (G')^{\mathcal{G}}$ de la manière suivante:

$$(3) \qquad \alpha' f^* = \alpha' \circ f \ (\forall \alpha' \in \mathcal{G}^{G'}) \ \text{ et } \ \beta\, {}^*f = f \circ \beta \ (\forall \beta \in G^{\beta}),$$

où $\circ$ représente l'opération de la composition au sens habituel des fonctions. Cela signifie que

$$(3') \qquad x(\alpha' \circ f) = (xf)\alpha' \ (\forall x \in G) \text{ et } g(f \circ \beta) = (g\beta)f \ (\forall g \in \mathcal{G}).$$

En ce qui suite nous utiliseros les égalités (1), (2), (3) et (3') sans référence.

Théorème 1. (i) $\mathcal{G}^G$, $\mathcal{G}^{G'}$, $G^{\mathcal{G}}$, $(G')^{\mathcal{G}}$ *sont des algèbres universelles du même type;* (ii) f^* *est un homomorphisme;* (iii) *si* f *est un homomorphisme, alors* ${}^*f$ *est aussi un homomorphisme.*

Démonstration. (i) est évidement vraie. (ii) a été démonstrée en [2]. Donc il suffit de démontrer la propriété (iii). Si ω est une opération n-aire quelconque définie en $G^{\mathcal{G}}$ et $\beta_1, \ldots, \beta_n$ est un système ordonné arbitraire de $G^{\mathcal{G}}$, alors — en tenant compte aussi du fait que f est un homomorphisme — nous avons pour tous les éléments $g \in \mathcal{G}$.

$$g((\beta_1 \ldots \beta_n\omega)\, {}^*f) = g(f \circ (\beta_1 \ldots \beta_n\omega)) = (g(\beta_1 \ldots \beta_n)\omega)f =$$
$$= ((g\beta_1) \ldots (g\beta_n)\omega)f = (g\beta_1)f \ldots (g\beta_n)f\omega = g(f \circ \beta_1) \ldots g(f \circ \beta_n)\omega =$$
$$= g((f \circ \beta_1) \ldots (f \circ \beta_n)\omega) = g((\beta_1\, {}^*f) \ldots (\beta_n\, {}^*f)\omega),$$

ce qui signifie que ${}^*f$ est un homomorphisme. ◊

Si on dénote par

$$\operatorname{Ker}\alpha' = \{x' \in G' \mid x'\alpha' = \mathfrak{o}\}, \text{ resp. } \operatorname{Ker} f^* = \{\alpha' \in \mathcal{G}^{G'} \mid \alpha' f^* = \theta_1\}$$

les *noyaux* de α', resp. de f^*, alors on déduit pour l'image $\operatorname{Im} f$ de f la suivante égalité:

Théorème 2. $\operatorname{Im} f = \bigcap\limits_{\alpha' \in \operatorname{Ker} f^*} \operatorname{Ker}\alpha'.$

Démonstration. Si x' est un élément quelconque de $\operatorname{Im} f$, alors il existe au moins un $x \in G$, tel que $xf = x'$. Soit α' un élément arbitraire de $\operatorname{Ker} f^*$. Alors $\alpha' f^* = \theta_1$, donc nous avons $x'\alpha' = (xf)\alpha' = x(\alpha' \circ f) = x(\alpha' f^*) = x\theta_1 = \mathfrak{o}$. Ce signifie que $x' \in \operatorname{Ker}\alpha'$, donc il subsiste l'inclusion $\subseteq$.

Au but de démontrer l'inclusion $\supseteq$, considérons un élément quelconque du membre droit de l'égalité, c'est-à-dire un tel élément arbitraire $x' \in G'$ pour lequel $x'\alpha' = \mathfrak{o}$ pour tous les éléments $\alpha' \in \operatorname{Ker} f^* (\Leftrightarrow \alpha' f^* = \theta_1)$. Au but de démontrer l'appartenence $x' \in \operatorname{Im} f$, supposons que $x' \notin \operatorname{Im} f$ et considérons un tel élément $\alpha' \in \mathcal{G}^{G'}$ pour lequel $\operatorname{Ker}\alpha' = \operatorname{Im} f$. Alors il subsiste pour tous les éléments $x \in G$: $x(\alpha' f^*) = x(\alpha' \circ f) = (xf)\alpha' = \mathfrak{o}$, d'où il résulte $\alpha' f^* = \theta_1$ et par conséquence $\alpha \in \operatorname{Ker} f^*$. Ce signifie que $x'\alpha' = \mathfrak{o}$, d'où il résulte que $x' \in \operatorname{Ker}\alpha' = \operatorname{Im} f$, ce qui contredit l'hypothèse $x' \notin \operatorname{Im} f$. ◊

Si on dénote par

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in G \mid xf = 0'\}, \text{ resp. } \operatorname{Ker} {}^*f = \{\beta \in \mathcal{G}^G \mid \beta\, {}^*f = \tau_2\}$$

les *noyaux* de f, resp. de ${}^*f$, alors on déduit la suivante égalité:

Théorème 3. $\operatorname{Ker} f = \bigcup\limits_{\beta \in \operatorname{Ker} {}^*f} \operatorname{Im}\beta.$

Démonstration. Soit x_0 un élément quelconque du membre droit de l'égalité, donc un tel élément de G pour lequel $x_0 \in \operatorname{Im}\beta$ et $\beta \in \operatorname{Ker} {}^*f$. Considérons un élément $g_0 \in \mathcal{G}$ tel que $x_0 = g_0\beta$. Alor on peut écrire $x_0 f = (g_0\beta)f = g_0(f \circ \beta) = g_0(\beta\, {}^*f) = g_0\tau_2 = 0'$. Il s'en suit que $x_0 \in \operatorname{Ker} f$, donc l'inclusion $\supseteq$ est démontrée.

Soit maintenant y un élément quelconque de $\operatorname{Ker} f$. Si on définie un $\beta_y \in G^{\mathcal{G}}$ par l'égalité $g\beta_y = y$ $(\forall g \in \mathcal{G})$, alors on a pour cet élément la relation $y \in \operatorname{Im}\beta_y$. D'autre côté, nous avons pour tous les éléments $g \in \mathcal{G}$: $g(\beta_y\, {}^*f) = g(f \circ \beta_y) = (g\beta_y)f = yf = 0'$. Ce signifie que $\beta_y\, {}^*f = \tau_2$, d'où il résulte la relation $\beta_y \in \operatorname{Ker} {}^*f$. Mais nous avons vu que $y \in \operatorname{Im}\beta_y$. Il en résulte que y est un élément du membre droit de l'égalité. ◊

Considérons maintenant une équation

$$(*) \qquad xf = x',$$

où x' est un élément arbitrairement fixé de G'. La relation $x' \in \operatorname{Im} f$ représente évidement une condition nécessaire et suffisante pour la résolubilité en x de l'équation $(*)$. Nous obtenons ainsi, en utilisant le Th. 2, la suivante propriété, démontrée dans [2] par un raisonment direct:

Théorème 4. *L'équation* $(*)$ *est résoluble en* x *si et seulement si*

$$x' \in \bigcap_{\alpha' \in \operatorname{Ker} f^*} \operatorname{Ker} \alpha'.$$

Remarque. Nous avons déjà observé dans [2] que si on applique ce théorème dans le cas de deux espaces vectoriels $G = V_n$ et $G' = V_m$ définis sur le même corps, de diménsions n et m et dans le cas de la fonction $f\colon V_n \to V_m$ déterminée par la matrice d'un système d'équations linéaires $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ $(i = 1, \dots, m)$, alors on obtient le théorême classique de Cronecker–Capelli rélativement à la résolubilité du système considéré. Il en résulte que le Th. 4 peut être regardé comme une généralisation du théorème de Cronecker–Capelli pour les équations $(*)$, définies dans des algèbres universelles.

Bibliographie

[1] KUROŠ, A. G.: Vorlesungen über allgemeine Algebra, Leipzig, 1964.

[2] MAURER, I. Gy. et SZILÁGYI, M.: Étude de certaines équations définies dans des algèbres universelles, *Acc. Naz. dei Lincei – Rendiconti della Classe di Scienze fis., mat. e nat. (serie VIII)* 44/6 (1968), 733–740.