

# APPROXIMATION IN LIESCHEN TRANSFORMATIONSGRUPPEN DURCH ÜBERLAGERUNG VON EINPARAMETRIGEN UNTERGRUP- PEN

Johannes WALLNER

*Institut für Geometrie, Technische Universität, Wiedner Haupt-  
straße 8-10, A-1040 Wien, Austria*

Herrn Prof. Dr. Hans Vogler zum sechzigsten Geburtstag gewidmet

*Received* September 1994

MSC 1991: 22 E 60, 17 B 05

*Keywords:* Lie transformation groups, one-parameter subgroups, approxima-  
tion, commutators in Lie algebras, Baker-Campbell-Hausdorff-series.

**Abstract:** Generalizing theorems of elementary kinematic geometry the fol-  
lowing problem is studied: Let a Lie transformation group  $G$  act on a ho-  
mogenous space and let a motion (a curve  $c: I \rightarrow G$ ) be given. We ask for a  
superposition of one-parameter subgroups of  $G$  which osculates  $c(t)$  at  $t=t_0$ .  
The property that for all  $c$  and  $t_0$  there exist three one-parameter subgroups  
whose superposition osculates  $c(t)$  at  $t=t_0$  turns out to be equivalent to the  
property of every element of the corresponding Lie algebra being a commu-  
tator, which is fulfilled by several classical motion groups.

In der ebenen euklidischen Kinematik ist es eine bekannte Tat-  
sache, daß man zu einer zweimal stetig differenzierbaren Bewegung,  
die zu einem bestimmten Zeitpunkt keine Fernpolstellung und keinen  
Stillstand besitzt, mindestens eine Trochoidenbewegung zweiter Stufe  
finden kann, bei welcher Bahntangenten und Bahnkrümmungen zu eben  
diesem Zeitpunkt mit der ursprünglichen Bewegung übereinstimmen.  
Die Bewegung sei durch

$$C(\bar{t}) = ((1, u(\bar{t}), v(\bar{t}))^T, (0, \cos \varphi(\bar{t}), \sin \varphi(\bar{t}))^T, (0, -\sin \varphi(\bar{t}), \cos \varphi(\bar{t}))^T)$$

in Matrizenschreibweise gegeben.  $A_1(t)$  und  $A_2(t)$  seien die beiden Drehungen, aus denen sich durch  $A_1(t) \cdot A_2(t)$  die Trochoidenbewegung zusammensetzt. Sie seien kanonisch parametrisiert, d.h. es soll gelten  $A_i(t_1) \cdot A_i(t_2) = A_i(t_1 + t_2)$ , insbesondere ist dann  $A_i(0)$  gleich der Einheitsmatrix. Es gibt dann eine reguläre Parametertransformation  $\gamma: \bar{t} \mapsto t$ , sodaß an der Stelle  $t = \bar{t} = 0$  gilt:

$$\frac{d}{dt}(A_1(t) \cdot A_2(t) \cdot C(0) \cdot x) = \frac{d}{dt}(C(\gamma(t)) \cdot x)$$

und

$$\frac{d^2}{dt^2}(A_1(t) \cdot A_2(t) \cdot C(0) \cdot x) = \frac{d^2}{dt^2}(C(\gamma(t)) \cdot x)$$

für alle Koordinatenvektoren  $x = (1, x_1, x_2)^T$ .

Allgemeiner kann man sich folgende Frage stellen (vgl. [7]): Gegeben ist eine Liesche Transformationsgruppe  $G$ , die auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $X$  operiert. Die Gruppenoperation sei  $g: G \times G \rightarrow G$ ,  $(a, b) \mapsto g(a, b) = a \cdot b$  und die Operation auf  $X$  sei  $\varphi: G \times X \rightarrow X$ ,  $(a, x) \mapsto \varphi(a, x) = a(x)$  mit  $\varphi(a, \varphi(b, x)) = \varphi(a \cdot b, x)$ . Sei  $d: I \rightarrow G$ ,  $t \mapsto d(t)$  eine Bewegung, bei der jeder Punkt  $x \in X$  eine Bahnkurve  $d_x: I \rightarrow X$ ,  $t \mapsto \varphi(d(t), x) = d(t)(x)$  besitzt. Seien  $n$  einparametrische Untergruppen  $p_1(t), \dots, p_n(t)$  von  $G$  gegeben. Wir fragen danach, wann für alle Punkte  $x \in X$  die Bahnkurven bei der Überlagerung dieser Untergruppen jene der Bewegung  $d$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  von mindestens  $s$ -ter Ordnung berühren, daß heißt wann gilt

$$\frac{d^r}{dt^r} \varphi(p_1(t) \cdot p_2(t) \cdot \dots \cdot p_n(t), d(0)(x)) = \frac{d^r}{dt^r} \varphi(d \circ \gamma(t), x) \quad r = 1, \dots, s$$

für eine bestimmte Parametertransformation  $\gamma$  mit  $\gamma(0) = 0$ . Multiplizieren wir die Gleichung von links mit  $d(0)^{-1}$  und setzen wir  $d(0)^{-1} \cdot p_i(t) \cdot d(0) = q_i(t)$ , so sehen wir, daß dies genau dann der Fall ist, wenn

$$\frac{d^r}{dt^r} \varphi(q_1(t) \cdot q_2(t) \cdot \dots \cdot q_n(t), x) = \frac{d^r}{dt^r} \varphi(d(0)^{-1} \cdot d \circ \gamma(t), x) \quad r = 1, \dots, s$$

gilt. Die Bewegung  $d(0)^{-1} d(t)$  ist für  $t = 0$  gleich dem neutralen Element  $e \in G$ . Es genügt daher, Bewegungen mit  $d(0) = e$  zu betrachten. Hinreichend für die obige Bedingung ist die folgende:

$$\frac{d^r}{dt^r} (q_1(t) \cdot \dots \cdot q_n(t)) = \frac{d^r}{dt^r} (d \circ \gamma)(t) \quad r = 1, \dots, s,$$

und bei den klassischen Gruppen, bei denen die Transformationen aus  $G$  samt ihren Ableitungen vollständig durch die Bahnkurven der Punkte von  $X$  festgelegt sind, ist sie auch notwendig.

Wir beachten weiterhin, daß die zur Gruppe  $G$  gehörige Liesche Algebra  $\mathfrak{g}$  mit Hilfe der Exponentialabbildung  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  lokal um  $0 \in \mathfrak{g}$  diffeomorph auf eine Umgebung von  $e \in G$  abgebildet wird. Die Inverse zu  $\exp$  werde mit  $\log$  bezeichnet. Wir verwenden die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel (vgl. [4], [7])

$$(1) \log(\exp(ta_1) \dots \exp(ta_n)) = t(a_1 + \dots + a_n) + \frac{1}{2}t^2 \sum_{i < j} [a_i, a_j] + o(t^2),$$

setzen lokal um  $e$   $c(t) = \log d(t)$  und  $q_i(t) = \exp(ta_i)$  für bestimmte  $a_i \in \mathfrak{g}$  und erhalten

$$\frac{d^r}{dt^r}(c \circ \gamma(t)) = \frac{d^r}{dt^r} \left( t(a_1 + \dots + a_n) + \frac{1}{2}t^2 \sum_{i < j} [a_i, a_j] + o(t^2) \right)$$

$$r = 1, \dots, s.$$

Da die höheren Terme in (1), die von der Gestalt

$$\sum \lambda_k [a_{i_1}, [\dots [a_{i_{r-1}}, a_{i_r}] \dots]]$$

sind, schnell unübersichtlich werden, beschränken wir uns auf Differentiationsordnung  $s = 2$ . Die Ableitung nach  $t$  bezeichnen wir mit einem Strich. Wir erhalten

$$(2) \quad \gamma'(0)c'(0) = a_1 + \dots + a_n$$

$$(3) \quad \gamma''(0)c'(0) + \gamma'(0)^2 c''(0) = \sum_{i < j} [a_i, a_j]$$

als Bedingung dafür, daß die Bewegung  $d \circ \gamma$  mit  $\log d = c$  von zweiter Ordnung approximiert werden kann. Diese Bedingung kann somit alleine in der Lieschen Algebra formuliert werden. Fassen wir  $\mathfrak{g}$  als Tangentialvektorraum  $T_e G$  an  $G$  in  $e$  auf, so ist das Differential der Exponentialabbildung bei  $e$  die Identität in  $T_e G$ , also  $d'(0) = c'(0)$ .

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $\gamma'(0) = 1$ . Wenn wir aus (2) und (3)  $a_n$  eliminieren, erhalten wir

$$(4) \quad c''(0) + \gamma''(0)c'(0) = \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} [a_i, a_j] + \left[ \sum_{i=1}^{n-1} a_i, c'(0) \right]$$

und wenn wir weiter  $s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$  setzen:

$$(5) \quad c''(0) + \gamma''(0)c'(0) = [s_1, s_2] + [s_2, s_3] + \dots + [s_{n-2}, s_{n-1}] + [s_{n-1}, c'(0)].$$

Die Folgen  $s_1, \dots, s_{n-1}$  und  $a_1, \dots, a_{n-1}$  bestimmen einander umkehrbar eindeutig.

Ist insbesondere  $n-1 = 2k$  gerade, so können wir  $s_3 - s_1 = t_1, \dots, s_{n-2} - s_{n-4} = t_{k-1}$  und schließlich noch  $t_k = c'(0) - s_{n-2}$  setzen. Die Folgen  $s_1, \dots, s_{n-1}$  und  $s_2, s_4, \dots, s_{n-1}, t_1, \dots, t_k$  bestimmen einander umkehrbar eindeutig. (5) nimmt die Gestalt

$$(6) \quad c''(0) + \gamma''(0)c'(0) = [s_2, t_1] + [s_4, t_2] + \dots + [s_{n-1}, t_k]$$

an. Dabei ist die rechte Seite als Summe von  $k$  Kommutatoren in der derivierten Lieschen Algebra  $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  enthalten. Ist die Dimension von  $\mathfrak{g}^{(1)}$  gleich  $k$ , so ist jedes Element aus  $\mathfrak{g}^{(1)}$  als Summe von  $k$  Kommutatoren darstellbar, die Maximalzahl der benötigten Untergruppen  $q_i(t) = \exp(ta_i)$  ist dann gleich  $2k + 1$ . Weiters ist bei  $\mathfrak{g}^{(1)} \neq \mathfrak{g}$  für  $c'(0) \in \mathfrak{g}^{(1)}$ ,  $c''(0) \notin \mathfrak{g}^{(1)}$  die Bedingung (4) nicht erfüllbar. Wir erhalten:

**Proposition 1.** *Eine Bewegung  $d: I \rightarrow G$  mit  $d(0) = e$  wird bei  $t = 0$  genau dann von einer Überlagerung von einparametrischen Untergruppen oskuliert, wenn für den Weg  $c = \log d$  der Schnitt  $(c''(0) + \mathbb{R}c'(0)) \cap \mathfrak{g}^{(1)}$  nicht leer ist. Gilt  $\mathfrak{g}^{(1)} \neq \mathfrak{g}$ , so gibt es Bewegungen, die nicht von Überlagerungen von einparametrischen Untergruppen oskuliert werden.*

Der einfachste Fall ist jener der Überlagerung von zwei einparametrischen Untergruppen. Wir verwenden den Ausdruck "fast alle  $x$ " anstelle "alle  $x$  bis auf die in einer gewissen Nullmenge" und eine Aussage über "fast alle Wege  $c(t)$ " ist eine Aussage über ihre ersten beiden Ableitungsvektoren. Dann gilt:

**Proposition 2.** *Die Bewegung  $d(t) = \exp(c(t))$  wird genau dann bei  $t = 0$  von einer Überlagerung von zwei einparametrischen Untergruppen oskuliert, wenn der Schnitt  $(c''(0) + \mathbb{R}c'(0)) \cap [c'(0), \mathfrak{g}]$  nicht leer ist. In jeder Lieschen Gruppe gibt es Wege  $d(t)$ , die nicht von einer Überlagerung von zwei einparametrischen Untergruppen oskuliert werden. Ist die Maximaldimension von  $[x, \mathfrak{g}]$  gleich  $\dim \mathfrak{g} - 1$  und gibt es ein  $x$  mit  $x \notin [x, \mathfrak{g}]$ , so werden fast alle Wege von einer Überlagerung von zwei einparametrischen Untergruppen oskuliert, und fast alle nicht wenn die Maximaldimension von  $[x, \mathfrak{g}]$  kleiner als  $\dim \mathfrak{g} - 1$  ist.*

**Beweis.** Gleichung (4) ergibt

$$c''(0) + \gamma''(0)c'(0) = [a_1, c'(0)]$$

und wir sehen, daß die Approximationsaufgabe genau dann lösbar ist, wenn der affine Unterraum  $c''(0) + \mathbb{R}c'(0)$  den Unterraum  $V = [c'(0), \mathfrak{g}]$  trifft. Gilt  $\dim \mathfrak{g} = n$ , so hat dieser Dimension höchstens  $n - 1$ . Für

Wege  $c(t)$  mit  $c'(0) \in V$  und  $c''(0) \notin V$  treffen einander die die affinen Unterräume  $c''(0) + \mathbb{R}c'(0)$  und  $V$  nicht. Es sei  $k = \max\{\dim[x, \mathfrak{g}] | x \in \mathfrak{g}\}$ . Wir wählen eine Basis in  $\mathfrak{g}$ . Dann wird  $k$  genau von denjenigen  $x \in \mathfrak{g}$  angenommen, für die mindestens eine  $k \times k$ -Unterdeterminante der Koordinatenmatrix der linearen Abbildung  $\text{ad}_x: y \mapsto [x, y]$  nicht verschwindet. Das Komplement dieser Menge ist algebraisch und daher eine Nullmenge. Gilt für ein  $x$ , daß  $x \notin [x, \mathfrak{g}]$ , so für fast alle. Ist noch  $k = n - 1$ , so trifft  $c''(0) + \mathbb{R}c'(0)$  fast immer  $[c'(0), \mathfrak{g}]$ , bei  $k < n - 1$  fast nie.  $\diamond$

Sei  $K(\mathfrak{g}) = \{[x, y] | x, y \in \mathfrak{g}\}$  die Menge der Kommutatoren von  $\mathfrak{g}$ . Dann gilt:

**Proposition 3.** *Ein Weg  $d(t) = \exp(c(t))$  wird genau dann von von einer Überlagerung von drei einparametrischen Untergruppen oskuliert, wenn der affine Unterraum  $c''(0) + \mathbb{R}c'(0)$  die Menge  $K(\mathfrak{g})$  trifft. Genau bei  $K(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$  wird jeder Weg von einer Überlagerung von drei einparametrischen Untergruppen oskuliert.*

**Beweis.** (6) nimmt die Gestalt  $c''(0) + \gamma''(0)c'(0) = [s_2, t_1]$  an. Damit folgt die erste Aussage. Gibt es ein  $x \notin K(\mathfrak{g})$ , so ist für Wege mit  $c''(0) = x$ ,  $c'(0) = 0$  diese Gleichung nicht erfüllbar.  $\diamond$

Gilt  $K(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ , so gibt es sogar immer eine Überlagerung von drei einparametrischen Untergruppen, die mit dem Weg  $d$  von zweiter Ordnung übereinstimmt, d.h. man benötigt hier keine Parametertransformation.

Wir bezeichnen mit  $O_{k,l}$  jene Matrizen­gruppe, die die quadratische Form  $x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+l}^2$  invariant läßt. Es wird gesetzt  $O_{0,n} = O_n$ . Zu  $O_{k,l}$ , zu  $SO_{k,l} = O_{k,l} \cap SL_{k+l}$  und zur Faktorgruppe nach einem diskreten Normalteiler, z.B.  $\{E, -E\}$ , gehört die gleiche Liesche Algebra  $\mathfrak{so}_{k,l}$ . Sie ist die Menge der Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} X_1 & Y \\ Y^T & X_2 \end{pmatrix} \text{ mit } X_1^T = -X_1, X_2^T = -X_2,$$

wobei  $X_1$  eine  $p \times p$ -Matrix und  $X_2$  eine  $q \times q$ -Matrix ist. Weiters bezeichnen wir die Translationsgruppe des  $n$ -dimensionalen reellen affinen Raumes mit  $T_n$  und identifizieren sie mit  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist die Bewegungsgruppe  $OA_n$  des  $n$ -dimensionalen euklidischen Raumes gleich  $T_n \times_{\text{id}} O_n$  und ihre Liesche Algebra ist gleich  $\mathfrak{oa}_n = \mathfrak{t}_n \oplus_{\text{id}} \mathfrak{so}_n$ . Hier ist  $\mathfrak{t}_n$  die  $n$ -dimensionale triviale Liesche Algebra. Die Liesche Algebra zu  $SL_n$  (und  $PGL_{n-1}$ ) bezeichnen wir mit  $\mathfrak{sl}_n$ . Sie ist die Menge der Matrizen mit Spur 0. Zur äquiaffinen Gruppe  $SA_n = T_n \times_{\text{id}} SL_n$  gehört die Liesche

Algebra  $\mathfrak{sa}_n = \mathfrak{t}_n \oplus_{\text{id}} \mathfrak{sl}_n$ .

Für einige niedrigdimensionale Liesche Algebren können wir die oben angegebenen Kriterien direkt nachrechnen:

**Satz 4.** *In den Bewegungsgruppen  $OA_2$ ,  $O_3/\{E, -E\}$  und  $O_{1,2}/\{E, -E\}$  der euklidischen, elliptischen und hyperbolischen Ebene wird fast jeder Weg durch eine Überlagerung von zwei einparametrischen Untergruppen oskuliert. Die verbleibenden Wege werden in der elliptischen und hyperbolischen Ebene von einer geeigneten Überlagerung von drei einparametrischen Untergruppen, in der euklidischen Ebene werden die restlichen entweder von einer Überlagerung von drei einparametrischen Untergruppen oder von keiner Überlagerung von  $n$  einparametrischen Untergruppen oskuliert.*

**Beweis.** Wir betrachten die zugehörigen Lieschen Algebren  $\mathfrak{oa}_2$ ,  $\mathfrak{so}_2$ , und  $\mathfrak{so}_{1,2}$  (Vgl. [5])

1.  $\mathfrak{g} = \mathfrak{oa}_2$  ist eine semidirekte Summe aus  $\mathfrak{t}_2$  und  $\mathfrak{so}_2$ . Es gibt drei Basisvektoren  $u, v, w$  mit  $u, v \in \mathfrak{t}_2$  und  $[u, v] = 0$ ,  $[u, w] = v$ ,  $[v, w] = -u$ . Genau für  $c'(0) \notin \mathfrak{t}_2$  ist  $[c'(0), \mathfrak{g}] = \mathfrak{t}_2$  und der affine Unterraum  $c''(0) + \mathbb{R}c'(0)$  schneidet  $\mathfrak{t}_2$ . Gilt  $c''(0) \notin \mathfrak{t}_2$  und  $c'(0) \in \mathfrak{t}_2$ , so schneidet der obige Unterraum  $\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{g}^{(1)}$  nicht. Schneidet er oder ist er sogar in  $\mathfrak{t}_2$  enthalten (nur dieser Fall tritt dann auf), so reichen drei Untergruppen, denn jedes  $x \in \mathfrak{t}_2$  ist ein Kommutator.

2.  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_3$  ist isomorph zum  $\mathbb{R}^3$  mit  $[a, b] = a \times b$ . Es ist  $\dim[x, \mathfrak{g}] = \dim x^\perp = 2$  für alle  $x \neq 0$  und jedes  $x$  ist ein Kommutator.  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{1,2}$  ist isomorph zu  $\mathfrak{sl}_2$  und besitzt eine Basis  $h, e, f$  mit  $[h, e] = 2e$ ,  $[h, f] = -2f$ ,  $[e, f] = h$ . Es gilt  $\dim[x, \mathfrak{g}] = 2$  für alle  $x \neq 0$  und jedes  $x$  ist ein Kommutator.  $\diamond$

Der folgende Satz liefert Beispiele von Bewegungsgruppen, in denen zwei Untergruppen nicht ausreichen:

**Satz 5.** *In den Bewegungsgruppen  $O_{1,3}/\{E, -E\}$  bzw.  $O_{2,2}/\{E, -E\}$  der dreidimensionalen Cayley-Klein-Räume mit ovaler bzw. ringartiger Maßquadratik (hyperbolischer Raum und indefiniter Raum) wird jede Bewegung von einer Überlagerung von drei einparametrischen Untergruppen oskuliert und fast keine von einer Überlagerung von zwei einparametrischen Untergruppen.*

**Beweis.** Wir betrachten die dazugehörigen Lieschen Algebren  $\mathfrak{so}_{1,3}$  und  $\mathfrak{so}_{2,2}$ . (Vgl. [5]). Beide haben Dimension 6.

1.  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{1,3}$  ist isomorph zu  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ , aufgefaßt als reeller Vektorraum doppelter Dimension. Die komplexe Dimension von  $[x, \mathfrak{g}]$  ist gleich

2 für alle  $x \in \mathfrak{g}, x \neq 0$ , die reelle damit gleich 4. In  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  ist jedes Element ein Kommutator.

2.  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2,2}$  ist isomorph zu  $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ . Damit ist die Maximaldimension von  $[x, \mathfrak{g}]$  gleich 4 und jedes  $x \in \mathfrak{g}$  ist ein Kommutator.  $\diamond$

Für die Approximation durch zwei einparametrische Untergruppen ist die Differenz zwischen der Dimension  $\dim \mathfrak{g}$  und der Maximaldimension von  $[x, \mathfrak{g}]$  entscheidend. Es gilt folgende Tabelle ( $n \geq 2, k \geq 1$ ):

Liesche Algebra	$\dim \mathfrak{g}$	$\max \dim [x, \mathfrak{g}]$
$\mathfrak{sl}_n$	$n^2 - 1$	$n^2 - n$
$\mathfrak{so}_{2k}$	$2k^2 - k$	$2k^2 - 2k$
$\mathfrak{so}_{2k+1}$	$2k^2 + k$	$2k^2$
$\mathfrak{oa}_{2k}$	$2k^2 + k$	$2k^2$
$\mathfrak{oa}_{2k+1}$	$2k^2 + 3k$	$2k^2 + 2k$
$\mathfrak{sa}_n$	$n^2 + n - 1$	$n^2$

Damit gilt:

**Korollarium 6.** *In den folgenden Gruppen werden fast alle Wege nicht durch eine Überlagerung von zwei einparametrischen Untergruppen oskularisiert: In der projektiven Gruppe  $\text{PGL}_n$  für  $n \geq 2$ , in den Bewegungsgruppen  $\text{OA}_n$  des euklidischen und  $\text{O}_{n+1}/\{E, -E\}$  des elliptischen Raumes für  $n \geq 3$  und in der äquiaffinen Gruppe  $\text{SA}_n$  für  $n \geq 3$ .*

Wir werden zeigen, daß die projektive, die euklidische, die elliptische und die äquiaffine Bewegungsgruppe in jeder Dimension die Approximationseigenschaft für drei einparametrische Untergruppen besitzen. Für die projektive und die elliptische Bewegungsgruppe folgt dies aus den Ergebnissen in [1], [2], [3] und [6], wo gezeigt wird, daß in jeder der klassischen Lieschen Algebren jedes Element ein Kommutator ist, sofern der zugrundeliegende Körper  $\mathbb{K}$  eine gewisse Mindestanzahl von Elementen besitzt. Für den Spezialfall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  geben wir jedoch noch einen Beweis für  $\mathfrak{so}_n$ :

**Lemma 7.** *Für  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$  und für  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n$  gilt  $K(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ , d.h. jedes Element ist ein Kommutator.*

**Beweis.** Zur ersten Aussage siehe [6]. Zur zweiten Aussage:  $\mathfrak{so}_n$  ist die Menge der schiefssymmetrischen  $n \times n$ -Matrizen  $M$ . Zu einer orthogonalen Matrix  $P$  aus  $\text{O}_n$  gehört ein Lie-Algebren-Automorphismus  $\text{Ad}_P : M \mapsto PMP^{-1}$ . Nach dem Spektralsatz ist jedes  $C \in \mathfrak{so}_n$  orthogonal-ähnlich zu einer Matrix in reeller Jordan-Normalform der Gestalt  $\text{diag}(J(c_1), \dots, J(c_k), 0, \dots, 0)$ , wobei  $J(c)$  ein Kästchen der



sind daher für  $|b_i| \neq |b_j|$  eindeutig lösbar. Die Einzelgleichungen zum Kästchen  $L_i$  sind genau für  $b_i \neq 0$  eindeutig lösbar. Wählen wir  $k$  reelle Zahlen  $b_1, \dots, b_k$  mit  $b_i \neq 0$  und  $|b_i| \neq |b_j|$  für  $i \neq j$ , so können  $A$  so bestimmen, daß  $[A, B] = C$  gilt.  $\diamond$

**Lemma 8.** Für die Lieschen Algebren  $\mathfrak{g} = \mathfrak{oa}_n$  und  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sa}_n$  gilt  $K(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ , d.h. jedes  $x \in \mathfrak{g}$  ist ein Kommutator.

**Beweis.** Wir identifizieren  $\mathfrak{oa}_n = \mathfrak{t}_n \oplus_{\text{id}} \mathfrak{so}_n$  mit der Menge aller Paare  $(v, M)$  mit  $v \in \mathfrak{t}_n = \mathbb{R}^n$ ,  $M \in \mathfrak{so}_n$ , wobei  $[(v_1, M_1), (v_2, M_2)] = (M_1 v_2 - M_2 v_1, M_1 M_2 - M_2 M_1)$ , und  $\mathfrak{OA}_n = \mathbb{T}_n \times_{\text{id}} \mathbb{O}_n$  mit der Menge aller Paare  $(p, P)$  mit  $p \in \mathbb{R}^n = \mathbb{T}_n$ ,  $P \in \mathbb{O}_n$ , wobei  $(p_1, P_1) \cdot (p_2, P_2) = (p_1 + P_1 p_2, P_1 P_2)$ .

Jedes  $(p, P) \in \mathfrak{OA}_n$  induziert einen Automorphismus von  $\mathfrak{oa}_n$  durch  $\text{Ad}_{(p, P)} : (v, M) \mapsto (Pv - PMP^{-1}p, PMP^{-1})$ . Analog zum Beweis von Lemma 7 gibt es ein  $P \in \mathbb{O}_n$ , sodaß  $PMP^{-1}$  Normalform (7) besitzt. Es genügt daher, die Aussage für Paare  $(v, M)$  mit  $M$  in Normalform (7) zu zeigen.

Wir setzen  $(b, B) = ((\beta_1, \dots, \beta_k), \text{diag}(J(b_1), \dots, J(b_k), 0))$ , wobei die letzte 0 nur bei  $n = 2k + 1$  ungerade auftritt. Weiters sei  $(a, A) = ((\alpha_1, \dots, \alpha_n), (a_j^i))$ . Dann ist  $[(a, A), (b, B)] = (c, C)$  mit

$$c = \begin{pmatrix} a_1^1 \beta_1 + \dots + a_n^1 \beta_n \\ \vdots \\ a_1^n \beta_1 + \dots + a_n^n \beta_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -b_1 \alpha_2 \\ b_1 \alpha_1 \\ -b_2 \alpha_4 \\ b_2 \alpha_3 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } C = \begin{pmatrix} K_{11} & \dots & K_{1k} & L_1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & K_{kk} & L_k \\ \text{s.s.} & & & 0 \end{pmatrix},$$

wobei die Nullen und die  $L_i$  nur bei ungeradem  $n$  auftreten. Wir finden nach Lemma 7 Matrizen  $A$  und  $B$  so, daß  $AB - BA = M$  gilt. Sei  $v = (v_1, \dots, v_n)^T$ . Ist  $n = 2k$  gerade, so können wir daher, um die Gleichung  $c = v$  zu lösen, wegen  $b_i \neq 0$   $\beta_1 = \dots = \beta_n = 0$  und  $\alpha_2 = v_1/b_1, \alpha_1 = -v_2/b_2, \alpha_4 = v_3/b_2, \alpha_3 = -v_4/b_2, \dots$  setzen.

Sei nun  $n = 2k + 1$  ungerade. Es gibt eine Einzelgleichung der Gestalt  $\pm b_i a_j^n = 0$ , denn in der  $n$ -ten Spalte der Matrix  $M$  ist höchstens

ein Eintrag  $\neq 0$ . Wir können die  $b_i$  so wählen, daß  $|b_i| \neq |b_j|$  für  $i \neq j$ ,  $b_i \neq 0$  für  $i \neq i_0$  und  $b_{i_0} = 0$  gilt. Dann wählen wir  $a_{i_0}^n = -a_n^{i_0}$  ungleich 0. Daraufhin bestimmen wir  $\beta_1, \dots, \beta_n$  so, daß  $a_1^n \beta_1 + \dots + a_n^n \beta_n = v_n$ , und anschließend  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2k}$  so, daß  $a_1^{2j-1} \beta_1 + \dots + a_n^{2j-1} \beta_n + b_j \alpha_{2j} = v_{2j-1}$  und  $a_1^{2j} \beta_1 + \dots + a_n^{2j} \beta_n - b_j \alpha_{2j-1} = v_{2j}$  für  $j = 1, \dots, k$  gilt. Damit ist  $[(a, A), (b, B)] = (v, M)$ .

Zu  $\mathfrak{sa}_n$ : Wir oben identifizieren wir  $\mathfrak{sa}_n$  mit der Menge aller Paare  $(v, M)$  mit  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $M \in \mathfrak{sl}_n$  und  $\text{SA}_n$  mit der Menge aller Paare  $(p, P)$  mit  $p \in \mathbb{R}^n$ ,  $P \in \text{SL}_n$ . Nach [6] gibt es für jedes  $M \in \mathfrak{sl}_n$  eine Matrix  $P$ , daß alle Hauptdiagonalelemente von  $PMP^{-1}$  verschwinden. O.B.d.A. ist  $P \in \text{SL}_n$ , sodaß für alle  $(v, M)$  ein Lie-Algebren-Automorphismus  $\text{Ad}_{(p,P)}$  existiert, sodaß für  $(w, N) = \text{Ad}_{(p,P)}(v, M)$  alle Hauptdiagonalelemente von  $N$  verschwinden. Machen wir nun analog zu [6] einen Ansatz der Form  $[(a, A), (b, B)] = (w, N)$  mit  $b = 0$  und  $B = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$ ,  $a = (\alpha_i)$ ,  $A = (a_j^i)$ , so ergibt einfaches Ausrechnen die Gleichung

$$w = \begin{pmatrix} -b_1 \alpha_1 \\ \vdots \\ -b_n \alpha_n \end{pmatrix} \text{ und } N = \begin{pmatrix} & & \vdots & & \\ \cdots & (b_j - b_i) a_j^i & \cdots & & \\ & & \vdots & & \end{pmatrix},$$

die durch Wahl von  $b_i \neq 0$  und  $b_i \neq b_j$  für  $i \neq j$  gelöst werden kann.  $\diamond$

Damit haben wir das Ergebnis:

**Satz 9.** *In der projektiven Bewegungsgruppe  $\text{PGL}_n$  des  $n$ -dimensionalen projektiven Raumes ( $n \geq 1$ ), in der Bewegungsgruppe  $\text{O}_{n+1}/\{E, -E\}$  des  $n$ -dimensionalen elliptischen Raumes ( $n \geq 2$ ), in der Bewegungsgruppe  $\text{OA}_n$  des euklidischen  $n$ -dimensionalen Raumes ( $n \geq 3$ ) und in der äquiaffinen Gruppe  $\text{SA}_n$  des  $n$ -dimensionalen affinen Raumes ( $n \geq 2$ ) stimmt jede Bewegung von zweiter Ordnung mit einer geeigneten Überlagerung von drei einparametrischen Untergruppen überein.*

## References

- [1] ALBERT, A. A. and MUCKENHAUPT, B.: On matrices of trace zero, *Michigan Mathematics Journal* 4 (1957), 1-3.
- [2] BROWN, G.: On commutators in a simple Lie algebra, *Proc. Amer. Math. Soc.* 14 (1963), 763-767.
- [3] HIRSCHBÜHL, R.: Commutators in Classical Lie Algebras, *Linear Algebra and its Applications* 142 (1990), 91-111.

- [4] ONISHCHIK, A. L., (Ed.): Lie Groups and Lie Algebras I, (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Volume 20), Springer Verlag, 1993
- [5] ONISHCHIK, A. L. and VINBERG, E. B.: Lie Groups and Algebraic Groups, Springer Verlag, 1990
- [6] SHODA, K.: Einige Sätze über Matrizen, Japanese Journal of Mathematics **13** (1937), 361–365.
- [7] VOGLER, H.: Überlagerungen von einparametrischen Untergruppen, Vortrag bei der Österreichischen Geometrie-Tagung in Seggau, 1994