Mathematica Pannonica
6/2 (1995), 155 – 161

ZU DEN WINKELGEGENPUNKTEN DER ISOTROPEN DREIECKSGEOMETRIE

Jürgen **Tölke**

Mathematisches Institut, Universität Siegen, Hölderlinstraße 3, D–57068 Siegen, Deutschland

Herrn Prof. Dr. Hans Vogler zum 60. Geburtstag gewidmet

Received October 1994

MSC 1991: 51 N 25

Keywords: Isotrope Ebene, Winkelgegenpunkte, Brocard Punkte, Lemoine Punkt.

Abstract: Two distance relationships between isotropic opposite angle points of a triangle are demonstrated. As applications we get characteristic properties of the Brocard points and the Lemoine point.

Die Brocard'schen Punkte 1. und 2. Art sowie der Schwerpunkt und Lemoine'sche Punkt eines Dreiecks der isotropen Ebene sind bekanntlich jeweils Paare von Winkelgegenpunkten. Damit erhebt sich die Frage nach ihrer Kennzeichnung unter den Winkelgegenpunkten.

Wir leiten zunächst zwei Abstandsbeziehungen der Winkelgegenpunkte her. Hiermit gelingt erstens eine metrische Charakterisierung des Lemoine'schen Punktes und zweitens können wir zeigen, daß die von H. Sachs [4, Satz 3.14] für die Brocard'schen Punkte bewiesenen metrischen Eigenschaften sie unter den Winkelgegenpunkten kennzeichnen.

1. Bezeichne A die affine Dreiecksebene eines Dreiecks $\Delta(A_1A_2A_3)$ und r eine feste Richtung, welche zu keiner Dreiecksseite parallel sei. Damit ist $\Delta(A_1A_2A_3)$ ein zulässiges Dreieck [4] der isotropen Ebene

$A(r)$. Legen wir in A ein x, y-Koordinatensystem durch zwei Dreiecksseiten fest, so gilt

$$A_1 = (0,0), \; A_2 = (a,0), \; A_3 = (0,b); \; a, b \in \mathbb{R}, \; ab \neq 0. \tag{1.1}$$

Die isotrope Richtung r läßt sich durch den Fernpunkt $\lambda : \; -1 : 0$ festlegen.

Spiegelt man (in Sinne der isotropen Metrik) die Verbindungsgeraden PA_i eines Punktes $P \in A(r)$ an den Winkelhalbierenden w_i $(\ni A_i)$ des Dreiecks $\Delta(A_1A_2A_3)$, so erhält man drei kopunktale Geraden $\hat{P}A_i$. Der Punkt $\hat{P}$ heißt nach K. Strubecker [6] der *Winkelgegenpunkt* von P. Die Beziehung zwischen den Winkelgegenpunkten ist involutorisch.

Geometrisch ausgezeichnete Winkelgegenpunkte sind die Brocard'schen Punkte 1. und 2. Art [2, 4, 5] und der Lemoine'sche Punkt [2] als Winkelgegenpunkt des Dreiecksschwerpunktes [6]. Der Brocard'sche Punkt 1. Art $B_1(\lambda)$ bzw. 2. Art $B_2(\lambda)$ ist dabei der gemeinsame (endliche) Punkt der drei ersten bzw. zweiten isotropen Beikreise

$$P_{1i} = (A_i; A_{i+1}A_{i+2}) \quad \text{bzw.} \quad P_{2i} = (A_i; A_{i+2}A_{i+1})$$

des Dreiecks $\Delta(A_1A_2A_3)$. Dabei bezeichnet $P(X; YZ)$ jene Parabel der Achsenrichtung $\lambda : \; -1 : 0$, welche durch die Ecke X geht und in der Ecke Y die Seite YZ des Dreiecks $\Delta(X, Y, Z)$ berührt. Nach [7] gilt die Darstellung

$$x_{B_1} = N^{-2}ab^2\lambda^2(a - \lambda b)^2, \quad y_{B_1} = N^{-2}a^2b^3\lambda^2 \tag{1.2}$$

bzw.

$$x_{B_2} = N^{-2}a^3b^2\lambda^2, \quad y_{B_2} = N^{-2}a^2b(a - \lambda b)^2 \tag{1.3}$$

mit der Abkürzung

$$N := N(\lambda) := a^2 - \lambda ab + \lambda^2 b^2. \tag{1.4}$$

Wie wir dort zeigen, beschreiben die beiden Brocard'schen Punkte $B_j(\lambda)$ in Abhängigkeit von λ [1)] dieselbe, zur Steiner'schen Hypozykloide affin äquivalente, Kurve Π_B. Betrachten wir eine feste Parameterverteilung der Brocard Punktkurve Π_B, so ist Π_B durch die Brocard Gerade B_1B_2 auf sich selbst abgebildet. Man sieht dann leicht

Satz 1. *Die Mittelpunkte der Sehnen B_1B_2 der Brocard Punktkurve Π_B eines Dreiecks $\Delta(A_1A_2A_3)$ liegen auf einer zur Steiner'schen Hypozykloide affin äquivalenten Kurve. Die Seitenmitten von $\Delta(A_1A_2A_3)$*

[1)] Betrachtungen dieser Art wurden erstmals von H.S.M. Coxeter [1] gemacht.

sind ihre Spitzen und die Spitzentangenten sind mit dem Dreiecksschwerpunkt kopunktal.

Der Lemoin'sche Punkt L kann über den isotropen Umkreis U

$$U := (x + \lambda y)^2 - ax - b\lambda^2 y = 0 \tag{1.5}$$

des Dreiecks $\Delta(A_1A_2A_3)$ wie folgt definiert werden. Zunächst heiße jede zur Tangente[2] t_i in A_i an U parallele Gerade eine *Antiparallele* zur Seitengerade A_jA_k $(i \neq j \neq k \neq i)$. Die Antiparallelen einer Dreiecksseite werden von den beiden anderen Dreiecksseiten in Punktepaaren geschnitten, deren Mittelpunkte kollinear sind. Ihr Ort heißt *Symmediane* [2]. Die drei Symmediane sind kopunktal. Ihr Schnittpunkt heißt der *Lemoine'sche Punkt* $L(\lambda)$ des Dreiecks $\Delta(A_1A_2A_3)$ [2, S. 2]. Man findet die Darstellung

$$x_L = \frac{1}{2}N^{-1}ab^2\lambda^2, \quad y_L = \frac{1}{2}N^{-1}a^2b. \tag{1.6}$$

Satz 2. *Sei $\Delta(A_1A_2A_3)$ ein Dreieck einer affinen Ebene. Dann liegen die zu allen möglichen isotropen Richtungen gehörigen Lemoine'schen Punkte auf der Steiner Ellipse*

$$b^2x^2 + abxy + a^2y^2 - ab^2x - ba^2y + \frac{a^2b^2}{4} = 0.$$

2. Zur Bestimmung des Winkelgegenpunktes $\hat{P}$ von P bedient man sich zweckmäßig des isotropen Koordinatensystems

$$x' = x + \lambda y, \quad y' = y. \tag{2.1}$$

Damit gilt für die Winkelhalbierenden w_i $(\ni A_i)$

$$\begin{aligned} &w_1 \colon y' = \frac{1}{2\lambda}x', \quad w_2 \colon y' - \frac{1}{2}\frac{ba}{a - b\lambda} = -\frac{1}{2}\frac{b}{a - b\lambda}x', \\ &w_3 \colon y' - \frac{1}{2}\frac{ba}{a - b\lambda} = \frac{a - 2b\lambda}{2\lambda(a - b\lambda)}x'. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Sind (ξ_j', η_j') die Koordinaten der Winkelgegenpunkte, so gilt für ihre Verbindungsgeraden h_{ji} $(j = 1,2;\ i = 1,2,3)$ mit den Dreieckseckpunkten A_i

[2] Zur geometrischen Deutung dieser Tangenten vergleiche [4, Satz 3.9].

$$(2.3)\qquad \begin{gathered} h_{j1}: y' = \frac{\eta'_j}{\xi'_j}x', \quad h_{j2}: y' - \frac{a\eta'_j}{a-\xi'_j} = -\frac{\eta'_j}{a-\xi'_j}x', \\ h_{j3}: y' + \frac{b(\xi'_j - \lambda\eta'_j)}{\lambda b - \xi'_j} = \frac{b-\eta'_j}{\lambda b - \xi'_j}x'. \end{gathered}$$

Aus (2.2), (2.3) folgen nach Definition der Winkelgegenpunkte die beiden unabhängigen und symmetrischen Bedingungen

(2.4)

$$\xi'_1\xi'_2 - \lambda(\xi'_1\eta'_2 + \xi'_2\eta'_1) = 0,\ \xi'_1\eta'_2 + \xi'_2\eta'_1 - b(\xi'_1 + \xi'_2) - (a - b\lambda)(\eta'_1 + \beta'_2) + ab = 0.$$

Also gilt für den Winkelgegenpunkt $\hat{P}(\xi'_2, \eta'_2)$ eines nicht auf dem Umkreis von $\Delta(A_1A_2A_3)$ gelegenen Punktes $P(\xi'_1, \eta'_1)$

$$(2.5)\qquad \begin{aligned} \xi'_2 &= \frac{\lambda\xi'_1[(a-b\lambda)\eta'_1 + b\xi'_1 - ab]}{\xi'^2_1 - a\xi'_1 + \lambda(a-\lambda b)\eta'_1}, \\ \eta'_2 &= \frac{(\xi'_1 - \lambda\eta'_1)[(a-b\lambda)\eta'_1 + b\xi'_1 - ab]}{\xi'^2_1 - a\xi'_1 + \lambda(a-\lambda b)\eta'_1}. \end{aligned}$$

Geometrisch betrachtet ist die Darstellung (2.5) unbefriedigend[3]. Benutzen wir die *normierte* Darstellung der Dreiecksseiten $\alpha_i = A_{i+1}A_{i+2}$, d.h. setzen

$$(2.6)\qquad \alpha_1 := y' + \frac{b}{a-b\lambda}x' - \frac{ab}{a-b\lambda}, \quad \alpha_2 := y' - \frac{1}{\lambda}x', \quad \alpha_3 := y',$$

so heißt $d_\lambda(P, \alpha_i) := \alpha_i(P)$ der *isotrope Abstand* des Punktes P von der Geraden $\alpha_i = 0$ [6, S. 504]. Ferner ist

$$(2.7)\qquad U(P) = \xi'^2_1 - a\xi'_1 + \lambda(a-\lambda b)\eta'_1$$

die isotrope Potenz [4] von $P(\xi'_1, \eta'_1)$ bezüglich des Umkreises U (1.5). Ist P parallel zu A_i, so auch $\hat{P}$ und umgekehrt. Bezeichnet $d_\lambda(P, A_i)$ den (orientierten) isotropen Abstand von P, A_i, so liefert (2.5) die gesuchten invarianten Darstellungen:

Satz 3. *Seien $P, \hat{P}$ isotrope Winkelgegenpunkte des zulässigen Dreiecks $\Delta(A_1A_2A_3)$ mit den normierten Seiten $\alpha_i = A_{i+1}A_{i+2}$. Dann gelten die Abstandsrelationen* $(U(P) \neq 0)$

$$(2.8)\qquad d_\lambda(\hat{P}, A_i) = \lambda(a - b\lambda)[U(P)]^{-1} d_\lambda(P, \alpha_i) d_\lambda(P, A_i)$$

---

[3] In anderen Bezeichnungen findet sich die Beziehung (2.5) bereits bei K. Strubecker [6].

und $(i \neq j \neq k \neq i;\ i,j,k \in \{1,2,3\})$

$$d_\lambda(\hat{P},\alpha_i) = -\lambda(a-b\lambda)[U(P)]^{-1} d_\lambda(P,\alpha_j) d_\lambda(P,\alpha_k). \tag{2.9}$$

Für die Winkelgegenpunkte $P, \hat{P}$ haben wir die definierende Eigenschaft

$$\omega_i + \hat{\omega}_i = 0 \tag{2.10}$$

mit

$$\omega_i := \sphericalangle(\alpha_{i+2}, A_iP), \quad \hat{\omega}_i := \sphericalangle(\alpha_{i+1}, A_i\hat{P}). \tag{2.11}$$

Wir berechnen

$$\omega_i = \frac{d_\lambda(P,\alpha_{i+2})}{d_\lambda(A_i,P)}. \tag{2.12}$$

Die Beziehungen (2.8), (2.9) und (2.12) sind der Schlüssel zu den nachstehenden Anwendungen.

3. Als Anwendung der Formel (2.8) fragen wir nach jenen Winkelgegenpunkten $P, \hat{P}$ für die $(i = 1,2,3)$

$$\frac{d_\lambda(P,A_i)}{d_\lambda(\hat{P},A_i)} = \varrho \frac{d_\lambda(A_{i+2},A_i)}{d_\lambda(A_i,A_{i+1})} \quad \text{mit} \quad \varrho \neq 0, \tag{3.1}$$

gilt. Nach 2.8 folgen notwendig

$$a^2 d_\lambda(P,\alpha_2) + \lambda b(\lambda b - a) d_\lambda(P,\alpha_1) = 0,$$
$$(\lambda b - a)^2 d_\lambda(P,\alpha_3) + \lambda ab d_\lambda(P,\alpha_2) = 0$$

mit der Lösung

$$\xi_1' = N^{-1}ab^2\lambda^2, \quad \eta_1' = N^{-2}a^2b^3\lambda^2. \tag{3.2}$$

D.h. nach (1.2) und (2.1), daß P der Brocard'sche Punkt 1. Art ist. Da nach H. Sachs [4, S. 44] die Beziehung (3.1) für die Brocard'schen Punkte 1. Art P und 2. Art $\hat{P}$ gilt, haben wir die folgende Kennzeichnung der Brocard'schen Punkte:

Satz 4. *Sei $\hat{P}$ der isotrope Winkelgegenpunkt von P im zulässigen Dreieck $\Delta(A_1A_2A_3)$ mit den orientierten Seitenlängen $|\alpha_i| := d_\lambda(A_{i+1}A_{i+2})$. Dann sind die Brocard'schen Punkte 1. Art B_1 bzw. 2. Art B_2 unter den Winkelgegenpunkten $P, \hat{P}$ durch*

$$\frac{d_\lambda(P,A_1)}{d_\lambda(\hat{P},A_1)} : \frac{d_\lambda(P,A_2)}{d_\lambda(\hat{P},A_2)} : \frac{d_\lambda(P,A_3)}{d_\lambda(\hat{P},A_3)} = \frac{|\alpha_2|}{|\alpha_3|} : \frac{|\alpha_3|}{|\alpha_1|} : \frac{|\alpha_1|}{|\alpha_2|} \tag{3.3}$$

gekennzeichnet.

Die Formel (2.12) liefert

Satz 5. *Die Brocard'schen Punkte eines Dreiecks sind unter den Winkelgegenpunkten $P, \hat{P}$ durch übereinstimmende Winkel $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$ gekennzeichnet.*

Es gilt dann

$$\frac{1}{\omega} = \frac{N}{ab} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma},$$

wenn α, β, γ die Winkel des Dreiecks $\Delta(A_1A_2A_3)$ bezeichnet [4, S. 44].

4. Der Lemoine'sche Punkt L kann nach K. Strubecker [6] als Winkelgegenpunkt des Dreiecksschwerpunktes konstruiert werden. Wie im klassischen Fall [3, 8], so lassen sich auch hier vermöge $L(\lambda)$ die Brocard'schen Punkte $B_i(\lambda)$ konstruieren. Wir wollen kurz darauf eingehen. Dazu seien

$$x_1' = \frac{a}{2}, \quad x_2' = \frac{1}{2}(a + \lambda b), \quad x_3' = \frac{1}{2}\lambda b \tag{4.1}$$

die isotropen Geraden durch die Seitenmitten des Dreiecks $\Delta(A_1A_2A_3)$. Die Gerade x_i' schneidet die Parallele durch L zu α_{i+2} im Punkte L_i. Mit (1.6) folgt

(4.2)

$$L_1 = \left(\frac{a}{2}, \frac{a^2b}{2N}\right), \quad L_2 = \left(\frac{1}{2}(a + \lambda b), \frac{b^3\lambda^2}{2N}\right), \quad L_3 = \left(\frac{\lambda b}{2}, \frac{b(a - \lambda b)^2}{2N}\right).$$

Die drei Geraden A_iL_i bzw. A_iL_{i+2} sind kopunktal. Ihr Schnittpunkt ist der Brocard'sche Punkt 1. Art bzw. 2. Art, womit die angekündigte *Konstruktion der Brocard'schen Punkte mittels des Lemoine'schen Punktes* gezeigt ist. Für den Lemoine'schen Punkt gilt folgende Charakterisierung:

Satz 6. *Seien $P, \hat{P}$ isotrope Winkelgegenpunkte des zulässigen Dreiecks $\Delta(A_1A_2A_3)$. Dann ist $\hat{P}$ genau dann der Lemoine'sche Punkt (und P der Schwerpunkt des Dreiecks), wenn die isotropen Lotabstände $d_\lambda(\hat{P}, \alpha_i)$ zu den isotropen Seitenlängen $|\alpha_i|$ des Dreiecks $\Delta(A_1A_2A_3)$ proportional sind.*

Beweis. Aus

$$d_\lambda(\hat{P}, \alpha_1) = \varrho(\lambda b - a), \quad d_\lambda(\hat{P}, \alpha_2) = \varrho(-\lambda b), \quad d_\lambda(\hat{P}, \alpha_3) = \varrho a$$

folgt für $P(\xi_1', \eta_1')$ nach (2.9)

$$\xi_1' = \frac{1}{3}(a + \lambda b), \quad \eta_1' = \frac{b}{3}.$$

D.h. P ist der Dreiecksschwerpunkt. Sein Winkelgegenpunkt ist L. Durch Einsetzen ergibt sich die Umkehrung mit $\varrho = \frac{1}{2}N^{-1}ab$. Der Proportionalitätsfaktor ist also der gehälftete Brocardwinkel ω. $\Diamond$

Literatur

[1] COXETER, H. S. M.: The affine aspect of Yaglom's Galilean Feuerbach, *Nieuw Arch. Wiskunde* **1** (1983), 212–223.

[2] LANG, J.: Zur isotropen Dreiecksgeometrie und zum Appolonischen Berührproblem in der isotropen Ebene, *Ber. der Math.-Stat. Sektion Forschungszentrum Graz, Ber.* **241** (1985), 1–11.

[3] LEMOINE, E.: Propriétés diverses du circle et de la droite de Brocard, *Mathésis* **V** (1885), 103–108.

[4] SACHS, H.: Ebene isotrope Geometrie, Vieweg, 1987.

[5] STRUBECKER, K.: Geometrie in einer isotropen Ebene, *Math.-Naturwiss. Unterr. (MNU)* **15** (1962), 297–306, 343–351, 385–394.

[6] STRUBECKER, K.: Zwei Anwendungen der isotropen Dreiecksgeometrie auf ebene Ausgleichsprobleme, *Österr. Ak. d. Wiss. math.-nat. Kl. II* **192** (1983), 497–559.

[7] TÖLKE, J.: Steiner'sche Hypozykloide als Brocardkurve mit einer Anwendung auf die isotrope Dreiecksgeometrie. In Vorbereitung.

[8] TUCKER, M.: The "triplicate-ratio" circle, *Quarterly Journal of Math.* **XIX** (1883), 342–348.