Mathematica Pannonica
6/1 (1995), 39 – 43

EIN RAUM–ZEIT-SATZ FÜR DIE DE SITTER-WELT

Walter **BENZ**

Mathematisches Seminar der Universität Hamburg, Bundesstraße 55, 20146 Hamburg, Deutschland

Hans Vogler zum 60. Geburtstag zugeeignet

Received October 1994

MSC 1991: 83 C 15, 83 C 40; 51 M 99

Keywords: Bewegung der de Sitter-Welt, Fundamentalsatz der Liegeometrie, Lichtgeraden.

Abstract: Wir zeigen mit Hilfe des Fundamentalsatzes der Liegeometrie, daß eine Bijektion der Menge der Punkte der mindestens 3-dimensionalen de Sitter-Welt, die in beiden Richtungen Lichtgeraden auf Lichtgeraden abbildet, Bewegung der de Sitter-Welt ist.

1. Der folgende Raum–Zeit-Satz für die Lorentz–Minkowski-Geometrie stammt von A.D. Alexandrov [1], [2], [3]:

Satz 1. *Eine Bijektion des $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, die in beiden Richtungen Lichtgeraden auf Lichtgeraden abbildet, ist das Produkt einer Streckung und einer Lorentztransformation.*

Wir haben in [4] gezeigt, daß Satz 1 unmittelbar auf den Fundamentalsatz der Laguerregeometrie zurückgeführt werden kann. Diesen Sachverhalt haben wir ausführlicher in unserem Lehrbuch [5] dargestellt.

J. Lester [7] hat Satz 1 auf die de Sitter-Welt (S^n, Δ^n) übertragen:

Satz 2. *Eine Bijektion des S^n, $n \geq 3$, die in beiden Richtungen Lichtgeraden auf Lichtgeraden abbildet, ist eine Bewegung der de Sitter-Welt (S^n, Δ^n).*

Es ist das Ziel der vorliegenden Note, Satz 2 unmittelbar aus dem

Fundamentalsatz der Liegeometrie herzuleiten.

2. Für die Elemente $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$, $y = (y_1, \ldots, y_{n+1})$ des $\mathbb{R}^{n+1}$ benutzen wir das pseudo-euklidische Skalarprodukt

$$xy := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1}. \tag{1}$$

Es ist dann gesetzt

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x^2 = 1\}.$$

Die Gruppe Δ^n der Bewegungen von S^n ist die Gruppe der Lorentztransformationen des $\mathbb{R}^{n+1}$, die den Ursprung festlassen. Es handelt sich also dabei genau um die Abbildungen

$$f(x) = x \cdot L, \; f : S^n \to S^n,$$

mit

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & \ldots & l_{1,n+1} \\ \vdots & & \\ l_{n+1,1} & \ldots & l_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

und $l_{ij} \in \mathbb{R}$, $LML^T = M$,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Geometrie (S^n, Δ^n) heißt n-dimensionale de Sitter-Welt (s. das Buch [6] des Autors). Ist E eine 2-dimensionale Ebene des $\mathbb{R}^{n+1}$, die den Ursprung enthält, so heißen die Zusammenhangskomponenten von $E \cap S^n$ *Geraden* der de Sitter-Welt. Die Ellipsen hierunter heißen *geschlossene Geraden*, die Hyperbeläste *offene Geraden*, die euklidischen Geraden *Lichtgeraden* oder *Null-Geraden*.

Lemma 3. *Seien g, h Lichtgeraden des S^n, $n \geq 3$, mit $g \cap h = \emptyset$. Genau dann sind diese Geraden im euklidischen Sinne parallel, wenn es keine Lichtgerade l gibt mit*

$$l \cap g \neq \emptyset \text{und } l \cap h \neq \emptyset.$$

Beweis. Da Δ^n nur affine Abbildungen enthält, erhalten diese die euklidische Parallelität von Geraden. Das Transitivitätsverhalten von Δ^n erlaubt es,

$$g = \{a + \lambda p \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

ohne Einschränkung in der Gestalt

$$a := (1, 0, \ldots, 0) \text{ und } p := (0, 1, 0, \ldots, 0, 1)$$

anzunehmen. Gelte nun

$$h = \{b + \mu p \mid \mu \in \mathbb{R}\} \subset S^n$$

mit $g \cap h = \emptyset$. Angenommen, es gäbe eine Lichtgerade l mit

$$l \cap g = \{a + \alpha p\}, \; l \cap h = \{b + \beta p\}.$$

Dann wäre

$$(2) \qquad 0 = (a + \alpha p - b - \beta p)^2 = (a - b)^2 + 2(\alpha - \beta)\, p\,(a - b)$$

unter Verwendung des Produktes (1). Aus $g, h \subset S^n$ folgt

$$ap = 0 \text{ und } bp = 0.$$

Mit (2) gilt also

$$0 = (a - b)^2 = 2\,(1 - ab),$$

d.h. $b_1 = 1$ für $b =: (b_1, b_2, \ldots, b_{n+1})$. Damit ist aber

$$(3) \qquad b \in g$$

wegen $bp = 0$, d.h. wegen $b = (1, b_2, 0, \ldots, 0, b_2)$. Die Aussage (3) widerspricht aber $g \cap h = \emptyset$.

Wir nehmen nun umgekehrt an, daß $g \nparallel h$ und $g \cap h = \emptyset$ erfüllt sind. Aus

$$h = \{b + \mu q \mid \mu \in \mathbb{R}\} \subset S^n$$

folgt $q \neq 0 = q^2$ und $bq = 0$. Es gilt

$$(4) \qquad p \cdot q \neq 0.$$

Im anderen Falle würde

$$(p_1\, q_1 + \ldots + p_n\, q_n)^2 = (p_{n+1}\, q_{n+1})^2 = (p_1^2 + \ldots p_n^2)(q_1^2 + \ldots + q_n^2)$$

folgen, d.h. p, q wären linear abhängig, d.h. g, h wären parallel. Wir beachten nun, daß

$$0 = (a + \alpha p - b - \beta q)^2 = (a - b)^2 - 2[\alpha bp + \beta aq + \alpha\beta pq]$$

eine Lösung $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt: Im Falle $bp \neq 0$ nehmen wir eine Lösung $(\alpha, 0)$, im Falle $bp = 0 \neq aq$ eine Lösung $(0, \beta)$. Ist schließlich $bp = 0 = = aq$, so existiert wegen (4) eine Lösung $(\alpha, 1)$. Also erhalten wir eine Lichtgerade

$$l = \{c + \nu r \mid \nu \in \mathbb{R}\},$$

$c = a + \alpha p$, $r = b + \beta q - c$, die g und h schneidet. $\Diamond$

Satz 4. *Sei P^n die Menge aller Parallelklassen der Lichtgeraden von S^n, $n \geq 3$. Dann gibt es eine Bijektion ψ von $S^n \cup P^n$ auf die Liequadrik*

$$L^{n-1} = \{\mathbb{R}(x_0, \ldots, x_{n+1}) \in \Pi^{n+1} \mid x_0^2 + x_{n+1}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\},$$

Π^{n+1} der $(n+1)$-dimensionale reelle projektive Raum, derart, daß sich $\psi(x)$, $\psi(y)$ genau dann berühren, wenn es eine Lichtgerade l durch x, y gibt im Falle $x, y \in S^n$, oder wenn es eine Lichtgerade l in y durch x gibt im Falle $x \in S^n$ und $y \in P^n$. (Entsprechendes für $y \in S^n$ und $x \in P^n$). Die Abbildung

$$\psi(x) := \begin{cases} \mathbb{R}(1, x_1, \ldots, x_{n+1}) & x \in S^n \\ & \textit{für} \\ \mathbb{R}(0, x_1, \ldots, x_{n+1}) & x \in P^n \end{cases}$$

ist eine solche Bijektion, wobei $x \in P^n$ repräsentiert sei durch ein beliebiges $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ mit

$$\{b + \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \in x$$

für passendes $b \in S^n$.

Beweis. Für verschiedene $x, y \in S^n$ berühren sich $\psi(x)$, $\psi(y)$ genau dann, wenn

$$x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1} = 1 \tag{5}$$

gilt. Aber (5) ist gleichwertig mit der Aussage, daß

$$\{x + \lambda(y - x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Lichtgerade durch x, y ist. Wegen (4) gibt es keine verschiedenen $p, q \in \in P^n$ derart, daß sich $\psi(p)$, $\psi(q)$ berühren. Ist schließlich $x \in S^n$ und $y \in P^n$, so berühren sich $\psi(x)$ und $\psi(y)$ genau dann, wenn

$$x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1} = 0 \tag{6}$$

gilt. (6) besagt aber genau, daß

$$\{x + \lambda(y_1, \ldots, y_{n+1}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Lichtgerade ist. $\Diamond$

Wir kommen damit zum **Beweis von Satz 2**. Sei also σ eine Bijektion von S^n, $n \geq 3$, die in beiden Richtungen Lichtgeraden auf Lichtgeraden abbildet. Aus Lemma 3 folgt, daß die Lichtgeraden g, h

genau dann parallel sind, wenn $\sigma(g) \parallel \sigma(h)$ gilt. Damit wird P^n durch σ permutiert. Erweitern wir in diesem Sinne

$$\sigma : S^n \to S^n \text{ auf } \sigma : S^n \cup P^n \to S^n \cup P^n,$$

so ist σ auch Bijektion von $S^n \cup P^n$. Die Abbildung ω, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S^n \cup P^n & \xrightarrow{\psi} & L^{n-1} \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \omega \\ S^n \cup P^n & \xrightarrow{\psi} & L^{n-1} \end{array}$$

kommutativ macht, ist nach Satz 4 Lietransformation. Es sind aber Lietransformationen von L^{n-1} Einschränkungen projektiver Transformationen von $\Pi^{n+1}(\mathbb{R})$ auf L^{n-1}. Wegen $\sigma(P^n) = P^n$ müssen diese projektiven Transformationen sogar affine Abbildungen von $\mathbb{R}^{n+1}$ sein, die wegen $\sigma(S^n) = S^n$ damit Lorentztransformationen sind. Also ist $\sigma \in \Delta^n$. $\Diamond$

Literaturverzeichnis

[1] ALEXANDROV, A. D.: Seminar Report, Uspehi Mat. Nauk. 5 (1950), no. 3 (37), 187.

[2] ALEXANDROV, A. D.: A contribution to chronogeometry, *Canad. J. Math.* **19** (1967), 1119–1128.

[3] ALEXANDROV, A.D.: Mappings of Spaces with Families of cones and Space–Time-Transformations, *Annali di Matematica* **103** (1975), 229–257.

[4] BENZ, W.: Zurückführung eines Satzes der Raum–Zeit-Geometrie auf den Fundamentalsatz der Laguerregeometrie, *Anzeiger der math.-naturw. Klasse der Österr. Akad. d. Wiss.*, Jahrgang 1980, Nr. 7, 117–121.

[5] BENZ, W.: Geometrische Transformationen (unter besonderer Berücksichtigung der Lorentztransformationen), BI–Wissenschaftsverlag, Mannheim–Leipzig–Wien–Zürich, 1992.

[6] BENZ, W.: Real Geometries, BI–Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig–Wien–Zürich, 1994.

[7] LESTER, J.: Separation-Preserving Transformations of De Sitter Spacetime, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamb.* **53** (1983) 217–224.