Mathematica Pannonica
5/1 (1993), 91 – 104

BEWEGUNGSVORGÄNGE DES FLAGGENRAUMES MIT SPHÄRISCHEN BAHNEN II

DIE DREIPARAMETRIGEN BEWEGUNGSVORGÄNGE

Johann **Lang**

Institut für Geometrie, Technische Universität, Kopernikusgasse 24, A-8010 Graz, Österreich

Received January 1994

AMS Subject Classification: 53 A 17

Keywords: Zweifach isotroper Raum, Flaggenraum, Kinematik des Flaggenraumes, sphärische Bahnen.

Abstract: In part I of this paper the four parameter motions of flag space, which move some of the points on spherical trajectories, were described. Part II. will now treat with three parameter motions. A complete classification of these motions is given. The two and one parameter cases turn out to be Bricard motions or motions, which can be imbedded into more parameter cases. This is why the posed problem is entirely solved for the case of flag space.

In J. Lang [1] wurde ein Weg beschrieben, der es erlaubt, Bewegungsvorgänge des Flaggenraumes, welche sphärische Bahnen besitzen, systematisch zu untersuchen. Im ersten Teil [2] dieser Arbeit[1] wurden die vierparametrigen Bewegungsvorgänge mit dieser Eigenschaft beschrieben, indem unter Verwendung eines Übertragungsprinzipes die Geraden eines sechsdimensionalen projektiven Raumes bezüglich einer Gruppe (10) klassifiziert wurden. Die fünfparametrigen Bewegungsvorgänge, welche Punkte mit sphärischen Bahnen besitzen, sind nicht von

[1]Die Verweise auf die Formeln (1) bis (74) beziehen sich auf diesen ersten Teil der Arbeit.

Interesse, da ihnen Punkte (0-dimensionale Unterräume) des Raumes $P(V)$ entsprechen. Sie sind entweder trivial oder führen nur die Punkte einer vollisotropen Geraden des Gangraumes auf Sphären (siehe J. Lang [1], Satz 2).

Die Klassifikation der Ebenen des „*Bedingungsraumes* $P(V)$" im Abschnitt 2 von [2] liefert die dreiparametrigen Bewegungsvorgänge des Flaggenraumes mit sphärischen Bahnen dreidimensionale Teilräume von $P(V)$ (Abschnitt 3) ergeben zweiparametrige Bewegungsvorgänge mit sphärischen Bahnen. In beiden Abschnitten werden wir auch auf Bricard-Bewegungsvorgänge stoßen, welche (unter Voraussetzung 4-maliger stetiger Differenzierbarkeit) schon von O. Röschel [3] betrachtet wurden.

Wie wir in Abschnitt 4 zeigen können, ergeben sich bei Betrachtung der vier- und höherdimensionalen Unterräume des Raumes $P(V)$ Teilzwangläufe mehrparametriger Bewegungsvorgänge, die schon in den vorangehenden Abschnitten beschrieben worden sind (siehe auch Fußnote 5). Somit ist *die betrachtete Fragestellung mit den hier behandelten drei- und zweiparametrigen Bewegungsvorgängen vollständig gelöst* (siehe dazu Fußnote 6).

2. Klassifikation der zweidimensionalen Bedingungsräume

Wir wollen zunächst alle jene Bewegungsvorgänge untersuchen, welche den Ebenen des Bedingungsraumes entsprechen. Sei T eine Ebene im Bedingungsraum $P(V)$. Der Raum W_{06} ist definiert durch $\omega_0 = \omega_6 = 0$.

2.1. Der Schnitt von T mit dem Raum W_{06} ist ein Punkt

Wir setzen also:

Fall 1: $T \cap W_{06} =: K$. Die Ebene T sei die Verbindungsebene dreier Punkte $T = [GKH]$, wobei wir neben $K \in W_{06}$ noch $G \in H_0 \setminus W_{06}$ und $H \in H_6 \setminus W_{06}$ wählen. Wir setzen an[2]:

[2] Wir haben zu berücksichtigen, daß der Punkt K ein ausgezeichneter Punkt der Ebene T ist, wohingegen die Punkte $G \in H_0$ und $H \in H_6$ willkürlich in der entsprechenden Spur $T \cap H_0$ bzw. $T \cap H_6$ gewählt wurden. Da wir aber Aussagen erwarten, die bezüglich der Gruppe (10) invariant sind, haben wir diese Punkte bei

$$
\begin{aligned}
&G \ldots (0\colon \gamma_1 + \sigma\kappa_1\colon \gamma_2 + \sigma\kappa_2\colon \gamma_3 + \sigma\kappa_3\colon \gamma_4 + \sigma\kappa_4\colon \gamma_5 + \sigma\kappa_5\colon 1)\\
(75)\quad &K \ldots (0\colon \kappa_1\colon \kappa_2\colon \kappa_3\colon \kappa_4\colon \kappa_5\colon 0)\\
&H \ldots (1\colon \chi_1 + \tau\kappa_1\colon \chi_2 + \tau\kappa_2\colon \chi_3 + \tau\kappa_3\colon \chi_4 + \tau\kappa_4\colon \chi_5 + \tau\kappa_5\colon 0).
\end{aligned}
$$

Man beachte, daß die Bedingung $\kappa_3 \neq 0$ oder auch $\kappa_4 \neq 0$ bezüglich (10) invariant ist. Wir können also unterscheiden:

Fall 1a: $\kappa_3\kappa_4 \neq 0$. Wir setzen $\kappa_3 = 1$ und erhalten[3]:

$$
\begin{aligned}
&G \ldots (0\colon 0\colon \gamma_2\colon 0\colon 0\colon 0\colon 1)\\
(76)\quad &K \ldots (0\colon 0\colon 0\colon 1\colon \kappa_4\colon \kappa_5\colon 0)\\
&H \ldots (1\colon \chi_1\colon \chi_2\colon 0\colon \chi_4\colon \chi_5\colon 0).
\end{aligned}
$$

Je nachdem[4], ob

1. $\chi_4 \neq 0$,
2. $\chi_4 = 0, \quad \chi_2 \neq 0$, oder
3. $\chi_2 = \chi_4 = 0, \quad \chi_5 \neq 0$

ist, löst man das aus den Bedingungen G, K, H

$$
\begin{aligned}
&G \ldots \gamma_2 Y_2 + Y_6 &&= 0\\
(77)\quad &K \ldots Y_3 + \kappa_4 Y_4 + \kappa_5 Y_5 &&= 0\\
&H \ldots Y_0 + \chi_1 Y_1 + \chi_2 Y_2 + \chi_4 Y_4 + \chi_5 Y_4 &&= 0
\end{aligned}
$$

und der Bedingung (13) bestehende System geeignet auf und erhält (78), (79) bzw. (80) also Normalformen der entsprechenden dreiparametrigen Bewegungsvorgänge:

$$
\begin{aligned}
&\bar{x} = x + t_1\\
(78)\quad &\bar{y} = y + t_2 x + \frac{\chi_1\kappa_4 t_1 + \chi_2\kappa_4 t_2 + \chi_5\kappa_4 t_3 + \kappa_4 t_1^2}{\chi_4} - \kappa_5 t_3 \qquad \chi_4 \neq 0.\\
&\bar{z} = z - \frac{\chi_1 t_1 + \chi_2 t_2 + \chi_5 t_3}{\chi_4} x + t_3 y + \frac{\chi_1\gamma_4 t_1 + \chi_2\gamma_4 t_2 + \chi_5\gamma_4 t_3 + \gamma_4 t_1^2}{\chi_4} - \gamma_2 t_2
\end{aligned}
$$

---

der Suche nach Normalformen zu spezialisieren: Für die im folgenden verwendeten Parameter σ, τ sind geeignete Werte zu wählen.

[3] Mit Hilfe von (10) erhalten wir bei

$$
t_a = \frac{-\gamma_3\kappa_4 + \kappa_3\gamma_4 + \kappa_2}{2},\ t_b = -\kappa_1,\ t_c = \frac{-\gamma_3\kappa_4\kappa_5 - \gamma_4\kappa_5 + 2\kappa_4\gamma_5 + \kappa_2\kappa_5}{2\kappa_4},
$$

$$
t_d = -\gamma_1 + \kappa_1\gamma_3,\ t_e = \frac{-\gamma_3\kappa_4 + \gamma_4 - \kappa_2}{2\kappa_4},\ \sigma = \frac{-\gamma_3\kappa_4 - \gamma_4 + \kappa_2}{2\kappa_3\kappa_4},\ \tau = -\chi_3
$$

die angegebene Normalform (76).

[4] Der Wert χ_4 ändert sich beim Übergang auf die Normalform (76) nicht mehr; ebenso ändert sich im Fall $\chi_4 = 0$ der Wert χ_5 beim Übergang zur Normalform nicht. Die entsprechenden Fallunterscheidungen sind also, nachdem $\tau = -\chi_3$ gesetzt wurde, einfach zu treffen.

$$
\begin{aligned}
&\bar{x} = x + t_1\\
(79)\qquad &\bar{y} = y - \tfrac{\chi_1 t_1 + \chi_5 t_2 + t_1^2}{\chi_2} x - \kappa_4 t_3 - \kappa_5 t_2 \qquad \chi_2 \neq 0.\\
&\bar{z} = z + t_3 x + t_2 y + \tfrac{\chi_2\gamma_2 t_1 + \chi_5\gamma_2 t_2 + \gamma_2 t_1^2}{\chi_2} - \gamma_4 t_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\bar{x} = x + t_1\\
(80)\qquad &\bar{y} = y + t_2 x + \tfrac{\kappa_5(\chi_1 t_1 + t_1^2)}{\chi_5} - \kappa_4 t_3 \qquad \chi_5 \neq 0.\\
&\bar{z} = z + t_3 x - \left(\tfrac{\chi_1}{\chi_5} t_1 + t_1^2\right) y - \gamma_2 t_2 - \gamma_4 t_3
\end{aligned}
$$

Bei $\chi_2 = \chi_4 = \chi_5 = 0$ erhält man einen Bewegungsvorgang, der ein Teilzwanglauf eines vierparametrigen Bewegungsvorganges (siehe Abschnitt 1) ist[5].

In jedem dieser unter Fall 1a zusammengefaßten Typen betrachten wir den Schnitt der Ebene $T = [GKH] \subset P(V)$ mit der Kegelfläche Θ. Aus der Parameterdarstellung der Ebene T

$$
(81)\qquad \begin{aligned}
&(\omega_0 : \ldots : \omega_6) =\\
&= (\mu_2 : \chi_1\mu_2 : \gamma_2\mu_0 + \chi_2\mu_2 : \mu_1 : \kappa_4\mu_1 + \chi_4\mu_2 : \kappa_5\mu_1 + \chi_5\mu_2 : \mu_0)
\end{aligned}
$$

und (8) erhalten wir die Gleichung

$$
(82)\qquad T \cap \Theta \ldots \gamma_2\mu_0^2 + \chi_2\mu_0\mu_2 - \kappa_4\mu_1^2 - \chi_4\mu_1\mu_2 = 0
$$

des Schnittes $T \cap \Theta$. Genau bei

$$
(83)\qquad \gamma_2 = \kappa_4 = \chi_2 = \chi_4 = 0
$$

ist $T \subset \Theta$. Eine Parameterdarstellung jener Punktmenge des Gangraumes, deren Elemente bei einem Bewegungsvorgang des betrachteten Falles Sphären durchlaufen, kann für jeden der angeführten Unterfälle von Fall 1a durch

$$
(84)\qquad x_0(\mu_0, \mu_1, \mu_2) = \frac{\mu_1\kappa_4 + \mu_2\chi_4}{\mu_0}, \quad y_0(\mu_0, \mu_1, \mu_2) = \frac{\mu_1\kappa_5 + \mu_2\chi_5}{\mu_0}
$$

angegeben werden, wobei (82) zu berücksichtigen ist. (84) ist genau dann die Darstellung einer isotropen Ebene, wenn

[5] Immer dann, wenn die Schnittkurve zwischen dem Raum T und der Hyperfläche Θ zerfällt, ist der zugehörige Bewegungsvorgang Teil eines vierparametrigen Bewegunsgsvorganges, der schon in Abschnitt 1 behandelt wurde. Die Untersuchung solcher Bewegungen ist nur dann interessant, wenn die Menge jener Punkte, die auf sphärischen Bahnen laufen, sich von jener des vierparametrigen Bewegungsvorganges unterscheidet. Dies ist hier nicht der Fall.

$$\kappa_4\chi_5 - \chi_4\kappa_5 = 0 \tag{85}$$

ist. Die Punktmenge ist also im allgemeinen eine vollisotrope Zylinderfläche 2. Ordnung[6]. Bei (85) degeneriert die Punktmenge (84) in eine isotrope oder vollisotrope Ebene und es ergibt sich ein Bewegungsvorgang, den wir hier nicht gesondert betrachten müssen (siehe Fußnote 5).

Ist (85) nicht erfüllt, so zerfällt die vollisotrope Zylinderfläche 2. Ordnung, deren Punkte sphärische Bahnen durchlaufen, genau dann, wenn die Schnittkurve $T \cap \Theta$ im Bedingungsraum selbst singulär ist, also bei

$$\kappa_4\chi_2^2 - \gamma_2\chi_4^2 = 0. \tag{86}$$

Die Typen (78), (79) umfassen auch Fälle singulärer Punktmengen; diese bilden jeweils ein Paar isotroper oder vollisotroper Ebenen, die im Sonderfall auch in die absolute Ebene fallen können. Beim Typ (80) ist die Punktmenge stets singulär.

Die Bahnsphären sind aus (9) zu erhalten und besitzen die Darstellung

$$\begin{aligned}\mu_0\mu_2x^2 + (\mu_0\mu_1\kappa_1 + \mu_0\mu_2\chi_1 - 2\mu_1\mu_2\kappa_4 - 2\mu_2^2\chi_4)x+\\ +\mu_0\mu_1y + \mu_0^2z + E = 0.\end{aligned} \tag{87}$$

Ihr Radius ist gegeben durch

$$R(\mu_0, \mu_1, \mu_2) = -\frac{\mu_0}{2\mu_2}. \tag{88}$$

Der Fernscheitel der Bahnsphäre hat die Koordinaten

$$U\ldots(0{:}\,0{:}\,-\mu_0{:}\,\mu_1). \tag{89}$$

Wir haben damit den

Satz 1. *Im Fall* 1a *ergeben sich Normalformen der Gestalt* (78), (79), (80). *Die Punkte mit sphärischen Bahnen erfüllen eine vollisotrope Zylinderfläche zweiter Ordnung, welche durch* (82) *und* (84) *gegeben ist. Die zugehörigen Bahnsphären – ihre Radien und ihre Fernscheitel sind durch* (88) *und* (89) *gegeben – sind durch die Gleichung* (87) *beschrieben. Ist* (83) *erfüllt, so handelt es sich um einen*

---

[6]Die Flächen zweiter Ordnung des Flaggenraumes wurden systematisch klassifiziert in [4]. Die hier auftretenden Zylinderflächen gehören im allgemeinen zum Typ 32 der dort angegebenen Klassifikation, in speziellen Fällen zum Typ 33, 43 oder 55.

Bricard-Bewegungsvorgang. Alle Punkte des Gangraumes werden auf Sphären geführt. Der Bewegungsvorgang gehört dann zu Typ (80). *Zwei Zwangläufe, die dieselben Invarianten*[7] $\gamma_2, \kappa_4, \kappa_5, \chi_2, \chi_4, \chi_5$ *besitzen, sind konjugiert bezüglich der Gruppe* $G_6^{(2)}$.

Der Bricard-Bewegungsvorgang aus (80) findet sich auch in O. Röschel [16].

Man beachte, daß auch χ_3 in (75) eine Invariante sowohl bezüglich der Gruppe (10) als auch bezüglich des Ansatzes (75) ist. Wir unterscheiden also:

Fall 1b: $\kappa_3 = 0$, $\kappa_4 \neq 0$. Sei vorerst $\chi_3 \neq 0$. Mit (75) und $\kappa_4 = 1$ erhalten wir[8]

$$\begin{aligned} &G \ldots (0\colon 0\colon \gamma_2\colon 0\colon 0\colon 0\colon 1) \\ (90) \qquad &K \ldots (0\colon \kappa_1\colon \kappa_2\colon 0\colon 1\colon 0\colon 0) \\ &H \ldots (1\colon \chi_1\colon 0\colon \chi_3\colon 0\colon \chi_5\colon 0). \end{aligned}$$

Daraus gewinnen wir die Normalform

$$\begin{aligned} &\bar{x} = x + t_1 \\ (91) \qquad &\bar{y} = y + t_2 x - \tfrac{\chi_5 t_3 + \chi_1 t_1 + t_1^2}{\chi_3} \qquad \chi_3 \neq 0. \\ &\bar{z} = z - (\kappa_1 t_1 + \kappa_2 t_2)x + t_3 y - \gamma_2 t_2 \end{aligned}$$

Die Punkte, welchen sphärische Bahnen zugewiesen sind, ergeben sich aus

$$(92) \qquad x_0(\mu_0, \mu_1, \mu_2) = \frac{\mu_1}{\mu_0}, \qquad y_0(\mu_0, \mu_1, \mu_2) = \frac{\mu_2}{\mu_0}\chi_5.$$

und der Gleichung

$$(93) \qquad \mu_0^2 \gamma_2 + \mu_0 \mu_1 \kappa_2 - \mu_1 \mu_2 \chi_3 = 0.$$

Dieser vollisotrope Zylinder zweiter Ordnung zerfällt genau dann, wenn entweder $\chi_5 = 0$ ist (eine isotrope Ebene) oder wenn

$$(94) \qquad \gamma_2 = 0$$

gilt. Bei (94) zerfällt die Menge aller sphärisch geführten Punkte in eine vollisotrope Ebene $\nu \ldots \mu_1 = 0$ und eine isotrope Ebene, welche

[7] Eine geometrische Deutung der auftretenden Invarianten wäre eine reizvolle Aufgabe, welche aber vom Umfang den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde.

[8] Mit $t_a = \frac{\chi_2 - \kappa_2 \chi_4}{\chi_3}$, $t_b = \kappa_5$, $t_c = \frac{\gamma_5 \chi_3 + \kappa_5 \chi_2 - \kappa_2 \kappa_5 \chi_4 - \gamma_4 \kappa^5 \chi_3}{\chi_3}$, $t_d = \frac{\kappa_1 \kappa_2 \chi_4 - \gamma_1 \chi_3 + \kappa_1 \gamma_4 \chi_3 - \kappa_1 \chi_2 - \gamma_3 \kappa_5 \chi_3}{\chi_3}$, $t_e = -\gamma_3, \sigma = \frac{\chi_2 - \kappa_2 \chi_4 - \gamma_4 \chi_3}{\chi_3}$, $\tau = -\chi_4$ erhalten wir aus (75) mit Hilfe von (10) die Gestalt (90).

durch $\mu_0 : \mu_2 = \chi_3 : \kappa_2$ und (92) gegeben ist. Die Bahnsphären werden durch

$$\mu_2\mu_0 x^2 + (\mu_0\mu_1\kappa_1 + \mu_0\mu_2\chi_1 - 2\mu_1\mu_2)x + \mu_0\mu_2\chi_3 y + \mu_0^2 z + E = 0, \tag{95}$$

ihre Radien durch (88) und ihre Fernscheitel durch

$$U \ldots (0\colon 0\colon -\mu_0\colon \mu_2\chi_3) \tag{96}$$

festgelegt.

Ist hingegen $\chi_3 = 0$, so ergibt sich in Fall 1b ein Bewegungsvorgang, der schon in einem vierparametrigen Bewegungsvorgang (siehe Fußnote 5) enthalten und deshalb hier nicht von Interesse ist.

Fall 1c: $\kappa_4 = 0, \kappa_3 \neq 0$. Sei etwa $\kappa_3 = 1$. Wir erhalten nur bei $\chi_4 \neq 0$ ein interessantes Resultat: Die Normalform des Unterraumes T wird aufgespannt von den Punkten[9]

$$\begin{aligned} &G \ldots (0\colon 0\colon \gamma_2\colon 0\colon 0\colon 0\colon 1)\\ &K \ldots (0\colon 0\colon \kappa_2\colon 1\colon 0\colon \kappa_5\colon 0)\\ &H \ldots (1\colon \chi_1\colon 0\colon 0\colon \chi_4\colon \chi_5\colon 0). \end{aligned} \tag{97}$$

und wir errechnen daraus die Normalform des Bewegungsvorganges zu

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + t_1\\ \bar{y} &= y + t_2 x - \kappa_2 t_2 - \kappa_5 t_3 \qquad\qquad \chi_4 \neq 0.\\ \bar{z} &= z - \tfrac{t_3\chi_5 + t_1\chi_1 + t_1^2}{\chi_4} x + t_3 y - \gamma_2 t_2 \end{aligned} \tag{98}$$

Die Punkte mit sphärischen Bahnen sind gegeben durch

$$x_0(\mu_0, \mu_1, \mu_2) = \frac{\chi_4\mu_2}{\mu_0}, \qquad y_0(\mu_0, \mu_1, \mu_2) = \frac{\kappa_5\mu_1 + \chi_5\mu_2}{\mu_0} \tag{99}$$

und die Gleichung

$$-\chi_4\mu_1\mu_2 + \gamma_2\mu_0^2 + \kappa_2\mu_0\mu_1 = 0. \tag{100}$$

Das ist die Darstellung einer vollisotropen Zylinderfläche zweiter Ordnung, welche genau für

$$\gamma_2\kappa_5 = 0 \tag{101}$$

in ein Ebenenpaar ($\gamma_2 = 0$) oder eine Doppelebene ($\kappa_5 = 0$) zerfällt. Der Fall $\kappa_5 = 0$ ist also nicht von Interesse (siehe Fußnote 5). Die Bahnträgersphären sind von der Gestalt

---

[9]Wir setzen in (75) und (10) $t_a = \gamma_4$, $t_b = -\kappa_1$, $t_c = -\gamma_3\kappa_5 + \gamma_5 + \frac{\kappa_5\chi_2 - \kappa_2\kappa_5\chi_3}{\chi_4}$, $t_d = \kappa_1\gamma_3 - \gamma_1$, $t_e = \frac{\kappa_2\chi_3 - \chi_2}{\chi_4}$, $\sigma = \frac{-\gamma_3\chi_4 + \chi_2 - \kappa_2\chi_3}{\chi_4}$, $\tau = -\chi_3$.

$$\mu_2\mu_0 x^2 + (\mu_0\mu_2\chi_1 - \mu_2^2\chi_4)x + \mu_0\mu_1 y + \mu_0\mu_2\chi_4 z + E = 0, \tag{102}$$

ihre Radien sind durch (88), ihre Fernscheitel durch (89) gegeben.

Fall 1d: $\kappa_3 = \kappa_4 = 0$. Dieser Fall ist nur für $\kappa_2\kappa_5\chi_3\chi_4 \neq 0$ interessant[10]. Wir setzen also $\kappa_2 = 1$. Fall 1d liefert[11]

$$\begin{aligned} &G \ldots (0{:}\,0{:}\,0{:}\,0{:}\,0{:}\,0{:}\,1) \\ &K \ldots (0{:}\,\kappa_1{:}\,1{:}\,0{:}\,0{:}\,\kappa_5{:}\,0) \\ &H \ldots (1{:}\,\chi_1{:}\,0{:}\,\chi_3{:}\,\chi_4{:}\,0{:}\,0). \end{aligned} \tag{103}$$

Wir erhalten die Normalform des Bewegungsvorganges als

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + t_1 \\ \bar{y} &= y - (t_1\kappa_1 + t_3\kappa_5)x + t_2 \qquad\qquad \chi_4 \neq 0. \\ \bar{z} &= z - \tfrac{t_2\chi_3 + t_1\chi_1 + t_1^2}{\chi_4}x + t_3 y - \gamma_2 t_2 \end{aligned} \tag{104}$$

Die Punkte mit sphärischen Bahnen sind gegeben durch

$$x_0(\mu_0,\mu_1,\mu_2) = \frac{\chi_4\mu_2}{\mu_0}, \qquad y_0(\mu_0,\mu_1,\mu_2) = \frac{\kappa_5\mu_1}{\mu_0}, \tag{105}$$

wobei die Werte $\mu_0{:}\,\mu_1{:}\,\mu_2$ der Gleichung

$$\kappa_2\mu_0\mu_1 - \chi_3\chi_4\mu_2^2 = 0 \tag{106}$$

genügen müssen. Das ist die Darstellung einer vollisotropen Zylinderfläche zweiter Ordnung, welche genau für

$$\kappa_2\kappa_5\chi_3\chi_4 = 0 \tag{107}$$

in eine isotrope Ebene degeneriert. Die Bahnträgersphären sind von der Gestalt

$$\mu_2\mu_0 x^2 + (\mu_0\mu_2\kappa_1 - \mu_0\mu_2\chi_1 - 2\mu_2^2\chi_4)x + \mu_0\mu_2\chi_3 y + \mu_0^2 z + E = 0, \tag{108}$$

ihre Radien sind durch (88), ihre Fernscheitel durch (96) gegeben.

Wir fassen zusammen:

---

[10] Man beachte, daß die Werte $\kappa_2, \kappa_5, \chi_3, \chi_4$ wegen $\kappa_3 = \kappa_4 = \kappa_6 = \chi_6 = 0$ invariant sowohl bezüglich (10) als auch bezüglich des Ansatzes (75) sind; diese Fallunterscheidung ist also auch vor dem Übergang zu einer Normalform sinnvoll.

[11] Wir wählen hier $t_a = \gamma_4$, $t_b = \frac{\gamma_3\kappa_5\chi_4 + \chi_5 + \gamma_4\kappa_5\chi_3 - \kappa_5\chi_2}{\chi_4}$, $t_c = \gamma_3\gamma_4\kappa_5 - \gamma_2\kappa_5 + \gamma_5$, $t_d = \frac{-\gamma_1\chi_4 - \kappa_1\gamma_3\gamma_4\chi_4 + \kappa_1\gamma_2\chi_4 - \gamma_3^2\kappa_5\chi_4 - \gamma_3\chi_5 - \gamma_3\gamma_4\kappa_5\chi_3 - \gamma_3\kappa_5\chi_2}{\chi_4}$, $t_e = -\gamma_3$, $\sigma = \gamma_3\gamma_4 - \gamma_2$, $\tau = \gamma_2\chi_4 + \gamma_4\chi_3 - \chi_2$ und erhalten aus (75) die Gestalt (103).

Satz 2. *In den Fällen* 1b, 1c, 1d *ergeben sich Bewegungsvorgänge mit Normalformen* (91), (98), (104). *Die Menge der sphärisch geführten Punkte ist jeweils durch* (92) *und* (93), (99) *und* (100), (105) *und* (106) *gegeben. Sie ist im allgemeinen eine vollisotrope Zylinderfläche zweiter Ordnung, in speziellen Fällen auch ein Paar vollisotroper Ebenen oder eine einzige vollisotrope Ebene.* (91) *wird bei* $\gamma_2 = \kappa_2 = \chi_3 = 0 \neq \chi_5$ *zu einem Bricard-Bewegungsvorgang. Unter* (98) *treten keine solchen Spezialfälle auf. Bei* (104) *werden genau dann* alle *Punkte des Gangraumes auf sphärischen Bahnen geführt, wenn neben* $\kappa_2 = \chi_3 = 0$ *noch* $\kappa_5, \chi_4 \neq 0$ *erfüllt ist. Die in* (91), (98), (104) *angegebenen Koeffizienten* $\gamma_i, \kappa_i, \chi_i$ $(i \in \{1, \dots, 5\})$ *sind Invarianten.*

2.2. Der Unterraum T schneidet W_{06} nach einer Geraden k.

Fall 2: $T \cap W_{06} = k$. Sei also $T = [Gk]$ mit $G \notin W_{06}$. Wir schreiben die Gerade k als Verbindungsgerade zweier Punkte $k = [KL]$ an, wobei wir $K \dots (0{:}\, \kappa_1{:}\, \kappa_2{:}\, \kappa_3{:}\, \kappa_4{:}\, \kappa_5{:}\, 0)$ und $L \dots (0{:}\, \lambda_1{:}\, \lambda_2{:}\, \lambda_3{:}\, \lambda_4{:}\, \lambda_5{:}\, 0)$ ansetzen. Die Unterräume $W_{036} \dots \omega_0 = \omega_3 = \omega_6 = 0$ und $W_{046} \dots \omega_0 = \omega_4 = \omega_6 = 0$ sind invariant gegenüber (10). Wir nehmen vorerst an, daß die Gerade k jeden dieser beiden Teilräume in genau einem Punkt trifft und daß diese beiden Punkte verschieden sind.

Fall 2a: $k \cap W_{036} = K \neq L = k \cap W_{046}$, $T \not\subset H_6$. Wir setzen an[12]:

$$
\begin{aligned}
&G \dots (\gamma_0{:}\, \gamma_1 + \sigma\kappa_1 + \tau\lambda_1{:}\, \gamma_2 + \sigma\kappa_2 + \tau\lambda_2{:}\, \gamma_3 + \sigma\kappa_3 + \tau\lambda_3{:}\, \gamma_4 + \\
&\qquad + \sigma\kappa_4 + \tau\lambda_4{:}\, \gamma_5 + \sigma\kappa_5 + \tau\lambda_5{:}\, 1) \\
&K \dots (0{:}\, \kappa_1{:}\, \kappa_2{:}\, 0{:}\, 1{:}\, \kappa_5{:}\, 0) \\
&L \dots (0{:}\, \lambda_1{:}\, \lambda_2{:}\, 1{:}\, 0{:}\, \lambda_5{:}\, 0).
\end{aligned}
\tag{109}
$$

Wir erhalten mit Hilfe von (10) aus diesem Ansatz bei geeigneter Wahl von $t_a, t_b, t_c, t_d, t_e, \sigma, \tau$ die Gestalt

[12] Die Punkt K, L sind in diesem Fall ausgezeichnete Punkte der Ebene T. Der Punkt $G \notin W_{06}$ hingegen wird willkürlich in $T \setminus W_{06}$ angenommen. Wie im Fall 1 haben wir bei der Suche nach Normalformen zu spezialisieren: Für die verwendeten Parameter σ, τ sind geeignete Werte zu wählen.

$$(110)\qquad \begin{aligned} &G \ldots (\gamma_0 : 0 : \gamma_2 : 0 : 0 : 0 : 1)\\ &K \ldots (0 : \kappa_1 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0)\\ &L \ldots (0 : \lambda_1 : 0 : 1 : 0 : \lambda_5 : 0). \end{aligned}$$

Die zugehörige Normalform des Bewegungsvorganges ist:

$$(111)\qquad \begin{aligned} \bar{x} &= x + t_1\\ \bar{y} &= y + t_2 x - t_1\lambda_1 - t_3\lambda_5\\ \bar{z} &= z - \kappa_1 t_1 x + t_3 y - \gamma_2 t_2 - \gamma_0 t_1^2. \end{aligned}$$

Die Punkte

$$(112)\qquad x_0(\mu_0, \mu_1, \mu_2) = \frac{\mu_1}{\mu_0}, \qquad y_0(\mu_0, \mu_1, \mu_2) = \frac{\lambda_5 \mu_2}{\mu_0},$$

für die die Bedingung

$$(113)\qquad \gamma_2 \mu_0^2 - \mu_1 \mu_2 = 0$$

erfüllt ist, werden auf sphärischen Bahnen geführt. Diese vollisotropen Zylinderfläche zweiter Ordnung ist genau bei

$$(114)\qquad \lambda_5 \gamma_2 = 0$$

singulär. Sie degeneriert bei $\lambda_5 = 0$ in eine isotrope Ebene, bei $\gamma_2 = 0$ in ein Paar isotroper Ebenen, von denen die eine vollisotrop ist. Die Bahnträgersphären sind von der Gestalt

$$(115)\qquad \mu_0\gamma_0 x^2 + (\mu_1\kappa_1 - \mu_2\lambda_1 - 2\mu_1\gamma_0)x + \mu_2 y + \mu_0 z + E = 0,$$

ihre Radien sind gegeben durch $R = -\frac{1}{2\gamma_0}$, ihre Fernscheitel durch $U \ldots \ldots (0 : 0 : -\mu_0 : \mu_2)$. Man beachte, daß in diesem Fall auch Bewegungsvorgänge inkludiert sind, bei denen alle angegebenen Punkte speziell auf ebenen Bahnen geführt werden ($\gamma_0 = 0$).

Fall 2b: $k \subset W_{036}$, $k \not\subset W_{046}$, $T \not\subset H_6$. Man zeigt durch Rechnung, daß dieser Fall im Sinne von Fußnote 5 nicht von Interesse ist. Dasselbe gilt für:

Fall 2c: $k \subset W_{046}$, $k \not\subset W_{036}$, $T \not\subset H_6$.

Fall 2d: k trifft den Schnittraum $W_{0346} = W_{036} \cap W_{046}$ in genau einem Punkt K. $T \not\subset H_6$. Wir setzen vorerst

$$
\begin{aligned}
&(\gamma_0\colon \gamma_1+\sigma\kappa_1+\tau\lambda_1\colon \gamma_2+\sigma\kappa_2+\tau\lambda_2\colon \gamma_3+\sigma\kappa_3+\tau\lambda_3\colon\\
&\qquad \colon\gamma_4+\sigma\kappa_4+\tau\lambda_4\colon \gamma_5+\sigma\kappa_5+\tau\lambda_5\colon 1)\\
&K\ldots(0\colon \kappa_1\colon \kappa_2\colon 0\colon 0\colon \kappa_5\colon 0)\\
&L\ldots(0\colon \lambda_1+\rho\kappa_1\colon \lambda_2+\rho\kappa_2\colon 1\colon \lambda_4\colon \lambda_5+\rho\kappa_5\colon 0).
\end{aligned}
\tag{116}
$$

Bei $\kappa_2 \neq 0$ ergibt sich (wir setzen $\kappa_2 = 1$) nach geeigneter Wahl von $t_a, t_b, t_c, t_d, \sigma, \tau, \rho$

$$
\begin{aligned}
&G\ldots(\gamma_0\colon 0\colon 0\colon 0\colon 0\colon 0\colon 1)\\
&K\ldots(0\colon \kappa_1\colon 1\colon 0\colon 0\colon \kappa_5\colon 0)\\
&L\ldots(0\colon 0\colon 0\colon 1\colon \lambda_4 \neq 0\colon \lambda_5\colon 0).
\end{aligned}
\tag{117}
$$

Auch hier ist (bei $\gamma_0 = 0$) der Fall, daß alle betrachteten Punkte **ebene** Bahnen besitzen, miteingeschlossen (Darboux-Bewegungsvorgänge). Nur im Fall $\kappa_5 \neq 0$ ist ein (im Sinn von Fußnote 5) interessantes Resultat zu erwarten. Die Normalform lautet dann:

$$
\begin{aligned}
&\bar{x} = x + t_1\\
&\bar{y} = y + t_2 x + \tfrac{\kappa_1\lambda_5 t_1 + \kappa_2\lambda_5 t_2}{\kappa_5} - \lambda_4 t_3 \qquad \lambda_4\kappa_5 \neq 0.\\
&\bar{z} = z + t_3 x - \tfrac{\kappa_1 t_1 + \kappa_2 t_2}{\kappa_5} y - \gamma_0 t_1^2
\end{aligned}
\tag{118}
$$

Die Punkte jenes vollisotropen Zylinders Φ zweiter Ordnung, der durch

$$
x_0(\mu_0,\mu_1,\mu_2) = \lambda_4\frac{\mu_2}{\mu_0}, \quad y_0(\mu_0,\mu_1,\mu_2) = \frac{\kappa_5\mu_1 + \lambda_5\mu_2}{\mu_0}, \tag{119}
$$

und

$$
\mu_0\mu_1 - \lambda_4\mu_2^2 = 0. \tag{120}
$$

bestimmt ist, durchlaufen sphärische Bahnen. Φ ist unter den obigen Voraussetzungen jedenfalls regulär. Die Bahnsphären sind gegeben durch

$$
\mu_0\gamma_0 x^2 + (\mu_1\kappa_1 - 2\mu_2\lambda_4\gamma_0)x + \mu_2 y + \mu_0 z + E = 0, \tag{121}
$$

ihre Radien werden angegeben durch $R = -\frac{1}{2\gamma_0}$, ihre Fernscheitel durch $U\ldots\ \ldots(0\colon 0\colon -\mu_0\colon \mu_2)$ festgelegt.

Ist $\kappa_2 = 0$, so ergibt sich für $\kappa_1\lambda_4 + \kappa_5 \neq 0$ ein Fall, der sich als nicht interessant erweist.

Ist $\kappa_2 = 0$ und ist $\kappa_1\lambda_4 + \kappa_5 = 0$, so können wir $\kappa_1 = 1$ setzen. Nach geeigneter Wahl von $t_a, t_b, t_c, t_d, \sigma, \tau, \rho$ erhalten wir aus (116) die Normalgestalt

$$
(122) \qquad
\begin{aligned}
&G \ldots (\gamma_0 \colon 0 \colon \gamma_2 \colon 0 \colon 0 \colon 0 \colon 1)\\
&K \ldots (0 \colon \kappa_1 \colon 0 \colon 0 \colon 0 \colon -\kappa_1\lambda_4 \colon 0)\\
&L \ldots (0 \colon 0 \colon 0 \colon 1 \colon \lambda_4 \neq 0 \colon \lambda_5 \colon 0).
\end{aligned}
$$

Die Normalform des Bewegungsvorganges lautet dann:

$$
(123) \qquad
\begin{aligned}
\bar{x} &= x + t_1\\
\bar{y} &= y + t_2 x - \tfrac{\lambda_5}{\lambda_4} t_1 - \lambda_4 t_3 \qquad \lambda_4 \neq 0.\\
\bar{z} &= z + t_3 x + \tfrac{1}{\lambda_4} t_1 y - \gamma_2 t_2 - \gamma_0 t_1^2
\end{aligned}
$$

Die Punkte

$$
(124) \qquad x_0(\mu_0, \mu_1, \mu_2) = \lambda_4 \frac{\mu_2}{\mu_0}, \qquad y_0(\mu_0, \mu_1, \mu_2) = \frac{-\kappa_1\lambda_4\mu_1 + \lambda_5\mu_2}{\mu_0}
$$

mit der Eigenschaft

$$
(125) \qquad \lambda_4\mu_2^2 - \gamma_2\mu_0^2 = 0
$$

erfüllen ein Paar vollisotroper Ebenen des Gangraumes, die für $\gamma_4\lambda_4 >$ > 0 reell und verschieden sind. Sie werden auf Sphären, bei $\gamma_0 = 0$ in Ebenen, geführt, welche in der Gestalt (115) gegeben sind.

Fall 2e: $T \subset H_6$. Nach J. Lang [1], Satz 2 (b), kann man, wenn man triviale Fälle außer acht läßt, die Punkte G, K, L hier durch

$$
(126) \qquad
\begin{aligned}
&G \ldots (\gamma_0 \colon \gamma_1 \colon 1 \colon 0 \colon 0 \colon 0 \colon 0)\\
&K \ldots (0 \colon \kappa_1 \colon 1 \colon 0 \colon 0 \colon 0 \colon 0)\\
&L \ldots (0 \colon 1 \colon 0 \colon 0 \colon 0 \colon 0 \colon 0).
\end{aligned}
$$

ansetzen. Eine einfache Rechnung zeigt, daß alle durch solche Unterräume $T = [GKL]$ bestimmten Bewegungsvorgänge das Bündel vollisotroper Geraden elementweise festlassen. Die Punktbahnen sind durchwegs vollisotrope Geraden; dieser Fall ist trivial.

Satz 3. *Hat der Raum T mit dem Unterraum W_{06} eine Gerade k gemeinsam, so ergeben sich, wenn $T \not\subset H_6$ gilt, folgende nichttrivialen Fälle:*

Liegt die Schnittgerade k zu den Teilräumen W_{036} und W_{046} allgemein, so ergibt sich die Normalform (111), *welche die Punkte einer vollisotropen Zylinderfläche Φ zweiter Ordnung auf Sphären, im Spezialfall auch auf Ebenen führt. Φ kann auch in ein Paar isotroper Ebenen zerfallen, von denen eine vollisotrop ist.*

Trifft k die Räume W_{036} und W_{046} in einem gemeinsamen Punkt $K \dots (0\colon \kappa_1\colon \kappa_2\colon 0\colon 0\colon \kappa_5\colon 0)$, so ergibt sich bei $\kappa_2 \neq 0$ ein Bewegungsvorgang mit der Normalform (118). *Unter den obigen Voraussetzungen ergibt sich eine reguläre vollisotrope Zylinderlfäche zweiter Ordnung, bestehend aus sphärisch geführten Punkten. Im Fall $\kappa_2 = 0$ ergibt sich nur für $\kappa_1\lambda_4 + \kappa_5 = 0$ (siehe* (116)*) ein nichttrivialer Bewegungsvorgang* (123). *Er führt die Punkte zweier vollisotroper Ebene auf sphärischen Bahnen.*

Ist jedoch $T \subset H_6$, so ergibt sich nur ein trivialer Fall eines dreiparametrigen Bewegungsvorganges, bei dem alle Punktbahnen vollisotrope Geraden sind.

2.3. Der Unterraum T liegt in W_{06}.

Dieser Fall liefert, wie man nach kurzer Rechnung erkennt, nur triviale Bewegungsvorgänge.

3. Die höherdimensionalen Teilräume von $P(V)$.

Ist dim $T = 3$, so haben wir zweiparametrige Bewegungsvorgänge zu erwarten. Gemäß J. Lang [1] liefert die Projektion $(\omega_0\colon \dots\colon \omega_6) \longrightarrow$ $\longrightarrow (\omega_4\colon \omega_5\colon \omega_6) \in W_{0123}$ als Bild von $T \cap \Theta$ 1. eine Gerade, 2. eine Kurve zweiter Ordnung oder 3. die gesamte Bildebene W_{0123}.

Im ersten und im zweiten Fall wählen wir drei Bildpunkte allgemeiner Lage und bestimmen zugehörige Urbildpunkte. Durch diese drei Punkte von $T \cap \Theta$ legen wir eine Ebene $T_2 \subset T$. Ihr Schnitt mit Θ liefert genau dieselbe Bildmenge wie $T \cap \Theta$ selbst.

Im dritten Fall schließen wir so: Existiert eine Ebene $T_2 \subset$ $\subset T$, welche ganz in Θ liegt, so ist der zugehörige dreiparametrige Bewegungsvorgang eine Bricard-Bewegung, die wir schon in Abschnitt 2 betrachtet haben; der zu T gehörige Bewegungsvorgang ist ein Teilzwanglauf davon. Gibt es eine solche Ebene $T_2 \subset$ $\subset \Theta \cap T$ nicht, so erhalten wir einen Fall eines zweiparametrigen Bricard-Bewegungsvorganges. Er ist im Sinne von Fußnote 5 nicht Teilzwanglauf eines schon behandelten Typs. Solche zweiparametrige Bricard-Bewegungsvorgänge wurden von O. Röschel [3] als Typ III (13) gefunden.

Eine Klassifikation der vierdimensionalen Unterräume von $P(V)$

würde eine Klassifikation der einparametrigen Bewegungsvorgänge mit sphärischen Bahnen und deren Invarianten liefern. Wir haben aber vorausgesetzt, zwei Bewegungsvorgänge ξ und ξ', bei denen ξ' ein Teilzwanglauf von ξ ist, nur dann gesondert zu betrachten, wenn sich die Menge der sphärisch geführten Punkte bei beiden Bewegungsvorgängen unterscheidet. Wie in Abschnitt 3 erkennt man: Ergibt sich gemäß J. Lang [1] bei der Projektion (24) als Bild von $T \cap \Theta$ eine Kurve zweiter Ordnung, so kann man dasselbe Bild auch durch Projektion eines geeigneten *ebenen* Schnittes von Θ erhalten, wobei die Schnittebene Teilmenge des 4-Raumes T ist. Der zu T gehörige Bewegungsvorgang wäre dann ein Teilzwanglauf eines Typs, wie er schon in Abschnitt 2 behandelt worden ist. Ist die Bildmenge von $T \cap \Theta$ jedoch die gesamte Bildebene W_{0123}, so ist der Schnitt $T \cap \Theta$ selbst entweder ein dreidimensionaler Teilraum von Θ oder eine Hyperfläche zweiter Ordnung in T, zu der aber die Gerade $Z \cap T =: z$ gehört. Im ersten Fall liefert jede nichtprojizierende Ebene $\varepsilon \subset T \cap \Theta$ dasselbe Bild. Im zweiten Fall findet man einen dreidimensionalen Teilraum $T_3 \subset T$, der mit z nur einen Punkt Z_0 gemeinsam hat und T nach einer Fläche zweiter Ordnung schneidet. Die Projektion von $T \cap \Theta$ liefert ebenfalls die gesamte Ebene W_{0123} als Bild. Der zu T_3 gehörige zweiparametrige Bewegungsvorgang ist aber schon behandelt worden: Der zu T gehörige Zwanglauf ist ein Teilzwanglauf eines Bricard-Bewegungsvorganges, wie er schon in Abschnitt 3 gefunden wurde.

Literatur

[1] LANG, J.: Bewegungsvorgänge des Flaggenraumes mit sphärischen Bahnen. Ein Übertragungsprinzip, *Journ. of Geometry* (im Druck).

[2] LANG, J.: Bewegungsvorgänge des Flaggenraumes mit sphärischen Bahnen I. Die vierparametrigen Bewegungsvorgänge, *Mathematica Pannonica* **4**/1 (1993), 1–22.

[3] RÖSCHEL, O.: Darboux- und Bricard-Bewegungen im Flaggenraum, *Journal of Geom.* **28** (1987), 189–196.

[4] SACHS, H. und ŠĆURIĆ, ČUDOVAN, VL.: Zur Theorie der Flächen 2. Ordnung im Flaggenraum, *RAD HAZU* **10** (1991), 197–216.