Mathematica Pannonica
4/2 (1993), 273 – 285

DIE ZYKLIDEN 3. ORDNUNG IM PSEUDOISOTROPEN RAUM II

Ferenc MÉSZÁROS

Lehrstuhl für Mathematik, Berzsenyi Dániel Pädagogische Hochschule, H-9701 Szombathely, Pf. 170, Ungarn

Herrn O. Prof. Dr. H. Sachs zum 50. Geburtstag gewidmet

Received December 1991

AMS Subject Classification: 51 N 25

Keywords: Cyclides of third order, pseudo-isotropic space.

Abstract: The three-dimensional real space with the infinitesimal metric form $ds^2 = dx\,dy$ is called a simply pseudo-isotropic space $I_3^{(1)p}$. The metric of this space is induced by an absolute $\{\omega, f_1, f_2, F\}$, where f_1, f_2 are two real lines in the plane of infinity ω and F is their point of intersection. A cyclide of order 3 in $I_3^{(1)p}$ is an irreducible non-cylindric algebraic surface of order 3 that intersects ω only at f_1 and f_2. Cyclides of third order have 5 main-types in $I_3^{(1)p}$. In this paper we continue and conclude the investigations in [5], giving a complete classification of third-order cyclides in $I_3^{(1)p}$. We give normal-forms of all cyclides and geometrical interpretations of the remaining form-parameters in their equations.

1. Einleitung

Es bezeichne P_3 den dreidimensionalen reellen *projektiven Raum*, ω eine Ebene in P_3 und $A_3 := P_3 \backslash \omega$ den zugeordneten *affinen Raum.* Ein affiner Raum A_3 heißt ein *pseudoisotroper Raum* $I_3^{(1)p}$, wenn in ihm eine Maßbestimmung über die *Absolutfigur* $\{\omega, f_1, f_2, F\}$ induziert wird, wobei f_1, f_2 reelle Geraden aus ω mit dem Schnittpunkt F bezeichnen.

Die Geometrie dieses Raumes wurde erstmals von K. Strubecker in [17] studiert. Ersetzt man die reellen Geraden f_1, f_2 durch zwei konjugiert-komplexe Geraden in ω mit dem reellen Schnittpunkt F, so gelangt man zum *isotropen Raum* $I_3^{(1)}$, dessen Geometrie ausführlich in [18]–[23] betrachtet wurde. Eine lehrbuchmäßige Darstellung findet man in der Monographie [11] des Jubilars.

Im folgenden bezeichnen wir mit (x, y, z) affine Koordinaten in $I_3^{(1)p}$ und mit $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ die zugehörigen projektiven Koordinaten. Es ist dann üblich, die Absolutfigur $\{\omega, f_1, f_2, F\}$ durch

$$\begin{aligned} &\omega \dots\ x_0 = 0,\ f_1 \dots\ x_0 = x_1 = 0, \\ &f_2 \dots\ x_0 = x_2 = 0,\ F(0:0:0:1) \end{aligned} \tag{1.1}$$

festzulegen. Die direkte *projektive Automorphismengruppe* G_8 von $\{\omega, f_1, f_2, F\}$ ist achtparametrig und läßt sich bezüglich (1.1) in affinen Koordinaten durch

$$\begin{cases} \bar{x} = a_1 + a_2 x \\ \bar{y} = a_3 + a_4 y \\ \bar{z} = a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 z \end{cases} \tag{1.2}$$

beschreiben. (1.2) enthält zwei wichtige Untergruppen (vgl. [11, 24]), nämlich die sechsparametrige *pseudoisotrope Bewegungsgruppe* $B_6^{(1)p}$

$$\begin{cases} \bar{x} = b_1 + px \\ \bar{y} = b_2 + \frac{1}{p} y \\ \bar{z} = b_3 + b_4 x + b_5 y + z \quad \text{mit } p \neq 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

bzw. die fünfparametrige *Grenzgruppe* $\mathcal{G}_5$

$$\begin{cases} \bar{x} = b_1 + x \\ \bar{y} = b_2 + y \\ \bar{z} = b_3 + b_4 x + b_5 y + z. \end{cases} \tag{1.4}$$

Eine Ebene ε, welche f_1 (f_2) enthält, heißt *vollisotrop* von *erster* (*zweiter*) *Art.* Eine Ebene ε mit $F \in \varepsilon$, aber $f_1 \not\subset \varepsilon$, $f_2 \not\subset \varepsilon$ heißt *isotrop.* Eine Gerade g mit dem Fernpunkt F heißt *vollisotrop.* Alle in folgenden verwendeten Begriffe aus der isotropen Geometrie können in [11] nachgelesen werden.

Unter einer *Zyklide 3. Ordnung* des pseudoisotropen Raumes versteht man eine reelle irreduzible nichtzylindrische algebraische Fläche 3. Ordnung, welche die Fernebene ω nur nach den beiden *absoluten Geraden* f_1 und f_2 schneidet. Hierbei ist die eine absolute Gerade eine einfache Gerade, und die andere absolute Gerade eine Doppelgerade bezüglich des Schnittes mit ω ($x_0 = 0$). Reelle Zykliden 3. Ordnung lassen sich im (gewöhnlichen) isotropen Raum $I_3^{(1)}$ in dieser Weise nicht definieren. Zykliden 4. Ordnung des $I_3^{(1)}$ bzw. des $I_3^{(1)p}$ wurden hingegen ausführlich studiert von M. Husty und O. Röschel (vgl. [1]–[4]), von D. Palman (vgl. [6]–[9]) und von H. Sachs (vgl. [11]–[13]). Die Zykliden 3. Ordnung des $I_3^{(1)p}$ lassen sich in der Gestalt

$$x^2 y + p_2(x, y, z) = 0 \tag{1.5}$$

darstellen, wobei $p_2(x, y, z)$ ein Polynom vom Grad 2 in x, y und z bezeichnet. Ziel dieser Arbeit ist die Fortsetzung und der Abschluß der in [5] begonnenen *Klassifikation der Zykliden 3. Ordnung* $\Phi^{(3)}$ des $I_3^{(1)p}$, d.h. der Beschreibung der Haupttypen II-V durch Normalformen bezüglich $\mathcal{G}_5$ bzw. $B_6^{(1)p}$, und die Feststellung der geometrischen Deutung der in den Normalformen verbleibenden Koeffizienten bezüglich $\mathcal{G}_5$. Diese Klassifikation gelingt wie in [5] bzw. [13], [14] und [16] mit Hilfe einer mit $\Phi^{(3)}$ *isotrop-invariant verknüpften Ebene* Σ^* und durch Diskussion des Schnittes $\Phi^{(3)} \cap \Sigma^*$.

2. Allgemeine Normalformentheorie der Zykliden 3. Ordnung des $I_3^{(1)p}$

Im folgenden bezeichne $\Phi^{(3)}$ stets eine Zyklide 3. Ordnung des pseudoisotropen Raumes, die wir nach (1.5) in der allgemeinen Gestalt

$$\begin{aligned} x^2 y + a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + a_{12} xy + a_{13} xz + \\ + a_{23} yz + a_{01} x + a_{02} y + a_{03} z + a_{00} = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

ansetzen können. Schneiden wir (2.1) mit den vollisotropen Ebenen 1. Art $\{x = d = \text{konst}\}$, dann erhält man Kurven 2. Ordnung mit den Fernpunkten

$$x_0 = 0, x_1 = dx_0 = 0, a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + a_{23} x_2 x_3 = 0. \tag{2.2}$$

Aus (2.2) folgt: Alle entstehenden Schnittkurven haben dieselben Fernpunkte S_1, S_2 über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Gilt $a_{22} = a_{33} = a_{23} = 0$, dann ist der Schnitt von (2.2) mit $x = d = \text{konst}$ gegeben durch

$$d^2 y + a_{11} d^2 + a_{12} dy + a_{13} dz + a_{01} d + a_{02} y + a_{03} z + a_{00} = 0. \tag{2.3}$$

Der Schnitt mit $\Phi^{(3)}$ ist dann eine Gerade, d.h. $\Phi^{(3)}$ ist eine *Regelfläche.*

Damit haben wir den

Satz 1. *Eine Zyklide ist eine Regelfläche, wenn in* (2.1) *gilt* $a_{22} = a_{33} = a_{23} = 0$.

Schneiden wir (2.1) mit den vollisotropen Ebenen 2. Art $\{y = e = \text{konst}\}$, dann bekommt man Kurven 2. Ordnung mit den Fernpunkten

$$x_0 = 0, x_2 = ex_0 = 0, (a_{11} + e)x_1^2 + a_{33}x_3^2 + a_{13}x_1x_3 = 0. \tag{2.4}$$

Aus (2.4) folgt: Die Fernpunkte auf f_2 $\{x_0 = x_2 = 0\}$ ändern sich im allgemeinen. Nur für $a_{33} = a_{13} = 0$ tritt F stets als Doppelpunkt auf; für $a_{33} = 0$ tritt F beständig als einfacher Punkt auf, daneben gibt es noch einen weiteren sich ändernden Fernpunkt. Für die Flächen $\Phi^{(3)}$ sind f_1 und f_2 je einfache Geraden bezüglich der vollisotropen ebenen Schnitte 1. Art δ bzw. 2. Art ε — außer es liegt der Fall einer Regelfläche vor — und man erhält als Restschnitt je eine Kurve k 2. Ordnung.

Um zu einer Typeneinteilung dieser Flächen zu gelingen, bestimmen wir hinsichtlich jeder Kurve k die Polare bezüglich des absoluten Punktes F und ermitteln die Menge dieser Polaren, wenn δ bzw. ε das Büschel um die absolute Ferngerade f_1 bzw. f_2 durchläuft. Als Polare von $F(0:0:0:1)$ stellt sich nach kurzer Rechnung die Gerade

$$\begin{aligned} &\{x = d = \text{konst},\ a_{13}d + a_{03} + a_{23}y + 2a_{33}z = 0\} \quad \text{bzw.} \\ &\{y = e = \text{konst},\ a_{23}e + a_{03} + a_{13}x + 2a_{33}z = 0\} \end{aligned} \tag{2.5}$$

ein, und dies liefert als Menge der Polaren die Fläche Σ^*

$$a_{13}x + a_{23}y + 2a_{33}z + a_{03} = 0 \quad , \tag{2.6}$$

die wir als *Hauptachsenfläche* bezeichnen. Im projektiv erweiterten pseudoisotropen Raum liefert (2.6) *5 Typen von Ebenen* und damit eine Typeneinteilung der Zykliden $\Phi^{(3)}$ in 5 Haupttypen, nämlich

Haupttyp I: $a_{33} \neq 0$, Σ^* ist eine *nichtisotrope Ebene*

Haupttyp II: $a_{33} = 0$; $a_{13}, a_{23} \neq 0$, Σ^* ist eine *isotrope Ebene*

Haupttyp III: $a_{23} = a_{33} = 0$; $a_{13} \neq 0$, Σ^* ist eine *isotrope Ebene 1.Art*

Haupttyp IV: $a_{13} = a_{33} = 0$; $a_{23} \neq 0$, Σ^* ist eine *isotrope Ebene 2. Art*

Haupttyp V: $a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$; $a_{03} \neq 0$, Σ^* ist die *Fernebene* ω.

Wir fassen zusammen im

Satz 2. *Im projektiv erweiterten pseudoisotropen Raum existieren 5 Typen von Hauptachsenflächen bezüglich* $\Phi^{(3)}$ *und damit 5 Haupttypen von Zykliden 3. Ordnung.*

Gilt in (2.1) $a_{13} = a_{23} = a_{33} = a_{03} = 0$, dann lautet die zugehörige Flächengleichung $x^2y + a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{12}xy + a_{01}x + a_{02}y + a_{00} = 0$

und stellt somit einen Zylinder dritter Ordnung dar. Dieser Fall soll in folgenden nicht weiter betrachtet werden. Wie aus (2.1) und (2.6) ersichtlich, erhält man Σ^* als partielle Ableitung $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$, d.h. $\Sigma^* \cap \Phi^{(3)} =: c$ ist die Menge jener Punkte der Zyklide, deren Tangentialebene isotrop bzw. vollisotrop ist, oder es liegt ein singulärer Flächenpunkt vor. Wir bezeichnen c als *charakteristische Kurve.*

Die Zykliden 3. Ordnung vom Haupttyp I wurden in [5] ausführlich untersucht; dabei wurde gezeigt, daß es 26 Zykliden dieses Haupttyps gibt. Im folgenden werden die Haupttypen II–V behandelt.

3. Zykliden 3. Ordnung des $I_3^{(1)p}$ vom Haupttyp II

Für diese Flächen ist Σ^* eine isotrope Ebene, und wir können durch eine Schiebung erreichen, daß in (2.6) $a_{03} = 0$ gilt. Damit vereinfacht sich (2.1) bezüglich $\mathcal{G}_5$ zu

$$\begin{aligned} x^2y + a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{12}xy + (a_{13}x + a_{23}y)z + \\ + a_{01}x + a_{02}y + a_{00} = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Bezüglich der Gruppe $B_6^{(1)p}$ kann man nach Anwendung einer pseudoisotropen Drehung erreichen, daß (2.1) die Gestalt

$$\begin{aligned} x^2y + a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{12}xy + (ax \pm y)z + \\ + a_{01}x + a_{02}y + a_{00} = 0 \end{aligned} \tag{3.2.1–3.2.2}$$

annimmt, wobei die neuen Koeffizienten nicht umbezeichnet wurden und $a \neq 0$ gilt. Wir wenden nun die Schiebung $\{x = \bar{x} + c_1,\ y = \bar{y} + c_2,\ z = \bar{z}\}$ auf (3.1), (3.2) an und verlangen: Das Absolutglied soll verschwinden, aber aus dem Glied $z(a_{13}x + a_{23}y)$ bzw. $z(ax + y)$ darf nicht das Glied Kz mit $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ entstehen. Das zugehörige Gleichungssystem lautet dann

$$\begin{cases} c_1^2c_2 + a_{11}c_1^2 + a_{22}c_2^2 + a_{12}c_1c_2 + a_{01}c_1 + a_{02}c_2 + a_{00} = 0 \\ a_{13}c_1 + a_{23}c_2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad ac_1 \pm c_2 = 0 \end{cases}$$

und hat mindestens ein reelles Lösungspaar (c_1, c_2). Mit diesen reellen Zahlen c_1, c_2 lautet die Flächengleichung

$$\bar{x}^2\bar{y} + b_{11}\bar{x}^2 + a_{22}\bar{y}^2 + b_{12}\bar{x}\bar{y} + (a_{13}\bar{x} + a_{23}\bar{y})\bar{z} + b_{01}\bar{x} + b_{02}\bar{y} = 0 \tag{3.3}$$

bzw.

$$\bar{x}^2\bar{y} + b_{11}\bar{x}^2 + a_{22}\bar{y}^2 + b_{12}\bar{x}\bar{y} + (a\bar{x} \pm \bar{y})\bar{z} + b_{01}\bar{x} + b_{02}\bar{y} = 0. \tag{3.4}$$

Wenden wir auf (3.3) bzw. auf (3.4) die $\mathcal{G}_5$-Transformation $\{\bar{x} = x,$

$\bar{y} = y$, $\bar{z} = z - \frac{b_{11}}{a_{13}}x - \frac{a_{22}}{a_{23}}y - \frac{b_{01}}{a_{13}}\}$ bzw. $\{\bar{x} = x$, $\bar{y} = y$, $\bar{z} = z - \frac{b_{11}}{a}x - - a_{22}y - \frac{b_{01}}{a}\}$ an, so entsteht

(3.5) $$x^2y + Axy + (a_{13}x + a_{23}y)z + By = 0$$

bzw.

(3.6.1–3.6.2) $$x^2y + Axy + (ax \pm y)z + By = 0.$$

Schneiden wir (3.5) bzw. (3.6) mit $\Sigma^*\{a_{13}x + a_{23}y = 0\}$ bzw. $\{ax \pm \pm y = 0\}$, dann sieht man, daß die charakteristische Kurve c über $\mathbb{C}$ aus *3 vollisotropen Geraden* e_j $(j = 1, 2, 3)$ besteht, welche durch die Nullstellen des Polynoms $p(x) = x^3 + Ax^2 + Bx$ festgelegt werden. Wir betrachten den allgemeinsten Fall, wo die Geraden e_1, e_2, e_3 reell und verschieden sind und zeigen, daß die Koeffizienten A, a_{13}, a_{23} und B in (3.5) *geometrische Bedeutung* bzgl. der Gruppe $\mathcal{G}_5$ besitzen. Jede Fläche (3.5) trägt die vollisotrope Gerade e_1 $\{x = y = 0\}$ und wird von den vollisotropen Ebenen $x = 0$ bzw. $y = 0$ nach den Geraden e_1 und g_1 $\{x = 0, z = -\frac{B}{a_{23}}\}$ bzw. e_1 und g_2 $\{y = z = 0\}$ geschnitten. Die vollisotrope Treffgerade von g_1 und g_2 ist für $B \neq 0$ die z-Achse des zugrundegelegten Koordinatensystems, die g_2 im Koordinatenursprung U und g_1 im Punkt $G_1(0, 0, -\frac{B}{a_{23}})$ schneidet. Die Punkte U und G_1 haben geometrische Bedeutung und für ihre isotrope Spanne s gilt $s := = s(U, G_1) = -\frac{B}{a_{23}}$. Die Nullstellen x_2, x_3 von $x^2 + Ax + B = 0$ legen die weiteren vollisotropen Geraden e_2 und e_3 in Σ^* fest. Die vollisotropen Ebenen 1. Art ϵ_1, ϵ_2 und ϵ_3 durch e_1, e_2, e_3 besitzen die isotropen Abstände $l_1 := l_1(\epsilon_1, \epsilon_2) = x_2$ und $l_2 := l_2(\epsilon_1, \epsilon_3) = x_3$, womit nach Vieta folgt: $l_1 \cdot l_2 = B$, $l_1 + l_2 = -A$. Somit besitzen A und B geometrische Bedeutung und wegen $a_{23} = -\frac{B}{s}$ ist auch a_{23} eine geometrische Größe. Die vollisotropen Ebenen 2. Art η_1 und η_2 durch e_1 und e_2 besitzen den isotropen Abstand $d := d(\eta_1, \eta_2) = -\frac{a_{13}}{a_{23}}l_1$, woraus wegen $a_{13} = -\frac{d \cdot a_{23}}{l_1}$ die $\mathcal{G}_5$-Invarianz von a_{13} folgt. Ähnlich zeigt man die $B_6^{(1)p}$-Invarianz der Koeffizienten A, B und a in (3.6). Je nach Realität und Vielfachheit der Nullstellen von $p(x)$ ergeben sich *folgende Normalformen* für die Zykliden des Haupttyps II bezüglich $\mathcal{G}_5$ bzw. $B_6^{(1)p}$:

(3.7 II 1) $$x^2y + (a_{13}x + a_{23}y)z = 0$$

bzw.

(3.8 II 1.1–1.2) $$x^2y + (ax \pm y)z = 0 \text{ mit } a := a_{13}.$$

In diesem Fall besteht c aus einer dreifach zu zählenden vollisotropen Geraden. Die Geraden $e_1 = e_2 = e_3$, g_2 und g_1 schneiden sich in diesem

Fall im Punkt U, der ein singulärer Flächenpunkt ist.

(3.7 II 2) $\quad x^2y + Axy + (a_{13}x + a_{23}y)z = 0$ mit $A \neq 0$

bzw.

(3.8 II 2.1–2.2) $\quad x^2y + Axy + (ax \pm y)z = 0.$

In diesem Fall besteht c aus einer vollisotropen Doppelgeraden e_1 und einer weiteren, reellen vollisotropen Geraden e_3.

(3.7 II 3) $x^2y+Axy+(a_{13}x+a_{23}y)z+By = 0$ mit $A^2-4B > 0$, $B \neq 0$

bzw.

(3.8 II 3.1–3.2) $\quad x^2y + Axy + (ax \pm y)z + By = 0.$

In diesem Fall besteht c aus 3 verschiedenen, reellen vollisotropen Geraden e_1, e_2, e_3.

(3.7 II 4) $x^2y+Axy+(a_{13}x+a_{23}y)z+By = 0$ mit $A^2-4B < 0$, $B > 0$

bzw.

(3.8 II 4.1–4.2) $\quad x^2y + Axy + (ax \pm y)z + By = 0.$

In diesem Fall besteht c aus einer reellen, vollisotropen Geraden und über $\mathbb{C}$ aus zwei konjugiert-komplexen vollisotropen Geraden.

Wir fassen zusammen im

Satz 3. *Im pseudoisotropen Raum existieren genau 4 Typen von Zykliden 3. Ordnung vom Haupttyp II. Diese Flächen besitzen als charakteristische Kurve drei vollisotrope Geraden über den komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$ *bei algebraischer Zählung und werden durch die Normalformen* (3.7 II 1)–(3.7 II 4) *bezüglich* $\mathcal{G}_5$ *bzw.* (3.8 II 1)-(3.8 II 4) *bezüglich* $B_6^{(1)p}$ *beschrieben.*

4. Zykliden 3. Ordnung des $I_3^{(1)p}$ vom Haupttyp III-IV

Für diese Flächen ist die Hauptachsenfläche Σ^* eine vollisotrope Ebene 1. Art bzw. eine vollisotrope Ebene 2. Art, und wir können durch eine Schiebung erreichen, daß in (2.6) $a_{23} = a_{33} = a_{03} = 0$; $a_{13} \neq 0$ bzw. $a_{13} = a_{33} = a_{03} = 0$; $a_{23} \neq 0$ gilt. Hiermit vereinfacht sich (2.1) zu

(4.1) $\quad x^2y + a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{01}x + a_{02}y + a_{00} = 0$

bzw.

(4.2) $\quad x^2y + a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{12}xy + a_{23}yz + a_{01}x + a_{02}y + a_{00} = 0.$

Wenden wir auf (4.1) bzw. auf (4.2) zunächst die Schiebung $\{x = \bar{x},\ y = \bar{y} - a_{11},\ z = \bar{z}\}$ bzw. $\{x = \bar{x} - \frac{a_{12}}{2},\ y = \bar{y},\ z = \bar{z}\}$, und dann die pseudoisotrope Bewegung $\{\bar{x} = x,\ \bar{y} = y,\ \bar{z} = z - \frac{a_{12}}{a_{13}}y - \frac{a_{01} - a_{12}a_{11}}{a_{13}}\}$ bzw. $\{\bar{x} = x,\ \bar{y} = y, \bar{z} = z - \frac{a_{22}}{a_{23}}y - \frac{4a_{02} - a_{12}{}^2}{4a_{23}}\}$ an, so entsteht

(4.3) $$x^2y + a_{22}y^2 + a_{13}xz + Ay + B = 0$$

bzw.

(4.4) $$x^2y + a_{11}x^2 + a_{23}yz + Cx + D = 0.$$

Beschäftigen wir uns zunächst mit (4.3). Bei der Untersuchung sind zwei Unterklassen zu unterscheiden.

UNTERKLASSE III A: $a_{22} = 0$. Die Flächengleichung lautet

(4.5) $$x^2y + a_{13}xz + Ay + B = 0.$$

In diesem Fall gilt $(A, B) \neq (0, 0)$, sonst wäre $\Phi^{(3)}$ reduzibel, ein Fall der uns nicht weiter interessiert. Sei $A = 0,\ B \neq 0$. Diese Fläche ist eine Regelfläche (vgl. Satz 1). Die charakteristische Kurve c besteht aus der dreifach zu zählenden Geraden $\{x_0 = x_1 = 0\}$. Wir bezeichnen diese Regelfläche als Regelfläche $\Phi^{(3)}_{\mathrm{III}A1}$. Ihre Normalform lautet bezüglich $\mathcal{G}_5$

(4.6 III A1) $$x^2y + a_{13}xz + B = 0.$$

Sei nun $A \neq 0$. Wenden wir zunächst auf (4.5) die Schiebung $\{x = \bar{x},\ y = \bar{y} - \frac{B}{A},\ z = \bar{z}\}$ und dann die $\mathcal{G}_5$-Transformation $\{\bar{x} = x,\ \bar{y} = y,\ \bar{z} = z + \frac{B}{a_{13}A}x\}$ an, so entsteht als Normalform bezüglich $\mathcal{G}_5$

(4.6 III A2) $$x^2y + a_{13}xz + Ay = 0.$$

Diese Fläche ist ebenfalls eine Regelfläche (vgl. Satz 1), und c besteht nun aus der vollisotropen Geraden $\{x = y = 0\}$ und der doppelt zu zählenden Geraden $\{x_0 = x_1 = 0\}$. Zum Unterschied von (4.6 III A1) trägt die Fläche (4.6 III A2) also eine vollisotrope Erzeugende. Wir bezeichnen diese Regelfläche mit $\Phi^{(3)}_{\mathrm{III}A2}$.

Nach Anwendung der pseudoisotropen Drehung $\{x = B\bar{x},\ y = \frac{1}{B}\bar{y},\ z = \bar{z}\}$ auf (4.6 III A1) bzw. $\{x = \sqrt{|A|}\,\bar{x},\ y = \frac{1}{\sqrt{|A|}}\bar{y},\ z = \bar{z}\}$ auf (4.6 III A2) gewinnt man als Normalform für die Zykliden der Unterklasse III A bezüglich $B_6^{(1)p}$

(4.7 III A1) $$\bar{x}^2\bar{y} + a_{13}\bar{x}\bar{z} + 1 = 0$$

bzw.

(4.7 III A2.1–2.2) $$\bar{x}^2\bar{y} + a_{13}\bar{x}\bar{z} \pm \bar{y} = 0.$$

UNTERKLASSE III B: $a_{22} \neq 0$. Wenden wir zunächst auf (4.3) die Schiebung $\{x = \bar{x},\ y = \bar{y} - \frac{A}{2a_{22}},\ z = \bar{z}\}$ und dann die pseudoisotrope Bewegung $\{\bar{x} = x,\ \bar{y} = y,\ \bar{z} = z + \frac{A}{2a_{22}a_{13}}x\}$ an, so lautet die Flächengleichung

(4.8) $$x^2y + a_{22}y^2 + a_{13}xz + L_1 = 0.$$

Schneidet man (4.8) mit Σ^* $\{x = 0\}$, so erkennt man, daß die charakteristische Kurve c aus den beiden vollisotropen Geraden e_1, e_2 $\{x = 0,\ y = \pm\sqrt{\frac{-L_1}{a_{22}}}\}$ über C besteht. Demnach gehören zu (4.8) 3 Typen von Zykliden, je nachdem $L_1 = 0$ bzw. $\operatorname{sgn} L_1 \neq \operatorname{sgn} a_{22}$ bzw. $\operatorname{sgn} L_1 = \operatorname{sgn} a_{22}$ gilt. Damit ergeben sich die folgenden Normalformen der Zykliden der Unterklasse III B bezüglich $\mathcal{G}_5$

(4.9 III B1) $$x^2y + a_{22}y^2 + a_{13}xz = 0,$$

(4.9 III B2) $$x^2y + a_{22}y^2 + a_{13}xz + L_1 = 0 \text{ mit } \frac{L_1}{a_{22}} < 0,$$

(4.9 III B3) $$x^2y + a_{22}y^2 + a_{13}xz + L_1 = 0 \text{ mit } \frac{L_1}{a_{22}} > 0.$$

Unterwirft man (4.9 III B1)-(4.9 III B3) der pseudoisotropen Drehung $\{x = \sqrt[3]{a_{22}}\ \bar{x},\ y = \frac{1}{\sqrt[3]{a_{22}}}\bar{y},\ z = \bar{z}\}$, so entsteht als Normalform für die Zykliden der Unterklasse III B bezüglich der Gruppe $B_6^{(1)p}$

(4.10 III B1) $$\bar{x}^2\bar{y} + \bar{y}^2 + a_{13}\bar{x}\bar{z} = 0,$$

(4.10 III B2) $$\bar{x}^2\bar{y} + \bar{y}^2 + a_{13}\bar{x}\bar{z} + \bar{L}_1 = 0 \text{ mit } \bar{L}_1 < 0,$$

(4.10 III B3) $$\bar{x}^2\bar{y} + \bar{y}^2 + a_{13}\bar{x}\bar{z} + \bar{L}_1 = 0 \text{ mit } \bar{L}_1 > 0.$$

Es bleibt noch der Nachweis zu erbringen, daß die verbleibenden Koeffizienten in (4.9 III B1)-(4.9 III B3) geometrische Bedeutung besitzen. Die Symmetriegerade g $\{x = 0,\ y = 0\}$ von e_1 und e_2 besitzt geometrische Bedeutung. Für die Potenz (vgl. [12,567], [15,378]) $\mathbf{k}$ eines Punktes $P(0,0,z_0) \notin \Phi^{(3)}_{IIIB2}$ bezüglich der Zyklide gilt $\mathbf{k}(P) = L_1$, womit L_1 gedeutet ist. Der isotrope Abstand $d(e_1, e_2) = 2\sqrt{\frac{-L_1}{a_{22}}}$ ist ebenfalls eine Invariante, womit a_{22} als geometrische Größe erkannt ist. Die Schnitte von (4.9 III B1)-(4.9 III B3) mit den vollisotropen Ebenen $\{x = d = \text{konst}(d \neq 0)\}$ sind isotrope Kreise (vgl. [10,23]) mit der Gleichung $z = -\frac{a_{22}}{a_{13}d}y^2 - \frac{d}{a_{13}}y$ vom Radius $R := -\frac{a_{22}}{a_{13}d}$, der bekanntlich geometrische Bedeutung besitzt. Die Ebene ε $\{x = 0\}$ hat in diesen Fällen ebenfalls geometrische Bedeutung. Da für die Ebene ε_0 $\{x = d\ (d \neq 0)\}$ gilt $d(\varepsilon, \varepsilon_0) = d$, folgt damit die geometrische Bedeutung von $a_{13} = -\frac{a_{22}}{Rd(\varepsilon,\varepsilon_0)}$.

Wir vermerken den

Satz 4. *Im pseudoisotropen Raum existieren genau 5 Typen von Zykliden 3. Ordnung des Haupttyps* III. *Zwei Typen der Unterklasse* III A *sind Regelflächen; die drei Typen der Unterklasse* III B *besitzen als charakteristische Kurve eine vollisotrope Doppelgerade bzw. zwei verschiedene, reelle vollisotrope Geraden bzw. über* $\mathbb{C}$ *2 konjugiert-komplexe, vollisotrope Geraden in der Ebene* Σ^* $\{x = 0\}$. *Diese Flächenklasse wird durch die Normalformen* (4.6 III A1)–(4.6 III A2), (4.9 III B1)–(4.9 III B3) *bezüglich* $\mathcal{G}_5$ *bzw.* (4.7 III A1)–(4.7 III A2), (4.10 III B1)–(4.10 III B3) *bezüglich* $B_6^{(1)p}$ *beschrieben.*

Beschäftigen wir uns nun mit dem Haupttyp IV! Dieser Typ ist weitgehend analog zum Haupttyp III. Bei der Untersuchung sind ebenfalls zwei Unterklassen zu unterscheiden.

UNTERKLASSE IV A: $a_{11} = 0$.

UNTERKLASSE IV B: $a_{11} \neq 0$. Zum Unterschied von III A ist die Fläche IV A keine Regelfläche. Ausgehend von (4.4) lauten die Normalformen für die Zykliden des Haupttyps IV bezüglich $\mathcal{G}_5$ bzw. $B_6^{(1)p}$

(4.11 IV A1) $$x^2y + a_{23}yz + D = 0 \text{ mit } D \neq 0$$

(4.11 IV A2) $$x^2y + a_{23}yz + Cx = 0 \text{ mit } C \neq 0$$

(4.11 IV B1) $$x^2y + a_{11}x^2 + a_{23}yz = 0$$

(4.11 IV B2) $$x^2y + a_{11}x^2 + a_{23}yz + L_2 = 0 \text{ mit } a_{11}L_2 < 0$$

(4.11 IV B3) $$x^2y + a_{11}x^2 + a_{23}yz + L_2 = 0 \text{ mit } a_{11}L_2 > 0$$

bzw.

(4.12 IV A1) $$\bar{x}^2\bar{y} + \bar{a}_{23}\bar{y}\bar{z} + 1 = 0 \text{ mit } \bar{a}_{23} \neq 0$$

(4.12 IV A2.1–2.2) $$\bar{x}^2\bar{y} \pm \bar{y}\bar{z} + C\bar{x} = 0 \text{ mit } C \neq 0$$

(4.12 IV B1) $$\bar{x}^2\bar{y} + \bar{x}^2 + \bar{a}_{23}\bar{y}\bar{z} = 0 \text{ mit } \bar{a}_{23} \neq 0$$

(4.12 IV B2) $$\bar{x}^2\bar{y} + \bar{x}^2 + \bar{a}_{23}\bar{y}\bar{z} + \bar{L}_2 = 0 \text{ mit } \bar{L}_2 < 0,$$

(4.12 IV B3) $$\bar{x}^2\bar{y} + \bar{x}^2 + \bar{a}_{23}\bar{y}\bar{z} + \bar{L}_2 = 0 \text{ mit } \bar{L}_2 > 0, \bar{a}_{23} \neq 0.$$

Wir notieren den

Satz 5. *Im pseudoisotropen Raum existieren genau 5 Typen von Zykliden 3. Ordnung des Haupttyps IV. Die charakteristische Kurve besteht aus der dreifach zu zählenden Geraden* $\{x_0 = x_2 = 0\}$ *bzw. aus der* *vollisotropen Geraden* $\{x = y = 0\}$ *und der doppelt zu zählenden Geraden* $\{x_0 = x_2 = 0\}$ *bzw. aus einer vollisotropen Doppelgeraden bzw. aus zwei verschiedenen, reellen, vollisotropen Geraden bzw. aus einem konjugiert-komplexen vollisotropen Geradenpaar. Diese Flächenklasse wird durch die Normalformen* (4.11 IV A1)–(4.11 IV B3) *bezüglich* $\mathcal{G}_5$ *bzw.* (4.12 IV A1)–(4.12 IV B3) *bezüglich* $B_6^{(1)p}$ *beschrieben.*

5. Zykliden 3. Ordnung des $I_3^{(1)p}$ vom Haupttyp V

Für diese Flächen ist die Hauptachsenfläche Σ^* die Fernebene ω und in (2.6) gilt $a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$, $a_{03} \neq 0$. Damit lautet die Flächengleichung

(5.1) $\quad x^2y + a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{12}xy + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z + a_{00} = 0.$

Wenden wir zunächst auf (5.1) die Schiebung $\{\bar{x} = x + \frac{1}{2}a_{12},\ \bar{y} = y + a_{11},\ \bar{z} = z\}$ an, so stellt sich

(5.2) $$\bar{x}^2\bar{y} + a_{22}\bar{y}^2 + b_{01}\bar{x} + b_{02}\bar{y} + a_{03}\bar{z} + b_{00} = 0$$

ein. Durch die pseudoisotrope Bewegung $\{\bar{x} = x, \bar{y} = y\ , \bar{z} = z - \frac{b_{01}}{a_{03}}x - \frac{b_{02}}{a_{03}}y - \frac{b_{00}}{a_{03}}\}$ erhalten wir aus (5.2) als Normalform für die Zykliden des Haupttyps V bezüglich $\mathcal{G}_5$

(5.3) $$x^2y + a_{22}y^2 + a_{03}z = 0.$$

Unterwirft man (5.3) der pseudoisotropen Drehung $\{x = a_{03}\bar{x},\ y = \frac{1}{a_{03}}\bar{y},\ z = \bar{z}\}$, so ensteht als Normalform für diese Zykliden bezüglich $B_6^{(1)p}$

(5.4) $$\bar{x}^2\bar{y} + \bar{a}_{22}\bar{y}^2 + \bar{z} = 0.$$

Bei der Untersuchung von (5.3) sind zwei Unterfälle zu unterscheiden.

UNTERFALL 1: $a_{22} = 0$. Diese Fläche ist eine Regelfläche (vgl. Satz 1).

UNTERFALL 2: $a_{22} \neq 0$. Die Schnitte von (5.3) mit den Ebenen $\{x = d = \text{konst}\}$ sind isotrope Kreise mit der Gleichung $z = -\frac{a_{22}}{a_{03}}y^2 - \frac{d^2}{a_{03}}y$ vom Radius $R := -\frac{a_{22}}{a_{03}}$, der bekanntlich eine Invariante ist. $\Phi_{V2}^{(3)}$ trägt die Flächengerade $g\ \{y = z = 0\}$. Die weiteren Schnittpunkte der isotropen Kreise mit der $[x, y]$-Ebene liegen auf der Parabel $y = -\frac{1}{a_{22}}x^2$ vom Parameter $-\frac{a_{22}}{2}$, d.h. a_{22} ist eine geometrische Größe, woraus auch die geometrische Deutung von a_{03} folgt. Die Abbildung stellt eine Zyklide vom Typ V.2 in Axonometrie dar.

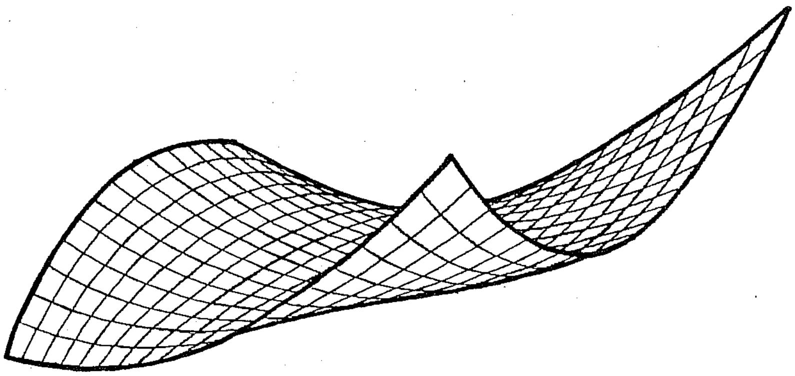

Abbildung: Zyklide vom Typ V. 2

Satz 6. *Im pseudoisotropen Raum existieren genau zwei Typen von Zykliden 3. Ordnung vom Haupttyp* V. *Diese werden durch die Normalform* (5.3) *bezüglich* $\mathcal{G}_5$ *bzw.* (5.4) *bezüglich* $B_6^{(1)p}$ *festgelegt, wobei* $a_{22} = 0$ *oder* $a_{22} \neq 0$ *gelten kann.*

Wir fassen das Gesamtresultat dieser Arbeit zusammen im

Satz 7. *Im pseudoisotropen Raum existieren genau 16 Typen von Zylkiden 3. Ordnung der Haupttypen* II–V, *wobei 3 Typen Regelzykliden sind.*

Beachten wir, daß nach [5] genau 26 Typen von Zykliden 3. Ordnung vom Haupttyp I existieren, so folgt mit dem Satz 7 zusammenfassend der

Satz 8. *Im pseudoisotropen Raum* $I_3^{(1)p}$ *existieren genau 42 Typen von Zykliden 3. Ordnung.*

Die interessante geometrische Untersuchung einzelner Zykliden 3. Ordnung soll an anderer Stelle erfolgen.

Literatur

[1] HUSTY, M.: Eine Bemerkung zu den Dupinschen Zykliden des einfach isotropen bzw. pseudoisotropen Raumes, *Anz. d. Österr. Akad. d. Wiss.* **122** (1985), 171–174.

[2] HUSTY, M. u. RÖSCHEL, O.: Eine affinkinematische Erzeugung gewisser Flächen vierter Ordnung mit zerfallendem Doppelkegelschnitt I, *Glasnik Mat.* **22** (1987), 143–156.

[3] HUSTY, M. u. RÖSCHEL, O.: Eine affinkinematische Erzeugung gewisser Flächen vierter Ordnung mit zerfallendem Doppelkegelschnitt II, *Glasnik Mat.* **22** (1987), 429–447.

[4] HUSTY, M. u. RÖSCHEL, O.: On a particular class of cyclides in isotropic respectively pseudoisotropic space, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* **46** (1984), 531–557.

[5] MÉSZÁROS, F.: Die Zykliden 3. Ordnung im pseudoisotropen Raum I, *Sitz.-Ber. d. Österr. Akad. d. Wiss.* (in Vorbereitung)

[6] PALMAN, D.: Drehzykliden 4. Ordnung (Typus I) des einfach isotropen Raumes, *Glasnik Mat.* **15** (1980), 133–148.

[7] PALMAN, D.: Drehzykliden des einfach isotropen Raumes (Typus II), *Rad JAZU* **408** (1984), 51–59.

[8] PALMAN, D.: Drehzykliden im einfach isotropen Raumes (Typus III), *Rad JAZU* **421** (1986), 9–25.

[9] PALMAN, D.: Drehzykliden des einfach isotropen Raumes (Typus IV), *Rad JAZU* (im Druck).

[10] SACHS, H.: Ebene isotrope Geometrie, Vieweg-Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 1987.

[11] SACHS, H.: Isotrope Geometrie des Raumes, Vieweg-Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 1990.

[12] SACHS, H.: Zur Theorie der Zykliden des einfach isotropen Raumes I, *Glasnik Mat.* **24** (1989), 565–586.

[13] SACHS, H.: Verallgemeinerte parabolische Schiebzykliden des einfach isotropen Raumes I, *Sitz.-Ber. d. Österr. Akad. Wiss. Wien* **198** (1989), 227–246.

[14] SACHS, H.: Die STROMMER-Zykliden des Flaggenraumes, *Journal of Geometry* **43** (1992), 148–165.

[15] SACHS, H.: Vollständig zirkuläre Kurven n-ter Ordnung der isotropen Ebene, *Studia Sci. Math. Hungarica* **24** (1989), 377–383

[16] SACHS, H.: Die Zykliden 3. Ordnung des Flaggenraumes, *Geometriae Dedicata* **43** (1992), 35–58.

[17] STRUBECKER, K.: Beiträge zur Geometrie des isotropen Raumes, *Journ. f. reine u. angew. Math.* **178** (1938), 135–173.

[18] STRUBECKER, K.: Die Geometrie des isotropen Raumes und einige ihrer Anwendungen, *Jahresber. DMV* **48** (1938), 236–257.

[19] STRUBECKER, K.: Differentialgeometrie des isotropen Raumes I: Theorie der Raumkurven, *Sitz.-Ber. d. Österr. Akad. Wiss. Wien* **150** (1941), 1–53.

[20] STRUBECKER, K.: Differentialgeometrie des isotropen Raumes II: Die Flächen konstanter Relativkrümmung $K = rt - s^2$, *Math. Zeitschr.* **47** (1942), 743–777.

[21] STRUBECKER, K.: Differentialgeometrie des isotropen Raumes III: Flächentheorie, *Math. Zeitschr.* **48** (1942), 369–427.

[22] STRUBECKER, K.: Differentialgeometrie des isotropen Raumes IV: Theorie der flächentreuen Abbildungen der Ebene, *Math. Zeitschr.* **50** (1944), 1–92.

[23] STRUBECKER, K.: Differentialgeometrie des isotropen Raumes V: Zur Theorie der Eilinien, *Math. Zeitschr.* **52** (1949), 525–573.