

KLASSIFIKATION DER HYPERBOLISCHEN DODEKAEDERPFLASTERUNGEN VON MAXIMALEN FLÄCHENTRANSITIVEN BEWEGUNGSGRUPPEN

Emil Molnár*

Lehrstuhl für Geometrie, Technische Universität, H-1521 Budapest, Egrý J. u. 1, Ungarn

In memoriam Professor Heinrich Brauner[†]

Received June 1991

AMS Subject Classification: 51 M 20, 51 N 15, 52 B 70, 52 C 22; 05 B 45, 57 Q 91, 57 S 30

Keywords: Equivariant classification of tilings by D -symbols, maximal face-transitive tiling, projective metric realization.

Abstract: All the hyperbolic dodecahedron tilings (T, Γ) are classified, where an isometry group Γ acts transitively on the pentagonal faces of the tiling T in H^3 and Γ is equivariant to $\text{Aut } T$. The D -symbol method leads also to a complete classification of face transitive dodecahedron tilings in S^3 and in H^3 by symmetry breaking.

1. Einführung, Resultate

*Unterstützt von der Ungarischen Wissenschaftlichen Forschungsstiftung (OTKA) No. 1615 (1991).

†Die Arbeit ist eine erweiterte Fassung des Vortrags: Projektive Metrik und eine unendliche Serie von hyperbolischen raumfüllenden Pentagondodekaedern, *Kolloquium über Konstruktive Geometrie in memoriam o. Prof. DDr Heinrich Brauner*, 28.4 – 3.5.1991, Seggauberg (bei Leibnitz), Österreich.

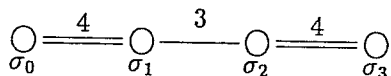
In der Arbeit [7] haben wir mit A. W. M. Dress und D. H. Huson diejenigen euklidischen Pflasterungen (\mathcal{T}, Γ) klassifiziert, wo eine Bewegungsgruppe Γ auf den Flächen der Pflasterung \mathcal{T} transitiv wirkt. Der kombinatorische Algorithmus und das Computerprogramm ergaben auch solche Pflasterungen, die nur in verschiedenen nicht-euklidischen Räumen realisierbar sind. Die Frage, in welchem Raum eine kombinatorische Pflasterung metrisch, d.h. unter einer Bewegungsgruppe Γ verwirklicht wird, ist im allgemeinen ein schwieriges Problem. Dabei können exotische Räume, wie $H^2 \times \mathbb{R}$, $S^2 \times \mathbb{R}$ und andere vorkommen. Bezüglich dieses Themenkreises verweise ich auf die Arbeiten [13], [14], [16], [17] und [18]. Ein wertvolles Hilfsmittel zur Beschreibung nicht-euklidischer Geometrien liefert die projektive Geometrie, die z.B. in [1] hervorragend dargestellt wird und in [2] mit anschaulichem Inhalt belegt wird. Wir werden im folgenden die Methoden der projektiven Metrik (vgl. [9], [12]) benutzen.

Es sei (\mathcal{T}, Γ) eine Pflasterung des hyperbolischen Raumes H^3 , wo ein beliebiger Stein T von \mathcal{T} kombinatorisch ein Pentagondodekaeder mit dem Schläfli-Symbol $\{5, 3\}$ ist. Wir nehmen an, daß eine Bewegungsgruppe Γ auf den (pentagonalen) Flächen von \mathcal{T} transitiv wirkt, d.h., daß für je zwei Flächen f_1 und f_2 der Polyeder von \mathcal{T} (mindestens) eine Bewegung $\gamma \in \Gamma$ existiert, die f_1 in $f_2 = f_1^\gamma$ überführt, so daß die ganze Pflasterung \mathcal{T} auf sich abgebildet wird. Zwei Pflasterungen $(\mathcal{T}_1, \Gamma_1)$ und $(\mathcal{T}_2, \Gamma_2)$ sind in derselben Klasse, sie heißen kombinatorisch äquivalent, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi: \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$ gibt, die die kombinatorische Inzidenzstruktur der Körper, Flächen, Kanten und Ecken von \mathcal{T}_1 erhält und $\Gamma_2 = \varphi^{-1}\Gamma_1\varphi$ gilt. Mit kombinatorisch isomorphen Pflasterungen $\mathcal{T}_1 \cong \mathcal{T}_2$ kann die Gruppe Γ_2 reichhaltiger als Γ_1 sein, d.h. mit einem obigen φ kann $\Gamma_2 > \varphi^{-1}\Gamma_1\varphi$ gelten. Dann sagen wir: $(\mathcal{T}_1, \Gamma_1)$ ist ein Symmetriebruch von $(\mathcal{T}_2, \Gamma_2)$.

Wir interessieren uns für die Pflasterungen (\mathcal{T}, Γ) von maximalen Bewegungsgruppen $\Gamma \cong \text{Aut } \mathcal{T}$, d.h. die Gruppe Γ ist zu der die Inzidenzstruktur erhaltenden Automorphismengruppe äquivalent. Die flächentransitiven Symmetriebrüche (\mathcal{T}, Γ_1) von (\mathcal{T}, Γ) liefern dann eine vollständige Klassifikation der gewünschten äquivalenten Pflasterungen.

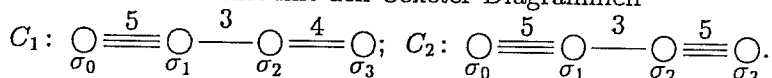
In diesem Sinne habe ich in [15] die 43 Klassen der äquivalenten Würfelpflasterungen $(\mathcal{T}_w, \Gamma_w)$ des euklidischen Raumes E^3 beschrieben. Hier ist $\text{Aut } \mathcal{T}_w = [4, 3, 4] \cong \text{Pm}\bar{3}\text{m}$ eine kristallographische Gruppe, die von den 4 Spiegelungen an den Seitenflächenebenen des charakteris-

tischen Orthoschemes C des Würfels erzeugt wird. Im Coxeter-Diagramm



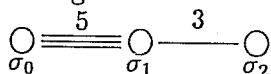
weisen die Ecken auf die 4 Seitenebenen σ_i ($i = 0, \dots, 3$) des Orthoschemes C hin, wo z.B. σ_0 und σ_1 längs der Kante A_2A_3 den Keilwinkel $\frac{\pi}{n_{01}} = \frac{\pi}{4}$ einschließen und die nicht eingezeichneten Linien die 3 rechten Winkel darstellen.

Wir kennen 2 Pentagonododekaeder, die den hyperbolischen Raum H^3 regulär auspflastern können [3]. Diese haben die analogen charakteristischen Orthoscheme mit den Coxeter-Diagrammen



Diese zwei Orthoscheme haben den eigentlichen (inneren) Eckpunkt A_0 , (z.B. im projektiven Modell von H^3), da die Teilscheme von $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sphärische Diagramme mit endlichen Gruppen bilden.

Das gemeinsame Teildiagramm



kennzeichnet das lokale sphärische Orthoschem um das Zentrum A_3 des regulären Pentagonododekaeders. Die Winkel $\frac{\pi}{4}$, bzw. $\frac{\pi}{5}$ zwischen den Simplexebenen σ_2 und σ_3 längs der Kante A_0A_1 ergeben die Keilwinkel $\frac{2\pi}{4}$, bzw. $\frac{2\pi}{5}$ der entsprechenden Dodekaeder (Abb. 1.1).

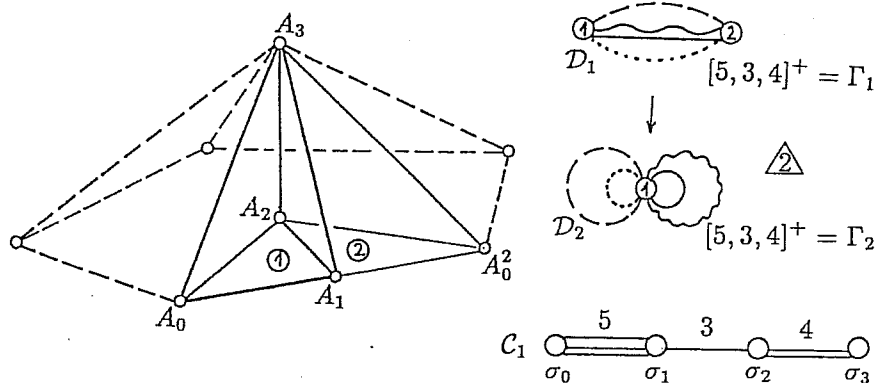


Abb. 1.1.

So haben wir 2 Dodekaederpflasterungen $(\mathcal{T}_k, \Gamma_k)$ ($k = 1, 2$) von maximalen flächentransitiven Bewegungsgruppen Γ_k mit den Darstellungen

$$\Gamma_k = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 - \sigma_i^2 = 1 = (\sigma_i \sigma_j)^{m_{ij}}; i, j \in I = \{0, 1, 2, 3\}),$$

$$(1.1) \quad \text{wo } (m_{ij})_k = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & m_k \\ 2 & 2 & m_k & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} m_1 = 4 \text{ für } \Gamma_1, \\ m_2 = 5 \text{ für } \Gamma_2 \end{array}$$

die entsprechenden *Coxeter-Schlüßflischen Matrizen* sind.

In Abschnitt 3 werde ich eine neue unendliche Serie $(\mathcal{T}_p, \Gamma(p, 4); 3 \leq p, p \neq 4)$ von gewünschten Dodekaederpflasterungen konstruieren, wo die Parameter $(p, 4)$ auf die Anzahl der Nachbarn bei den Dodekaederkanten hinweisen. In Abschnitt 4 werde ich analog 3 neue gewünschte Pflasterungen $(\mathcal{T}_q, \Gamma(q, 6); q = 3, 4, 5)$ kurz beschreiben.

Als Hauptresultat haben wir den folgenden

Satz. *Außer den 2 Coxeterschen Dodekaederpflasterungen $(\mathcal{T}_k, \Gamma_k)$ gibt es im hyperbolischen Raum H^3 genau die unendliche Serie $(\mathcal{T}_p, \Gamma(p, 4); 3 \leq p, p \neq 4)$ von Dodekaederpflasterungen sowie die 3 weiteren Pflasterungen $(\mathcal{T}_q, \Gamma(q, 6); q = 3, 4, 5)$ wobei jede Bewegungsgruppe $\Gamma \cong \text{Aut } \mathcal{T}$ auf den Flächen der entsprechenden Pflasterung \mathcal{T} transitiv wirkt, und jedes Dodekaeder T von \mathcal{T} eigentliche Ecken besitzt.*

Im Falle $p = 4$ gilt $\text{Aut } \mathcal{T}_p = \Gamma_1 > \Gamma(p, 4)$, d.h. ist $\Gamma(4, 4)$ nicht maximal und $(\mathcal{T}_4, \Gamma(4, 4))$ ist ein Symmetriebruch von $(\mathcal{T}_1, \Gamma_1)$.

Natürlich könnten wir auch ideale Ecken (auf der Absolutfigur von H^3) mit endlich vielen weiteren Fällen zulassen.

Äußere Ecken würden unendlich viele Serien ergeben.

2. Beschreibung der äquivarianten Pflasterungen durch D -Symbole

Zunächst erinnern wir kurz an einige Begriffe. Hinsichtlich der allgemeinen Konzeption und 2-dimensionaler Anwendungen seien die Arbeiten [4], [5], [6] und [8] erwähnt. In [7], [15], [17] sind die räumlichen Beziehungen auf Grund der Arbeiten [13] und [16] weiterentwickelt.

2.1. Wir gehen aus von einer kombinatorischen d -dimensionalen Polyederpflasterung \mathcal{T} mit ihrer formalen baryzentrischen Unterteilung im Sinne der stückweisen-linearen Topologie und gelangen so von \mathcal{T} zur

Simplexzerlegung C. Ein solches Simplex $C \in \mathcal{C}$ hat i -Ecken $A_i, i \in I := \{0, 1, \dots, d\}$, sowie die formalen i -Mittelpunkte einer Fahne der inzidenten d -Körper, \dots , i -Fläche, \dots 0-Eck von \mathcal{T} . Die zu A_i nicht inzidente Seitenhyperfläche von C sei mit σ_i bezeichnet, ebenso wie die *formale Spiegelung*, die die Hyperfläche $\sigma_i = A_0 \cdot \dot{\vee} \cdot A_d$ punktweise festläßt und A_i mit dem i -Eckpunkt $A_i^{\sigma_i}$ des i -benachbarten Simplexes C^{σ_i} vertauscht. Auf diese Weise führen wir die auf den Körpern von \mathcal{C} frei wirkenden *involutorischen σ_i -Operationen* und die durch sie erzeugte *freie Coxeter-Gruppe* mit der Darstellung

$$(2.1) \quad \Sigma_I := (\sigma_i, i \in I - \sigma_i^2 = 1, i \in I := \{0, 1, \dots, d\})$$

ein. Die Formel

$$(2.2) \quad (C^{\sigma_i})^\sigma = (C^\sigma)^{\sigma^{-1}\sigma_i\sigma} =: (C^\sigma)^{\sigma_i^\sigma}$$

zeigt unsere Schreibweise, wie Σ_I auf \mathcal{C} von links operiert. Wenn $\sigma = \sigma_{i_r} \dots \sigma_{i_2} \sigma_{i_1}$ ein Element von Σ_I ist, so gehen wir durch die Simplexe

$$(2.3) \quad C, C^{\sigma_{i_1}}, C^{\sigma_{i_2}\sigma_{i_1}}, \dots, C^{\sigma_{i_r} \dots \sigma_{i_2}\sigma_{i_1}} = C^\sigma, C^{\sigma_i\sigma}$$

von C bis zu $C^{\sigma_i\sigma}$. In das letzte Simplex treten wir durch die i -Seitenhyperfläche $(\sigma_i)^\sigma$ von $(C)^\sigma$ mit der konjugierten i -Spiegelung $\tau^{-1}\sigma_i\sigma$ ein.

Wir nehmen an, daß \mathcal{T} *einfach zusammenhängend* ist, d.h. Σ_I wirkt auf den d -Körpern von \mathcal{C} transitiv, und jede eventuelle Relation in Σ_I kann man aus den vorkommenden *Schlingenrelationen*

$$(2.4) \quad C = C^{\tau^{-1}(\sigma_i\sigma_j)^{m_{ij}(C^\tau)}}; \quad C \in \mathcal{C}; \tau \in \Sigma_I; i, j \in I$$

herleiten. Wir gehen also von C zu C^τ ; kehren dann wir die $(d-2)$ -Fläche von C^τ um, wobei seine j - und i -Hyperflächen und die der $2 \cdot m_{ij}(C^\tau)$ benachbarten Simplexe sich treffen; dann gehen wir von C^τ bis C zurück. Die Konstruktion von Σ_I hängt von einem *Anfangssimplex* C_0 ab. Verschiedene Anfangssimplexe ergeben aber dieselbe Gruppe Σ_I bis auf eine Konjugation.

2.2. Wir führen gemäß (2.4) allgemein, die *Matrixfunktion*

$$(2.5) \quad M: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}_{I \times I}, \quad C \mapsto (m_{ij}(C)); \quad i, j \in I$$

ein. Hier ist die natürliche Zahl $m_{ij}(C)$ minimal bezüglich

$$(2.6) \quad C^{(\sigma_i\sigma_j)^{m_{ij}(C)}} = C.$$

Wir könnten auch $m_{ij}(C) = \infty$ zulassen, dann schreiben wir lieber $m_{ij}(C) = 0$, um (2.6) formal zu erfüllen.

Wir haben so die Pflasterung \mathcal{T} mit \mathcal{C} und M durch die verallgemeinerte Coxeter-Gruppe $\Sigma_I(\mathcal{C}, M)$ nach (2.4) gekennzeichnet. M ist die verallgemeinerte Coxeter-Schläflische Matrixfunktion mit den folgenden zusätzlichen Eigenschaften

$$(2.7) \quad m_{ij}(C) = m_{ji}(C) = m_{ij}(C^{\sigma_i});$$

$$(2.8) \quad m_{ii}(C) = 1; \quad m_{ij}(C) = 2, \quad \text{wenn } |i - j| \geq 2;$$

$$(2.9) \quad m_{ij}(C) \geq 3, \quad \text{wenn } |i - j| = 1$$

für jedes $C \in \mathcal{C}$ und $i, j \in I := \{0, 1, \dots, d\}$.

2.3. Zunächst nehmen wir an, daß \mathcal{T} eine *periodische Pflasterung* ist, d.h. daß eine nicht triviale Gruppe Γ auf \mathcal{T} wirkt, die die kombinatorische Inzidenzstruktur von \mathcal{T} erhält. Wir setzen voraus, daß Γ auf den Körpern der baryzentrische Simplexzerlegung \mathcal{C} von rechts frei wirkt, und dabei die σ_i -Operationen wie folgt erhält:

$$(2.10) \quad (C^{\sigma_i})^\gamma = (C^\gamma)^{\gamma^{-1}\sigma_i\gamma} =: (C^\gamma)^{\sigma_i^\gamma}, \quad C \in \mathcal{C}, \quad \gamma \in \Gamma.$$

Das heißt, das γ -Bild von C^{σ_i} ist das i -benachbarte Simplex von C^γ bei seiner i -Seitenhyperfläche $(\sigma_i)^\gamma$. Wir sagen: Γ ist *äquivariant* bezüglich $\Sigma_I(\mathcal{C}, M)$. Die Gruppe Γ faktorisiert dann sowohl die Zerlegung \mathcal{C} als auch die Matrixfunktion M . Ein Element von $\mathcal{D} := \mathcal{C}/\Gamma$ ist eine Γ -Bahn (Orbit)

$$(2.11) \quad D := C^\Gamma := \{C^\gamma \in \mathcal{C} : \gamma \in \Gamma\}.$$

Die i -Nachbarschaft oder die induzierte σ_i -Operation auf der sogenannten D -Menge \mathcal{D} wird durch

$$(2.12) \quad D^{\sigma_i} := C^{\sigma_i\Gamma} := \{C^{\sigma_i\gamma} \in \mathcal{C}, \gamma \in \Gamma\}$$

für jedes $i \in I := \{0, 1, \dots, d\}$ erklärt. Die induzierte Matrixfunktion \mathcal{M} auf \mathcal{D} wird mittels

$$(2.13) \quad \mathcal{M}: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{N}_{I \times I}; \quad D \mapsto (m_{ij}(C)); \quad C \in D; \quad i, j \in I$$

eingeführt.

Damit haben wir zu einer periodischen Pflasterung (\mathcal{T}, Γ) das D -Symbol $\mathcal{D}(\Sigma_I, \mathcal{M})$ definiert. Dieses besteht aus einer D -Menge \mathcal{D} , die mit den σ_i -Operationen von Σ_I zu einem $d + 1$ -farbigen D -Graph ausgestattet ist, und aus der Matrixfunktion \mathcal{M} nach (2.13).

Zum Beispiel hat jede der 2 Coxeterschen Dodekaederpflasterungen $(\mathcal{T}_k, \Gamma_k)$ ($k = 1, 2$ nach (1.1)) das D -Symbol bestehend aus dem eineckigen Graph mit 4 Schlingen

$\sigma_0: \cdots \cdots$, $\sigma_1: - - - - -$, $\sigma_2: \text{---}$, $\sigma_3: \text{~~~~}$ (Abb. 1.1)
 und aus der Matrix \mathcal{M}_k nach Formel (1.1).

2.4. Wenn wir umgekehrt von einem D -Graph ausgehen, so können wir aus $|\mathcal{D}|$ Simplexen nach den σ_i -Operationen (mehrdeutig) einen *Fundamentalebereich* \mathcal{F}_Γ für eine Gruppe Γ topologisch zusammenkleben. Die natürlichen Forderungen, entsprechend zu den obigen Formeln, ermöglichen dann die *Erzeugenden* und die *definierenden Relationen* für Γ bis auf gewisse *freien Parameter* einzuführen. Diese Freien Parameter beschreiben die möglichen Matrixfunktionen sowie die Simplexzerlegungen \mathcal{C} der möglichen Pflasterungen \mathcal{T} mit ihrer verallgemeinerten Coxeter-Gruppen $\Sigma_I(\mathcal{C}, M)$. Die allgemeine topologische Konstruktion ist auf Grund [13] in [7] und [15] beschrieben.

In Abschnitt 3 wird genau dieses inverse Problem illustriert werden. Hier erwähnen wir noch einige Sätze.

2.5. Bemerkungen. a) *Zwei Pflasterungen* $(\mathcal{T}_1, \Gamma_1)$ und $(\mathcal{T}_2, \Gamma_2)$ sind genau dann *äquivariant* (siehe Abschnitt 1), wenn ihre D -Symbole *isomorph* sind, d.h. wenn es eine Bijektion

$$(2.14) \quad \varphi: \mathcal{D}_1(\Sigma_I, \mathcal{M}_1) \rightarrow \mathcal{D}_2(\Sigma_I, \mathcal{M}_2), \quad D_1 \mapsto D_2 = D_1^\varphi$$

gibt, die die entsprechenden σ_i -Operationen und die Matrixfunktionen erhält:

$$(2.15) \quad \begin{aligned} (D_1^{\sigma_i})^\varphi &= (D_1^\varphi)^{\varphi^{-1}\sigma_i\varphi} =: (D_1^\varphi)^{\sigma_i^\varphi} \\ \text{und } (m_{ij}(D_1))_1 &= (m_{ij}(D_1^\varphi))_2. \end{aligned}$$

b) $(\mathcal{T}_1, \Gamma_1)$ ist ein *Symmetriebruch* von $(\mathcal{T}_2, \Gamma_2)$, wenn es eine *Surjektion* φ mit (2.14) und (2.15) gibt (Abb. 1.1).

Um zu entscheiden, ob a) oder b) oder kein weder a) und b) gilt, hat D. Huson (im Druck) effektive Computerprogramme entwickelt.

c) Ein *Teilsymbol* $\mathcal{D}_{ij}(\Sigma_{ij}, \mathcal{M}_{ij})$ von $\mathcal{D}(\Sigma_I, \mathcal{M})$, bestehend aus einer Komponente des Teildigrammes mit i - und j -Operationen und aus der entsprechenden *Minorfunktion*, beschreibt eine 1-dimensionale Pflasterung $(\mathcal{T}_{ij}, \Gamma_{ij})$. Hier ist Γ_{ij} der *Stabilisator* der entsprechenden $(d-2)$ -Fläche von \mathcal{C} und damit jeder $(d-2)$ -Fläche in ihrer Γ -Bahn (bis auf Konjugation) in der Gruppe Γ .

d) *Analoge Behauptungen* gelten für die Komponenten der $k+1$ -farbigen Teilsymbole von $\mathcal{D}(\Sigma_I, \mathcal{M})$ ($1 \leq k \leq d$) und für k -Pflasterungen.

Da die 1- und 2-dimensionalen Pflasterungen mit ihren Gruppen "wohlbekannt" sind, haben wir die Hoffnung, diese für die Dimension 3

induktiv beschreiben zu können. Die Schwierigkeiten scheinen aber sehr groß zu sein.

3. Die unendliche Serie $(T_p, \Gamma(p, 4); 3 \leq p)$

3.1. In Abb. 3.1 sehen wir den D -Graph D mit den involutorischen Permutationen (Transpositionen)

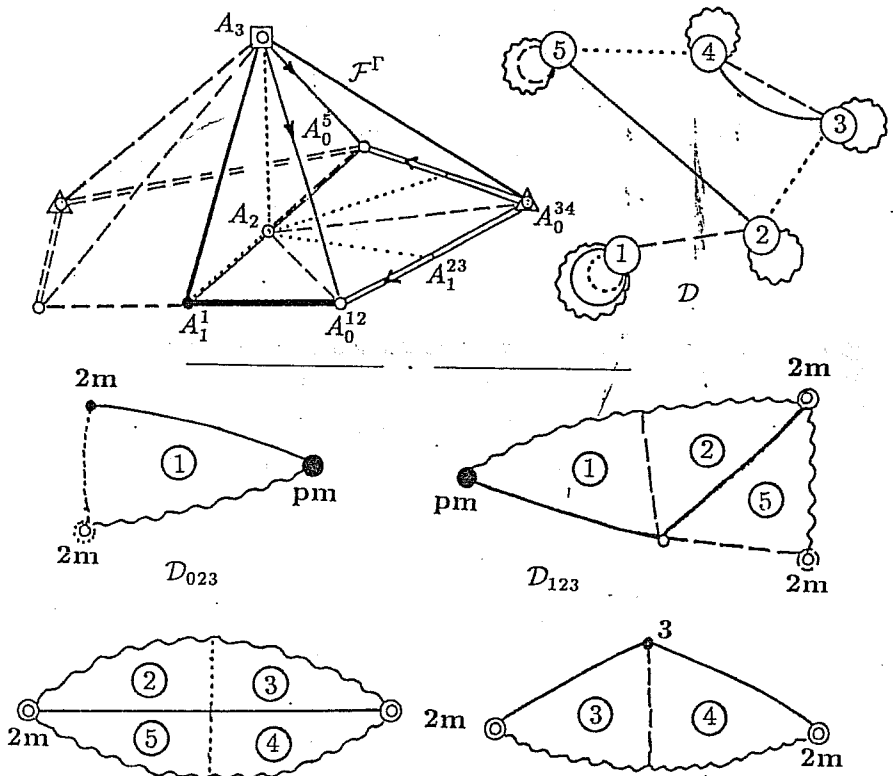


Abb. 3.1-3.2.

$$(3.1) \quad \begin{array}{ll} \sigma_0: (1)(2,3)(4,5) \cdots \cdots \cdots & \sigma_2: (1)(2,5)(3,4) \text{ ———} \\ \sigma_1: (1,2)(3,4)(5) \text{ - - - - -} & \sigma_3: (1)(2)(3)(4)(5) \text{ ~~~~~} \end{array}$$

gelistet von unserem Computer, wo $x \leftrightarrow D_x$ ($x = 1, 2, 3, 4, 5$).

Wenn wir das Teildigramm $D_{013} =: D^2$ nach Weglassen der Kan-

ten der σ_2 -Operation studieren, finden wir eine Komponente. Das bedeutet nach 2.5. d), daß die dem D -Symbol entsprechende (kombinatorische) Pflasterung (T, Γ) flächentransitiv ist. In Abb. 3.1 wird auch der aus 5 Simplexen zusammengesetzte Fundamentalebenebereich

$$(3.2) \quad \mathcal{F}_\Gamma = A_3 A_2 A_1^1 A_0^{12} \cup A_3 A_2 A_1^{23} A_0^{12} \cup A_3 A_2 A_1^{23} A_0^{34} \cup \\ \cup A_3 A_2 A_1^{45} A_0^{34} \cup A_3 A_2 A_1^{45} A_0^5 =: \bigcup_{k=1}^5 D_k$$

mit den flächenidentifizierenden Erzeugenden für die Gruppe Γ angegeben. Diese sind die Spiegelungen:

$$m_0 \text{ an der Fläche } A_3 A_2 A_1^1, \text{ wie } D_1^{\sigma_0} = D_1 \text{ zeigt;}$$

$$\text{und } m_1: A_3 A_1^1 A_0^{12} \text{ nach } D_1^{\sigma^2} = D_1.$$

Ferner haben wir die "Drehung"

$$r: A_3 A_0^{12} A_0^{34} \rightarrow A_3 A_0^5 A_0^{34} \text{ nach } D_2^{\sigma^2} = D_5, D_3^{\sigma^2} = D_4$$

und nach $m_{02}(D_k) = 2$ ($k = 2, 3, 4, 5$) d.h. der Stabilisator $\Gamma_{02}(D_k)$ der Kantenklasse $(A_1^{23} A_3, A_1^{34} A_3)$ ist trivial, wie die Teilpflasterung zu $D_{02}(D_k)$ ($k = 2, 3, 4, 5$) zeigt. Erzeugenden sind ferner

$$m_2: A_3 A_2 A_0^5 \text{ nach } D_5^{\sigma^1} = D_5;$$

$$m_3: A_1^1 A_0^{12} A_0^{34} A_0^5 \text{ nach } D^{\sigma^3} = D \text{ (für jede } D \in \mathcal{D})$$

und nach $m_{03}(D_\ell) = m_{13}(D_k) = 2$ ($\ell = 2, 3, 4, 5$ bzw. $k = 1, 2, 3, 4$), wie zuvor.

Die Relation $(m_0 m_1)^2 = 1$ ist eine Folgerung aus $m_{02}(D_1) = 2$. Ferner gelten $(m_0 m_3)^2 = 1$ und $(m_2 m_3)^2 = 1$ nach $m_{03}(D_1) = 2$ und $m_{13}(D_5) = 2$.

Weitere Relationen für Γ werden mittels

$$(3.3) \quad m_{01}(D) = 5, \quad m_{12}(D) = 3 \quad (D \in \mathcal{D})$$

festgelegt, da wir Pflasterungen mit Pentagondodekaedern wollen. Somit bestehen die Relationen

$$m_0 m_2 = 1 \quad (\text{so } m_2 = m_0) \text{ nach } m_{01}(D) = 5;$$

$$\text{ferner } m_1 r m_2 r^{-1} = 1 \text{ nach } m_{12}(D_1) = m_{12}(D_2) = m_{12}(D_5) = 3,$$

$$\text{und } r^3 = 1 \text{ nach } m_{12}(D_3) = m_{12}(D_4) = 3.$$

Wir haben weiters

$$(3.4) \quad m_{23}(D_1) = p \text{ und } m_{23}(D_2) = m_{23}(D_5) = 2x, \\ m_{23}(D_3) = m_{23}(D_4) = 2y,$$

was unmittelbar zu den Relationen

(3.5) $(m_1 m_3)^p = 1$, $(m_3 r m_3 r^{-1})^x = 1 = (m_3 r m_3 r^{-1})^y$ so $x = y$
führt. Damit haben wir die zwei freien Parameter $(p, 2x)$, $3 \leq p$, $2 \leq x$
für Γ und die Darstellung

$$(3.6) \quad \Gamma(p, 2x) = \left(m_0, m_1, m_3, r - 1 = m_0^2 = m_1^2 = m_3^2 = r^3 = \right. \\ \left. = (m_0 m_1)^2 = (m_0 m_3)^2 = (m_1 m_3)^p = m_1 r m_0 r^{-1} = (m_3 r m_3 r^{-1})^x \right)$$

durch die Matrixfunktion \mathcal{M} nach (3.3-5).

3.2. Nun untersuchen wir die Teilsymbole von $\mathcal{D}(\Sigma_I, \mathcal{M})$ mit 3 Operationen und die zu ihnen gehörenden 2-dimensionalen Pflasterungen, um die Stabilisatoren der Eckenklassen des Fundamentalbereiches \mathcal{F}_Γ zu bestimmen.

Abb. 3.2 zeigt den sphärischen Fundamentalbereich für den Stabilisator $\Gamma_{012} = \Gamma(A_3)$, der zum Teilsymbol $\mathcal{D}^3 := \mathcal{D}_{012}(\Sigma_{012}, \mathcal{M}_{012})$ gehört. Die Gruppe $\Gamma(A_3) \cong [3^+, 4] \cong \mathfrak{m}\bar{3}$ hat 24 Elemente, und transformiert das Pentagondodekaeder T des Zentrums A_3 in sich. Die sphärische Gruppe $\mathfrak{m}\bar{3}$ hat eine Signatur $(+, 0; [3]; \{(2)\})$ im Sinne von [10], [11], [20].

Hier ist die Faktorfläche $S^2/\mathfrak{m}\bar{3} \sim \mathcal{F}_{\mathfrak{m}\bar{3}}$ orientierbar (+) mit Genus 0. Sie besitzt ein singuläres 3-Rotationszentrum, wie wir in Klammer [3] des Symbols finden. Sie besitzt auch ein Randkomponent mit einem 2-Diederzentrum, wie $\{(2)\}$ im Symbol zeigt.

Kein Problem gibt es mit dem Stabilisator $\Gamma(A_1^4) = \Gamma_{023}(A_1^4)$, der zu $\mathcal{D}_{023}(D_1)$ gehört. Das ist ebenfalls eine endliche sphärische Gruppe $[2, p] =: \frac{p}{m}\mathfrak{m}$ mit Signatur $(+, 0; []; \{(2, 2, p)\})$ (Abb. 3.2). Der Stabilisator $\Gamma_{023}(A_1^{23}, A_1^{45})$ gehört zu $\mathcal{D}_{023}(D_k)$ ($k = 2, 3, 4, 5$) und ist eine sphärische Gruppe $\mathfrak{xm} = [x]$ mit Signatur $(+, 0; []; \{(x, x)\})$ (Abb. 3.2).

Eine zentrale Rolle spielen die 0-Eckenstabilisatoren. $\Gamma_{123}(A_0^{12}, A_0^5)$ gehört zum Teilsymbol $\mathcal{D}_{123}(D_1, D_2, D_5)$. Die entsprechende 2-dimensionale Pflasterung (Abb. 3.2) besitzt die Signatur $(+, 0; []; \{(2, x, p)\})$. $\Gamma_{123}(A_0^{34})$ wird durch $\mathcal{D}_{123}(D_3, D_4)$ und die entsprechende 2-Pflasterung (Abb. 3.2) beschrieben. Die Signatur $(+, 0; [3]; \{(x)\})$ zeigt, daß $\Gamma_{123}(A_0^{34})$ nur im Falle $x = 2$ eine sphärische Gruppe $\mathfrak{m}\bar{3} = [3^+, 4]$ der Ordnung 24 ist (Abb. 3.2). Dann ist aber $\Gamma_{123}(A_0^{12}, A_0^5) = [2, p] =: \frac{p}{m}\mathfrak{m}$ eine sphärische Gruppe der Ordnung $4p$.

3.3. Das Hauptproblem ist, ob die obigen unendlich vielen Fälle in H^3 realisierbar sind, oder nicht. Die Antwort ist ja.

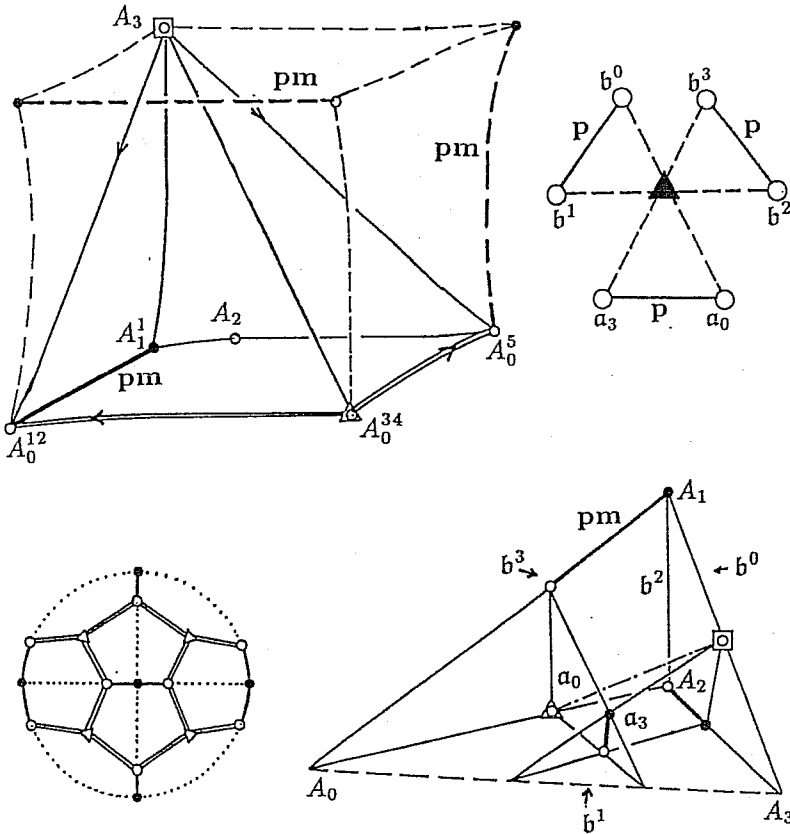


Abb. 3.3-3.4.

Zunächst konstruieren wir den sogenannten Spitzenwürfel oder Lambert-Würfel (Abb. 3.3), mit 3 Keilwinkeln von $\frac{\pi}{p}$ an 3 schiefen Kanten und mit rechten Winkeln bei den anderen. Das wird zur metrischen Konstruktion von \mathcal{F}_Γ in Abb. 3.1 notwendig und hinreichend sein. Wenn wir nämlich 3 Bilder von \mathcal{F}_Γ um die "Drehachse" kombinatorisch zusammenkleben, dann haben wir einen würfelförmigen Fundamentalbereich $\mathcal{F}_w(p)$ für eine durch 6 Spiegelungen erzeugte Gruppe $\Gamma_w(p)$ mit dem Coxeter-Diagramm in Abb. 3.3. Gebrochene Linien weisen auf die gemeinsamen Lotstrecken der entsprechenden zwei Ebenen hin. Die metrische Existenz eines solchen Würfels in H^3 ist wohlbekannt. Eine einfache Konstruktion, wie folgt, beruht auf dem Vektormodell

von H^3 [12].

3.4. Wir gehen von der folgenden Matrix

$$(3.7) \quad (b^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \frac{\pi}{p} & 0 & 0 \\ -\cos \frac{\pi}{p} & 1 & -\operatorname{ch} t & 0 \\ 0 & -\operatorname{ch} t & 1 & -\cos \frac{\pi}{p} \\ 0 & 0 & -\cos \frac{\pi}{p} & 1 \end{pmatrix} = \\ = ((b^i; b^j)) \quad (3 \leq p \in \mathbb{N}; 0 < t \in \mathbb{R})$$

aus, die wir als eine Coxeter-Schläfli Matrix betrachten. Dann definieren (b^{ij}) die Skalarprodukte der linear-unabhängigen Formen b^0, b^1, b^2, b^3 des dualen Raumes \mathcal{V}_4 eines 4-Vektorraums V^4 über dem Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen.

Wir können nun mittels (b^{ij}) ein Skalarprodukt

$$(3.8) \quad \langle ; \rangle: \mathcal{V}_4 \times \mathcal{V}_4 \rightarrow \mathbb{R}, \langle u, v \rangle := \langle b^i u_i; b^j u_j \rangle = u_j b^{ij} u_j$$

zunächst im dualen Raum \mathcal{V}_4 definieren, wobei wir die Einstein-Schouten Konventionen benutzen.

Sei $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ in V^4 die duale Basis zu $\{b^0, b^1, b^2, b^3\}$ d.h. es gelte

$$(3.9) \quad a_i b^j = \delta_i^j \quad (\text{das Kronecker-Symbol}).$$

Wegen

$$(3.10) \quad \operatorname{Det}(b^{ij}) = \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{p}\right)^2 - \operatorname{ch}^2 t =: B < 0,$$

können wir die inverse Matrix

$$(3.11) \quad (a_{ij}) = (b^{ij})^{-1} \quad \text{mit} \quad a_{ik} b^{kj} = \delta_i^j$$

bilden, und ein Skalarprodukt

$$(3.12) \quad \langle ; \rangle: V^4 \times V^4 \rightarrow \mathbb{R}, \langle x, y \rangle := \langle x^i a_i; y^j a_j \rangle = x^i a_{ij} y^j$$

in V^4 definieren.

Die lineare Polarität und ihre inverse Polarität

$$(3.13) \quad \begin{aligned} (*) &: \mathcal{V}_4 \rightarrow V^4: u \mapsto u_* = u; \\ (*) &: V^4 \rightarrow \mathcal{V}_4: x \mapsto x^* = \bar{x} \end{aligned}$$

sind über

$$u := u_* = (b^i u_i)_* = u_i b_*^i = u_i b^{ij} a_j \quad \text{bzw.}$$

$$\bar{x} = x^* = (x^i a_i)^* = a_i^* x^i = b^k a_{ki} x^i$$

definiert. In Zusammenhang mit den Gleichungen

$$(3.14) \quad \langle \mathbf{x}; \mathbf{u} \rangle = \mathbf{xu} = \langle \mathbf{x}; \mathbf{u} \rangle$$

können wir die Vektoren und Formen und ebenso \mathcal{V}_4 und \mathbf{V}^4 kanonisch identifizieren.

Wir können den projektiv metrischen Raum $\mathcal{P}^3(\mathbf{V}^4, \mathcal{V}_4, \langle ; \rangle)$, nun wie üblich, über die Teilraumstrukturen von \mathbf{V}^4 bzw. \mathcal{V}_4 mit Skalarprodukt $\langle ; \rangle$ definieren. Eine Ebene (\mathbf{u}) ist mit einem Punkt (\mathbf{x}) inzident, oder (\mathbf{u}) und (\mathbf{x}) sind orthogonal, oder (\mathbf{x}) und (\mathbf{u}) sind konjugierte (polare) Punkte in \mathcal{P}^3 , wenn $0 = \mathbf{xu} = \langle \mathbf{x}; \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{x}; \mathbf{u} \rangle$ gilt.

Dieses $\langle ; \rangle$ hat nach (3.7) die Signatur $(+++)$, sodaß wir eine hyperbolische Metrik haben. Punkte (\mathbf{x}) mit $\langle \mathbf{x}; \mathbf{x} \rangle < 0$ und Ebene (\mathbf{u}) mit $\langle \mathbf{u}; \mathbf{u} \rangle > 0$ definieren die eigentlichen Punkte bzw. Ebenen des hyperbolischen Raumes $H^3 \subset \mathcal{P}^3$. Die idealen Punkte (\mathbf{x}) und ihre Polaren, die idealen Ebenen (\mathbf{x}) werden über $0 = \langle \mathbf{x}; \mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}; \mathbf{x} \rangle$ erklärt. Die Pole von eigentlichen Ebenen und die Polaren von eigentlichen Punkten sind die äußeren Raumelemente von H^3 .

Die Entfernung s der eigentlichen Punkte (\mathbf{x}) und (\mathbf{y}) ist durch

$$(3.15) \quad \cosh s = -\langle \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle / (\langle \mathbf{x}; \mathbf{x} \rangle \cdot \langle \mathbf{y}; \mathbf{y} \rangle)^{1/2} > 1$$

wohl definiert; ebenso der Winkel α der eigentlichen Ebenen (\mathbf{u}) und (\mathbf{v}) durch

$$(3.16) \quad \cos \alpha = -\langle \mathbf{u}; \mathbf{v} \rangle / (\langle \mathbf{u}; \mathbf{u} \rangle \cdot \langle \mathbf{v}; \mathbf{v} \rangle)^{1/2}.$$

Die Bewegungsgruppe von $H^3 \subset \mathcal{P}^3$ wird durch Spiegelungen an Pol-Polaren Paaren erzeugt. Die Gleichungen

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{p}): \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{x} - \frac{2\langle \mathbf{x}; \mathbf{p} \rangle}{\langle \mathbf{p}; \mathbf{p} \rangle} \mathbf{p}; \\ \mathbf{u} &\mapsto \mathbf{u} - \mathbf{p} \frac{2\langle \mathbf{u}; \mathbf{p} \rangle}{\langle \mathbf{p}; \mathbf{p} \rangle} \end{aligned}$$

definieren die Spiegelung für Punkte bzw. Ebenen. Eine Spiegelung ist involutorisch und sie erhält das Skalarprodukt $\langle ; \rangle$.

3.5. Wir kehren zum Spitzenwürfel im Coxeter-Diagramm in Abb. 3.3 zurück.

Es seien über Formen $\mathbf{b}^0, \mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \mathbf{b}^3$ nach (3.7) die Seitenflächen eines Simplexes von $H^3 \subset \mathcal{P}^3$ dargestellt. Aus den Formeln (3.15–16) ersehen wir, daß die Winkel zwischen (\mathbf{b}^0) und (\mathbf{b}^1) sowie zwischen (\mathbf{b}^2) und (\mathbf{b}^3) gleich $\frac{\pi}{p}$ sind. Die Entfernung der Ebenen (\mathbf{b}^1), (\mathbf{b}^2) ist unter Beachtung von (3.15–16) genau der Parameter t . Die anderen

rechten Winkel werden ebenfalls durch unsere Formeln realisiert. Die duale Basis $\{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ zu $\{\mathbf{b}^i\}$ kennzeichnet die Eckpunkte unseres Simplexes. Wie die symmetrische Matrix

$$(3.18) \quad (a_{ij}) = ((\mathbf{a}_i; \mathbf{a}_j)) = (b^{ij})^{-1}$$

mit

$$\begin{aligned} a_{00} = a_{33} &= \frac{1}{B} \left(\sin^2 \frac{\pi}{p} - \operatorname{ch}^2 t \right) > 0, & a_{11} = a_{22} &= \frac{1}{B} \sin^2 \frac{\pi}{p} < 0, \\ a_{01} = a_{23} &= \frac{1}{B} \cos \frac{\pi}{p} \sin^2 \frac{\pi}{p} < 0, & a_{02} = a_{13} &= \frac{1}{B} \cos \frac{\pi}{p} \operatorname{ch} t < 0, \\ a_{03} &= \frac{1}{B} \cos^2 \frac{\pi}{p} \operatorname{ch} t < 0, & a_{12} &= \frac{1}{B} \operatorname{ch} t < 0 \end{aligned}$$

$$B = \sin^4 \frac{\pi}{p} - \operatorname{ch}^2 t$$

zeigt, liegen die Eckpunkte (\mathbf{a}_0) und (\mathbf{a}_3) außerhalb der Absolutfigur von H^3 , (\mathbf{a}_1) und (\mathbf{a}_2) sind eigentliche Punkte. Die Polarebenen (\mathbf{a}_3) und (\mathbf{a}_0) sind eigentlich. Wir erfüllen alle Forderungen des Coxeter-Diagrammes in Abb. 3.3, wenn der Winkel $\frac{\pi}{p}$ zwischen (\mathbf{a}_0) und (\mathbf{a}_3) genau $\frac{\pi}{p}$ ist. Dazu müssen wir den Parameter t noch geeignet wählen. Nach (3.16) und (3.18) folgt die Bedingung

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \cos \frac{\pi}{p} &= -a_{03} / \sqrt{(a_{00} a_{33})} = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{p} \operatorname{ch} t}{\operatorname{ch}^2 t - \sin^2 \frac{\pi}{p}}, \\ \text{also } \operatorname{ch} t &= \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{p} + \left(1 - \frac{3}{4} \cos^2 \frac{\pi}{p} \right)^{1/2} > 1, \\ \text{wenn } 0 > \cos \frac{\pi}{p} &\left(\cos \frac{\pi}{p} - 1 \right), \text{ d.h. } p \geq 3 \text{ gilt.} \end{aligned}$$

Wir können nun leicht nachprüfen, daß die Entfernung zwischen den Ebenen (b^0) und (\mathbf{a}_0) und ebenso zwischen (b^3) und (\mathbf{a}_3) unser bereits fester Parameter t ist. Nach unseren vorigen Überlegungen ist das gewünschte hyperbolische Pentagondodekaeder damit konstruiert. In Abb. 3.4 haben wir sein Bild in stereographischer Projektion dargestellt. Bei den fetten Kanten haben die Keilwinkel die Größe $\frac{2\pi}{p}$, bei den anderen sind es rechte Winkel.

4. Die Pflasterungen $(T_q, \Gamma(q, 6); q = 3, 4, 5)$

4.1. In Abb. 4.1 ist der D -Graph mit

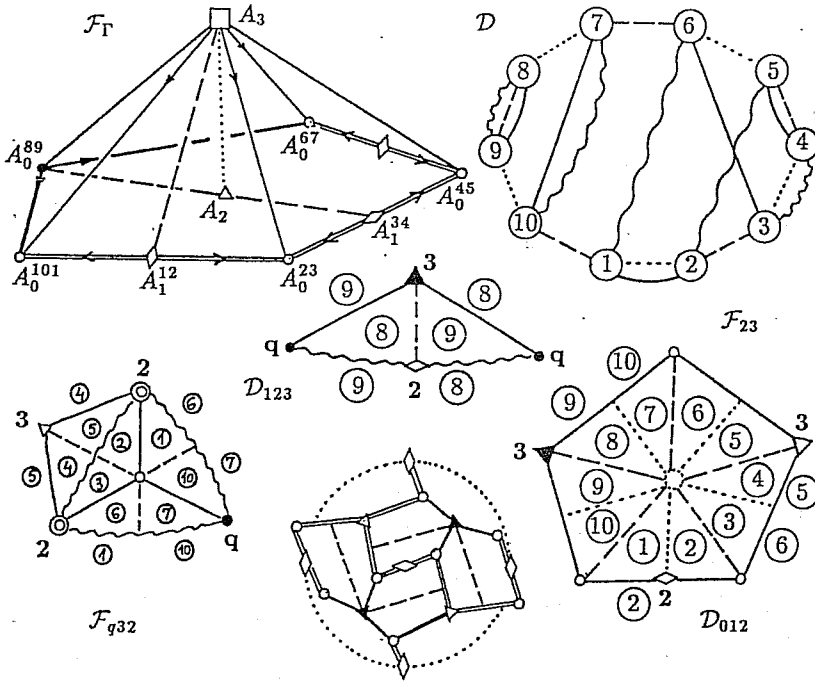


Abb. 4.1.

$$\begin{aligned}
 (4.1) \quad & \sigma_0: (1,2)(3,4)(5,6)(7,8)(9,10) \dots\dots \\
 & \sigma_1: (1,10)(2,3)(4,5)(6,7)(8,9) \text{ ---} \\
 & \sigma_2: (1,2)(3,6)(4,5)(7,10)(8,9) \text{ ---} \\
 & \sigma_3: (1,6)(2,5)(3,4)(7,10)(8,9) \text{ ~~~~}
 \end{aligned}$$

angegeben, der mittels Computer bestimmt wurde. Für die gewünschten Dodekaederpflasterungen haben wir die Matrixfunktion:

$$\begin{aligned}
 (4.2) \quad & m_{01}(D) = 5, \quad m_{12}(D) = 3 \text{ für jedes } D \in \mathcal{D}; \\
 & m_{23}(D_1, D_2, D_5, D_4, D_3, D_6) = 3s, \quad 1 \leq s; \\
 & m_{23}(D_7, D_{10}) = m_{23}(D_8, D_9) = q, \quad 3 \leq q; \\
 & m_{02}(D) = m_{03}(D) = m_{13}(D) = 2 \text{ für jedes } D \in \mathcal{D}
 \end{aligned}$$

mit den freien Parametern $(q, 3s)$. Abb. 4.1 zeigt einen entsprechenden

Fundamentalebene \mathcal{F}_Γ für die Gruppe Γ . Ebenso wie in Abschnitt 3 können wir die Erzeugenden

$$(4.3) \quad \begin{aligned} r_1 &: A_3 A_0^{101} A_0^{23} \rightarrow A_3 A_0^{23} A_0^{101}, \\ r_2 &: A_3 A_0^{67} A_0^{45} \rightarrow A_3 A_0^{23} A_0^{45}. \\ r_3 &: A_3 A_0^{101} A_0^{89} \rightarrow A_3 A_0^{67} A_0^{89} \text{ durch } \sigma_2, \text{ ferner} \\ r &: A_0^{89} A_0^{101} A_0^{23} A_0^{45} A_0^{67} \rightarrow A_0^{89} A_0^{67} A_0^{45} A_0^{23} A_0^{101} \text{ durch } \sigma_3 \end{aligned}$$

eingeführen. Die definierenden Relationen für Γ sind

$$(4.4) \quad \begin{aligned} 1 &= r_1^2 = r_2^3 = r_3^3 = r_3 r_2 r_1 = r^2 = (r r_3)^q = \\ &= (r_1 r r_2 r r_2^{-1} r)^s \text{ nach (4.2)}. \end{aligned}$$

Die wesentlichen 0-Eckenstabilisatoren nach \mathcal{D}_{123} sind:

$$(4.5) \quad \Gamma_{123}(A_0^{89}) = (+, 0; [q, 3, 2]; \{ \}) \quad (\text{Abb. 4.1}),$$

$$(4.6) \quad \Gamma_{123}(A_0^{101}, A_0^{67}, A_0^{23}, A_0^{45}) = (+, 0; [q, 3, s]; \{ \}).$$

Beide Fundamentalebereiche stellen nach [10], [20] orientierbare (+) Flächen mit Genus 0 dar. In den obigen Flächensymbolen sind die singuläre Rotationszentren in Klammern [] aufgezählt. Die Gruppe (4.5) ist genau dann endlich (sphärisch), wenn $q = 3, 4, 5$ ist. Für die Gruppe (4.6) können nur die Fälle $(q, s) = (3, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 2)$ auftreten. Der Fall $(3, 1)$ führt zu einer nicht-maximalen Pflasterung (\mathcal{T}, Γ) im sphärischen Raum S^3 . Die anderen Fälle mit $s = 2$ führen in der Tat zu hyperbolischen Realisierungen, wie die folgenden überlegungen zeigen.

4.2. Wir beginnen mit dem Stabilisator

$$(4.7) \quad \Gamma_{012}(A_3) = (+, 0; [2, 3, 3]; \{ \}) = [3, 3]^+ = 23$$

der Ordnung 12, der eine sphärische Rotationsgruppe liefert. Diese wirkt auf den flächen des Dodekaeders einfach transitiv (Abb. 4.1 unten in der Mitte). In der üblichen Darstellung führen wir zunächst die euklidischen Koordinaten $A_0^{101}(x, y, z)$, $A_0^{23}(x, -y, -z)$, $A_0^{67}(y, z, x)$ für die 23-Bilder, $A_3(0, 0, 0)$ für den Aufpunkt ein (Abb. 4.1). $A_1^{12}(x, 0, 0)$ ist ein Punkt der r_1 -Rotationsachse, $A_0^{89}(a, a, a)$ kennzeichnet die r_3 -Rotationsachse, $A_0^{45}(b, -b, b)$ liegt auf der Achse der 3-Drehung r_2 . Die reellen Zahlen $0 \leq |z| \leq y \leq x$; $0 < a, b$ werden später geeignet gewählt werden. Nun führen wir in diesem euklidischen Raum die Einheitskugel mit dem Zentrum A_3 ein, die das Cayley-Kleinsche Modell der hyperbolischen Raumgeometrie realisiert. Zu den euklidischen Basisvektoren

e_1, e_2, e_3 , führen wir formal einen neuen Basisvektor e_0 ein, um einen reellen Vektorraum V^4 aufzuspannen. Für beliebige $x = x^i e_i$ und $y = y^j e_j$ definiert die Formel

$$(4.8) \quad \langle x; y \rangle = -x^0 y^0 + x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 \in \mathbb{R}$$

ein Skalarprodukt der Signature $(+, +, +, -)$. Über die Teilraumstruktur von V^4 gewinnen wir den projektiv-metrischen Raum $\mathcal{P}^3(V^4(\langle; \rangle))$, in den der hyperbolische Punktbaum

$$(4.9) \quad H^3 := \{(x) \subset V^4 : \langle x; x \rangle := -x^0 x^0 + x^1 x^1 + x^2 x^2 + x^3 x^3 < 0\}$$

auf übliche Weise eingebettet wird (vgl. 3.4). Mit $x = x^1/x^0, y = x^2/x^0, z = x^3/x^0$ in (4.9), stimmt H^3 in der Tat mit der euklidischen Einheitskugel überein. Der zu V^4 duale Raum \mathcal{V}_4 kennzeichnet die Ebenen von H^3 . Wir benützen, daß die euklidischen Bewegungen um das feste Zentrum A_3 genau die entsprechenden hyperbolischen Bewegungen des Modells darstellen und ferner die Geometrien der Sphären in den Räumen S^3, E^3, H^3 alle isomorph sind. Zur Konstruktion des Fundamentalbereiches \mathcal{F}_Γ der Gruppe $\Gamma(q, 6)$ in H^3 führen wir die Punkte mit den zugeordneten Vektoren

$$(4.10) \quad \begin{aligned} A_3 &\sim \mathbf{c}(1, 0, 0, 0), \quad A_0^{89} \sim \mathbf{a}_0(1, a, a, a), \\ A_0^{45} &\sim \mathbf{b}(1, b, -b, b), \quad A_0^{101} \sim \mathbf{x}(1, x, y, z), \quad A_1^{12} \sim \mathbf{d}(1, x, 0, 0), \\ A_0^{23} &\sim \mathbf{x}^{r_1}(1, x, -y, z), \quad A_0^{67} \sim \mathbf{x}^{r_3} = \mathbf{x}^{r_1 r_2^{-1}}(1, y, z, x) \end{aligned}$$

ein. Nun wollen wir die Achse $A_0^{89} A_1^{34}$ der Halbdrehung r im Sinne der Formeln (4.3-4) bestimmen und damit die die Gruppe $\Gamma(q, 6)$ kennzeichnenden Parameter a, x, y, z für $q = 3, 4$ und 5 festlegen.

4.3. *Wir wollen nun die Formel für eine Geradenspiegelung im unseren Modell von H^3 entwickeln.* Es seien (\mathbf{a}_0) und (\mathbf{a}_1) zwei eindimensionale Unterräume von V^4 , welche als Punkte in H^3 interpretiert, eine Gerade $r = (\mathbf{a}_0)(\mathbf{a}_1)$ festlegen. Die Spiegelung oder Halbdrehung um die Achse r wird durch die synonym bezeichnete Abbildung

$$(4.11) \quad r: y \mapsto y^r \sim y - 2\langle y; \mathbf{a}_\alpha \rangle a^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta \quad \alpha, \beta \in \{0, 1\},$$

wo

$$a_{\alpha\beta} := \langle \mathbf{a}_\alpha; \mathbf{a}_\beta \rangle, \quad (a^{\alpha\beta}) := (a_{\alpha\beta})^{-1}$$

mit dem Skalarprodukt (4.8) erfaßt. Mit der Summationskonvention gilt

$$(4.12) \quad a_{\gamma\alpha} a^{\alpha\beta} = \delta_\gamma^\beta \quad (\text{das Kronecker-Symbol})$$

für die regulären 2×2 Matrizen.

In der Tat ist die Abbildung r nach (4.11) involutorisch und die Punkte (\mathbf{a}_γ) ($\gamma = 0, 1$) der Achse werden gemäß

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\gamma &\mapsto \mathbf{a}_\gamma - 2\langle \mathbf{a}_\gamma; \mathbf{a}_\alpha \rangle a^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta = \mathbf{a}_\gamma - 2a_{\gamma\alpha} a^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta = \\ &= \mathbf{a}_\gamma - 2 \cdot \delta_\gamma^\beta \mathbf{a}_\beta = \mathbf{a}_\gamma - 2\mathbf{a}_\gamma = -\mathbf{a}_\gamma \end{aligned}$$

auf sich abgebildet, gleiches gilt für die anderen Achsenpunkte. Ein beliebiger Punkt (\mathbf{u}) der polaren Geraden der Achse wird mittels $\langle \mathbf{u}, \mathbf{a}_\gamma \rangle = 0$ ($\gamma = 0, 1$) festgelegt.

Nun definieren wir einen Achsenpunkt mit Hilfe von

$$(4.13) \quad \mathbf{a}_0(1, a, a, a), \text{ einen weiteren mit } \mathbf{a}_1\left(1, \frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{x+z}{2}\right).$$

Dann gilt ersichtlich nach (4.11)

$$(4.14) \quad \mathbf{x}(1, x, y, z) \xrightarrow{r} \mathbf{x}^r(1, y, z, x), \text{ also } A_0^{101} \xrightarrow{r} A_0^{67}.$$

Hiermit wird die Matrix $(a_{\alpha\beta})$ mit

$$(4.15) \quad \begin{aligned} a_{00} &= \langle \mathbf{a}_0; \mathbf{a}_0 \rangle = -1 + 3a^2 < 0, \\ a_{01} &= a_{10} = \langle \mathbf{a}_0; \mathbf{a}_1 \rangle = -1 + a(x+y+z) < 0, \\ a_{11} &= \langle \mathbf{a}_1; \mathbf{a}_1 \rangle = -1 + \frac{1}{4}\{(x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+z)^2\} < 0 \end{aligned}$$

definiert, deren Determinante

$$(4.16) \quad A = a_{00}a_{11} - (a_{12})^2 < 0$$

ist. Die inverse Matrix $(a^{\alpha\beta})$ wird durch

$$(4.17) \quad a^{00} = \frac{1}{A}a_{11}, \quad a^{10} = a^{01} = -\frac{1}{A}a_{01}, \quad a^{11} = \frac{1}{A}a_{00}$$

bestimmt. Die Forderung in (4.3)

$$(4.18) \quad A_0^{23} \xrightarrow{r} A_0^{45}, \text{ d.h. } \mathbf{x}^{r1}(1, x, -y, -z) \xrightarrow{r} \mathbf{b}(1, b, -b, b)$$

führt mit (4.11) zu zwei Gleichungen, welche besagen: Der Bildvektor \mathbf{x}^{r1r} hat eine gleiche erste und dritte Koordinaten, während zweite Koordinate zur ersten negativ gleich ist.

4.4. Nun kehren wir zu den zwei letzten Relationen aus (4.4) zurück, die uns die dritte und vierte Gleichung liefern. Die Relation $1 = (rr_3)^2$ ist gemäß der sphärischen Geometrie (siehe die Dreiecke ⑧ ⑨ in Abb. 4.1) erfüllt, wenn für den Winkel bei A_0^{89}

$$(4.19) \quad \cos A_3 A_0^{89} A_1^{34} \angle = \cos[(c)(\mathbf{a}_0)(\mathbf{a}_1) \angle] = \cos \frac{\pi}{q} / \sin \frac{\pi}{3}$$

gilt.

Mit $s = 2$ bedeutet die Relation $1 = (r_1 r r_2 r r_2^{-1} r)^2$, daß die Halbdrehungsachse r_1 zur Bildachse $r r_2^{-1} r$ im Punkt $A_1^{12} \sim d(1, x, 0, 0)$ senkrecht ist. Da $A_1^{34} \xrightarrow{r_2^{-1} r} A_1^{12}$ gilt, müssen wir das $r_2^{-1} r$ -Bild des Punktes A_0^{89} berechnen. Wir sehen, daß

$$a_0(1, a, a, a) \xrightarrow{r_2^{-1}} a_0^{r_2^{-1}}(1, -a, -a, a) \xrightarrow{r} a_0^{r_2^{-1} r} =: a_0^*$$

nach (4.11) bestimmt werden kann, doch leistet das folgende Lemma wertvolle Dienste:

Lemma. Sind (b_0) , (b_1) , (b_2) die Eckpunkte eines hyperbolischen Dreiecks und ist β_0 der Winkel beim Eckpunkt (b_0) , so gilt die Gleichung

$$(4.20) \quad \cos \beta_0 = \frac{b_{01} b_{20} - b_{00} b_{21}}{\sqrt{(b_{00} b_{22} - b_{02}^2)(b_{00} b_{11} - b_{01}^2)}}$$

mit der Matrix $(b_{ij}) = ((b_i; b_j))$, $i, j \in \{0, 1, 2\}$.

Den Beweis können wir im Sinne von [12] leicht ausführen. Tatsächlich drückt (4.20) gerade den Cosinus-Satz für die Dreiecksseiten s_{01} , s_{12} , s_{02} aus, wenn wir den Zähler und den Nenner durch $\sqrt{b_{00} b_{00} b_{11} b_{22}}$ dividieren. Wir erhalten dann nach (3.15) in der Tat

$$(4.21) \quad \cos \beta_0 = \frac{\operatorname{ch} s_{01} \cdot \operatorname{ch} s_{02} - \operatorname{ch} s_{12}}{\operatorname{sh} s_{02} \cdot \operatorname{sh} s_{01}}. \quad \diamond$$

Wir wenden nun (4.20) zuerst auf das Dreieck $(a_0)(a_1)(c)$ an. Dann liefern (4.19) und (4.20) mit (4.10), (4.15), (4.16) unsere dritte Gleichung

$$(4.22) \quad \cos \frac{\pi}{q} / \sin \frac{\pi}{3} = \frac{(-1 + a(x + y + z))(-1) - (-1 + 3a^2)(-1)}{\sqrt{[(-1 + 3a^2)(-1) - (-1)^2] \cdot A}}.$$

Sie reduziert sich auf die besonders einfache Gleichung

$$(4.23) \quad 2 \left(\cos \frac{\pi}{q} \right) \sqrt{-A} = 3a - (x + y + z).$$

Eine ähnliche Überlegung für das Dreieck $(d)(c)(a_0^*)$, mit dem rechten Winkel bei (d) , führt zur Gleichung

$$(4.24) \quad -x a_0^{*0} + a_0^{*1} = 0,$$

wo a_0^{*0} die nullte, a_0^{*1} die erste Koordinate des Vektors $a_0^* := a_0^{r_2^{-1} r}$ bezeichnet.

4.5. Damit haben wir für die vier Unbekannten

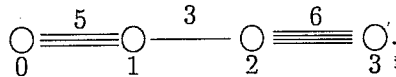
$$(4.25) \quad \begin{aligned} a, x, y, z \text{ mit } 0 < a < \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad y - z \geq 0, \\ y + z \geq 0, \quad x - y \geq 0, \quad 1 - (x^2 + y^2 + z^2) > 0, \\ (y, z) \neq (0, 0) \quad (y, z) \neq (x, x) \text{ und } (y, z) \neq (x, -x) \end{aligned}$$

vier komplizierte algebraische Gleichungen gefunden, von denen zwei in (4.18) stehen und je eine in (4.23) bzw. (4.24) angegeben wurde. Dieses System ist zu lösen mit den Parametern $q = 3, 4, 5$.

Ein wichtiger Grenzfall liegt für $q = 6$ vor und besitzt die Lösung

$$(4.26) \quad a = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}, \quad y = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{6}, \quad z = 0.$$

Dies führt zum regulären Pentagondodekaeder mit idealen Eckpunkten auf der Absolutfigur. Dazu gehört das Coxeter-Diagramm



Dies bedeutet: Jeder Keilwinkel des Dodekaeders ist $2\pi/6$. Die Gruppe $\Gamma(6, 6)$ ist nicht maximal und wegen der idealen Eckpunkte aus den Untersuchungen ausgeschlossen. Jedoch hilft sie bei der Computerlösung des obigen Systems.

Ich danke meinem Neffen András Szücs (18) für die Computerlösung durch "EUREKA: The Solver". Wir haben die folgenden Resultate bekommen:

$$q=3: \quad a = 0,43179031; \quad (b = 0,52258057); \\ x = 0,88826347, \quad y = 0,24479189, \quad z = -0,13507566.$$

$$q=4: \quad a = 0,51596916; \quad (b = 0,55918439); \\ x = 0,92191361, \quad y = 0,30668816, \quad z = -0,069738281.$$

$$q=5: \quad a = 0,55529221; \quad (b = 0,57149464); \\ x = 0,93073512, \quad y = 0,33816666, \quad z = -0,027537192.$$

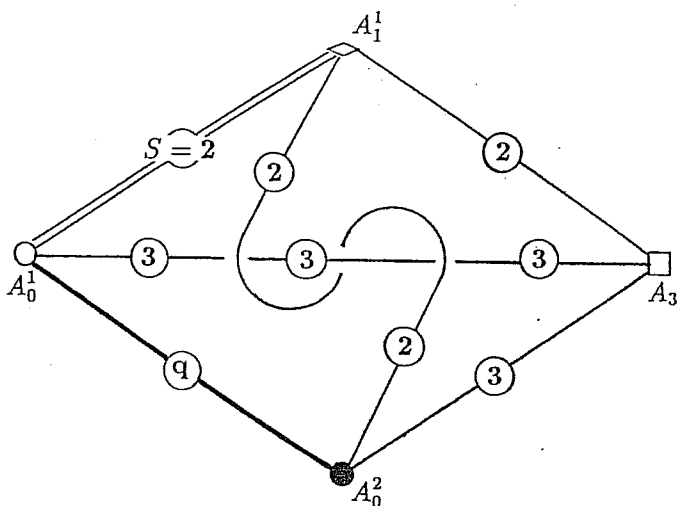


Abb. 4.2.

Bemerkung. Der Bahnraum $H^3/\Gamma(q, 6) \sim \mathcal{F}_\Gamma$ in Abb. 4.1 kann durch den Knoten in Abb. 4.2 dargestellt werden. Die nummerierten Linien bezeichnen die Drehachsenklassen mit ihren Ordnungen. Die Knotenpunkte weisen auf die entsprechenden Eckenklassen von \mathcal{F}_Γ hin.

5. Die Vollständigkeit der Klassifikation

Wie in Abschnitt 2 erwähnt, lieferte unser Algorithmus in [7] alle kombinatorischen flächentransitiven Pflasterungen, wo die Stabilisatoren der Körper, Flächen, Kanten und Ecken (!!!) der Pflasterung T endliche (sphärische) Gruppen sind.

Für die Pentagondodekaeder-Pflasterungen müssen wir diejenigen D -Symbole $\mathcal{D}(\Sigma_I, \mathcal{M})$ (bis auf D -Isomorphie) auflisten, wo

$$I = \{0, 1, 2, 3\}, \text{ die Dimension } d = 3 \text{ ist}$$

und die Matrixfunktion $\mathcal{M}: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{N}_{I \times I}$ (beschrieben in Abschnitt 2) den folgenden zusätzlichen Forderungen 1)–4) genügt:

- 1) $m_{01}(D) = 5$, $m_{12}(D) = 3$ für jedes $D \in \mathcal{D}$, denn jeder Pflasterstein T von T ist ein Pentagondodekaeder.
- 2) Die wichtigen Matrixkoeffizienten $m_{23}(D)$ ($D \in \mathcal{D}$) sind so auszuwählen, daß die Teilsymbolkomponente von \mathcal{D}^i , gewonnen durch

Streichen genau einer i -Operation $i \in I$, mit den verbliebenen drei Operationen je eine sphärische Pflasterung endlicher Gruppe Γ^i darstellt.

- 3) Das Teilsymbol \mathcal{D}^2 , d.h. mit 0-, 1-, 3-Operationen, besteht aus einer einzigen Komponente, welche den Flächenstabilisator Γ^2 bis auf Konjugiertsein kennzeichnet.
- 4) Das D -Symbol $\mathcal{D}(\Sigma_I, \mathcal{M})$ gestattet keine solche Abbildung auf ein kleineres D -Symbol $\overline{\mathcal{D}}$, die die σ_i -Operationen $i \in I$ und die Matrix-funktion erhält. Dies bedeutet, daß die Gruppe Γ maximal ist, also der Isomorphismus $\Gamma \cong \text{Aut } \mathcal{T}$ besteht.

Geometrisch ausgedrückt, müssen wir diejenigen simplizial-zusammengeklebten Fundamentaltbereiche \mathcal{F} auffinden (bis auf äquivalente Modifikation), wo

- a) die Simplexe in \mathcal{F} mit 0-, 1-, 2-, 3-Labellierungen versehen sind;
- b) die mit 3 labellierten Flächen der Simplexe eine pentagonale Fläche eines kombinatorischen Dodekaeders (eventuell von beiden Seiten her) stützen;
- c) die Flächenidentifikationen des Fundamentaltbereiches \mathcal{F} eine solche Gruppe Γ erzeugen, wo alle Stabilisatoren der 0-, 1-, 2-, 3-dimensionalen Simplexelemente endlich sind;
- d) die so gewonnene Gruppe Γ zu der Automorphismengruppe der Pflasterung äquivalent ist.

Schließlich kommen wir zu einem Kriterium über die Realisierung im Bolyai-Lobatschewskischen hyperbolischen Raum H^3 : Die kombinatorische Pflasterung (\mathcal{T}, Γ) muß in H^3 metrisch sein, d.h. mittels einer Bewegungsgruppe Γ realisiert werden können.

Die Forderung der Maximalität hatte die relativ-wenigen Fälle impliziert.

Zum Beispiel ist in Abb. 1.1 die Pflasterung, die zum Fundamentaltbereich $A_0 A_0^2 A_2 A_3$ und der Rotationsgruppe Γ_1 mit D -symbol \mathcal{D}_1 gehört, nicht maximal, wie dies auch die Abbildung $\mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$ zeigt. Viele analoge nicht-maximalen Fälle konnten mit Hilfe des Computerprogramms von D. Huson ausgeschlossen werden. Diese Fälle können durch unsere maximalen Pflasterungen auch reproduziert werden.

Damit ist der Hauptsatz vollständig bewiesen. \diamond

Literatur

- [1] BRAUNER, H.: Geometrie Projektiver Räume, I–II, Mannheim: Bibliographisches Institut, 1976.
- [2] BRAUNER, H.: Lehrbuch der Konstruktiven Geometrie, Springer-Verlag, Wien–New York, 1986.
- [3] COXETER, H. S. M.: Regular honeycombs in hyperbolic space, *Proc. Internat. Congress of Mathematicians* (1956), 155–169.
- [4] DELANEY, M. S.: Quasi symmetries of space group orbits, *Proc. of the Zif-Conference of Crystallographic groups Match 9* (1980), 73–80.
- [5] DRESS, A. W. M.: Presentations of discrete groups, acting on simply connected manifolds in terms of parametrized systems of Coxeter matrices — A systematic approach, *Advances in Math.* 63 (1987), 196–212.
- [6] DRESS, A. W. M. and HUSON, D. H.: On Tilings of the plane, *Geometriae Dedicata* 24 (1987), 295–310.
- [7] DRESS, A. W. M. – HUSON, D. H. – MOLNÁR, E.: The classification of face-transitive periodic 3D-tilings, *Acta Crystallographica*, (to appear).
- [8] DRESS, A. W. M. und SCHARLAU, R.: Zur Klassifikation äquivarianter Pflasterungen, *Mitteilungen aus dem Math. Seminar Giessen* 164 (1984), *Coxeter-Festschrift*, 83–136.
- [9] GIERING, O.: Vorlesungen über höhere Geometrie, Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1982.
- [10] LUČIĆ, Z. – MOLNÁR, E.: Fundamental domains for planar discontinuous groups and uniform tilings, *Geometriae Dedicata* 40 (1991), 125–143.
- [11] LUČIĆ, Z. – MOLNÁR, E.: Combinatorial classification of fundamental domains of finite area for planar discontinuous isometry groups, *Archiv Math.* 54 (1990), 511–520.
- [12] MOLNÁR, E.: Projective metrics and hyperbolic volume, *Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Math.* 32 (1989), 127–157.
- [13] MOLNÁR, E.: Polyhedron complexes with simply transitive group actions and their realizations, *Acta Math. Hung.* 59 (1992), 175–216.
- [14] MOLNÁR, E.: Tetrahedron manifolds and space forms, *Note di Matematica* (Lecce) 10 (1990), 335–346.
- [15] MOLNÁR, E.: Symmetry breakings of the cube tiling and the spatial chess board by D -symbols, *Beiträge Alg. Geom.* (to appear).
- [16] MOLNÁR, E. – PROK, I.: A polyhedron algorithm for finding space groups, *Proc. of Third Int. Conf. on Engineering Graphics and Descriptive Geometry*, Vienna 1988, 2, 37–44.
- [17] MOLNÁR, E. – PROK, I.: Classification of solid transitive simplex tilings in homogeneous simply connected Riemannian 3-spaces I, *Colloquia Math. Soc.*

- J. Bolyai* 63, *Intuitive Geometry*, Szeged (Hungary), 1991, North-Holland, (to appear).
- [18] SCOTT, P.: The geometries of 3-manifolds, *Bull. London Math. Soc.* 15 (1983), 401-487.
- [19] THURSTON, W. P.: Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, *Bull. Amer. Math. Soc.* 6 (1982), 357-381.
- [20] ZIESCHANG, H. - VOGT, E. - COLDEWEY, H. D.: Surfaces and planar discontinuous groups, *Lect. Notes in Math.* 835, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1980.