Mathematica Pannonica
4/1 (1993), 47 – 58

# GEOMETRISCH – FUNKTIONEN – THEORETISCHE LÖSUNG EINES EXTREMALPROBLEMS DER KONFORMEN ABBILDUNG III

Reiner **Kühnau**

*Fachbereich Mathematik, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, D-0-4010 Halle an der Saale, Universitätsplatz, Deutschland*

*Received* August 1991

*AMS Subject Classification:* 30 C 70, 30 C 75

*Keywords:* Conformal mapping of multiply connected domains, extremal problems, geometric functionals

**Abstract:** We consider extremal problems for schlicht conformal mappings of multiply connected domains. The functionals are of geometric type as simple distances. We also give some open problems.

## 1. Aufgabenstellung

Im Anschluß an [6] werden hier Extremalprobleme für schlichte konforme Abbildungen betrachtet, bei denen die Funktionale geometrische Grössen sind, wie z.B. gewöhnliche Abstände (Extremalprobleme verwandter Tendenz z.B. in [3], [4], [7]). Zur besseren Einordnung und Übersicht und zum Anschluß an die vorangehenden Mitteilungen [6] holen wir zunächst etwas weiter aus und stellen auch einige ungelöste Probleme dar.*

---

*Über vorliegende Thematik hielt der Autor am 11. 12. 1990 einen Vortrag an der TU Berlin.

Es sei $\mathfrak{G} \ni \infty$ ein Gebiet der komplexen $z$-Ebene mit den Randkomponenten $R_1, \dots, R_k, R'_1, \dots, R'_\ell$ ($k, \ell \geq 1$) sowie $S_1, \dots, S_m$ ($m \geq 0$), wobei letztere fehlen können (dann $m = 0$). Betrachtet wird die Klasse der in Umgebung von $z = \infty$ durch

(1) $$f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

hydrodynamisch normierten schlichten konformen Abbildungen $w = f(z)$ von $\mathfrak{G}$. Jeder Abbildung werden die Funktionale

(2) $$\mathfrak{a}(f) = \min|f(z) - f(z')|, \quad \mathfrak{A}(f) = \max|f(z) - f(z')|$$

zugeordnet, wobei $z$ die Vereinigung von $R_1, \dots, R_k$ durchläuft, $z'$ die Vereinigung von $R'_1, \dots, R'_\ell$.

**Problem I.** Man bestimme diejenigen Abbildungen $f(z)$ mit

(3) $$\text{a) } \mathfrak{a}(f) \to \max, \qquad \text{b) } \mathfrak{A}(f) \to \min.$$

Eine allgemeine Lösung hierfür ist nicht in Sicht, selbst nicht für den schon in [6a] formulierten und auf H. Grötzsch zurückgehenden Spezialfall $k = \ell = 1$, $m = 0$. Ca. 1969 äusserte U. Pirl im Gespräch die Vermutung, daß für diesen Spezialfall bei einer Extremalabbildung $f(R_1)$ und $f(R'_1)$ zu einem gewissen Punkt $w^*$ konzentrische Kreisbogenschlitze sind, die im gleichen Winkelraum mit Scheitel in $w^*$ liegen, dabei die Endpunkte der Kreisbogenschlitze auf den Randstrahlen.

Dagegen ist die Lösung der dualen Extremalprobleme

$$\mathfrak{a}(f) \to \min, \qquad \mathfrak{A}(f) \to \max$$

leicht sofort aus Resultaten von H. Grötzsch (vgl. [2], Th. 6.6 und 6.8) zu folgern: Man betrachte dieses Extremalproblem für alle Kombinationen $R_i$, $R'_j$ (d.h. in (2) durchlaufe $z$ nur ein festes $R_1$, $z'$ nur ein festes $R'_j$).

Allerdings ist die Lösung des Extremalproblems (3) im einfachsten nichttrivialen Spezialfalle bekannt: $k = \ell = 1$, $m = 0$ und eine Randkomponente, z.B. $R'_1$, punktförmig. Nach K. Löwner [10] ist im Extremalfalle dann $f(R_1)$ ein zu $f(R'_1)$ konzentrischer Kreisbogenschlitz.

Im anschließenden Falle (von D. Gaier August 1988 als Problem brieflich formuliert) $\ell = 1$, $k > 1$, $R'_1$ punktförmig, ergibt sich in einigen Fällen von Gebieten $\mathfrak{G}$ nach [6a] die Lösung zum Extremalproblem (3) so. Wenn z.B. dann die sich nach [6a] einstellende Lösung $f(z)$ des Extremalproblems

(4) $$\min_{z \in R_1} |f(z) - f(R'_1)| \to \max$$

die Eigenschaft hat, daß $f(R_2), \dots, f(R_k)$ zu $f(R'_1)$ einen nicht kleineren Abstand haben als $f(R_1)$ (= Kreisbogen), dann ist dieses $f(z)$ auch

Lösung von Problem I a). Grob und allgemeiner gesprochen ergibt sich also in diesem Falle $\ell = 1$ und $R_1' =$ punktförmig die Lösung zu Problem I a) (entsprechendes bei Problem I b)), wenn eine der Randkomponenten $R_1, \ldots, R_k$ "deutlich näher" zum Punkt $R_1'$ liegt, als die übrigen (das läßt sich natürlich mit allgemeinen Verzerrungssätzen zu einer hinreichenden a priori-Bedingung für $\mathfrak{G}$ präzisieren).

Wenn andererseits $\mathfrak{G}$ die punktförmige Randkomponente $R_1'$ und außerdem nur die Randkomponenten $R_1, \ldots, R_k$ besitzt ($k \geq 2$, $\ell = 1$, $m = 0$) und bei der hydrodynamisch normierten schlichten konformen Abbildung $f^*(z)$, bei der $f^*(R_1), \ldots, f^*(R_k)$ zu $f^*(R_1')$ konzentrische Kreisbogenschlitze werden, deren Radien zufällig gleich sind, dann ist dieses $f^*(z)$ Extremalfunktion zu Problem I a) und I b). Das ergibt sich wie üblich durch Anwendung des Argumentprinzips auf

$$\log \frac{f(z) - f(R_1')}{f^*(z) - f^*(R_1')},$$

wenn $f(z)$ eine Vergleichsabbildung ist.

Durch einen Grenzübergang, bei dem $R_1', \ldots, R_\ell'$ ins unendlich Ferne geschoben werden, ergibt sich aus Problem I folgendes Extremalproblem das wir nun hinfürder genauer (allerdings auch nur in Spezialfällen) studieren wollen.

Das Gebiet $\mathfrak{G} \ni \infty$ besitze jetzt also nur die Randkomponenten $R_1, \ldots, R_k$ ($k \geq 1$) und $S_1, \ldots, S_m$ ($m \geq 0$). Betrachtet wird wieder die Klasse der hydrodynamisch normierten schlichten konformen Abbildungen $w = f(z)$ von $\mathfrak{G}$. Jeder Abbildung werden die Funktionale

$$\mathfrak{b}(f) = \min \mathfrak{Re}\, f(z), \quad \mathfrak{B}(f) = \max \mathfrak{Re}\, f(z) \tag{5}$$

zugeordnet, wobei $z$ die Vereinigung von $R_1, \ldots, R_k$ durchläuft.

**Problem II.** Man bestimme diejenigen Abbildungen $f(z)$ mit

$$\text{a) } \mathfrak{b}(f) \to \max, \quad \text{b) } \mathfrak{B}(f) \to \min. \tag{6}$$

Wir beschränken uns auf Problem II a), da II b) offenbar äquivalent ist. Die Lösung von Problem II a) ist für $k = 1$ in [6b] geometrisch-funktionentheoretisch angegeben (und natürlich speziell für punktförmiges $R_1$ schon nach H.Grötzsch bekannt — vgl. [2], Th. 6.12) und ergibt sich für $k \geq 2$ in einigen Fällen von Gebieten $\mathfrak{G}$ nach [6b] so. Wenn z.B. die sich nach [6b] einstellende Lösung $f(z)$ zum Extremalproblem

$$\min_{z \in R_1} \mathfrak{Re}\, f(z) \to \max \tag{7}$$

die Eigenschaft hat, daß $f(R_1), \ldots, f(R_k)$ einen nicht kleineren minimalen Realteil haben als $f(R_1)$ (= zur imaginären Achse parallele Strecke), dann ist dieses $f(z)$ auch Lösung von Problem II a). Grob und allgemeiner gesprochen ergibt sich also in diesem Falle die Lösung zu Problem II a), wenn eine der Randkomponenten $R_1, \ldots, R_k$ deutlich "weiter links" liegt als die übrigen (das läßt sich wieder mit allgemeinen Verzerrungssätzen zu einer hinreichenden a priori-Bedingung für $\mathfrak{G}$ präzisieren).

Wenn andererseits $m = 0$ ist und bei der hydrodynamisch normierten schlichten konformen Parallelschlitzabbildung $f^{**}(z)$ von $\mathfrak{G}$, bei der $f^{**}(R_1), \ldots, f^{**}(R_k)$ zur imaginären Achse parallele Strecke werden, diese Strecken zufällig alle auf der gleichen Parallelen zur imaginären Achse liegen, dann ist dieses $f^{**}(z)$ Extremalfunktion zu Problem II a) (und II b)). Das ergibt sich wieder durch eine Anwendung des Argumentprinzips auf

$$f(z) - f^{**}(z),$$

wenn $f(z)$ eine Vergleichsabbildung ist.

In dieser Mitteilung soll nun Problem II a) behandelt werden für den Fall $k = 2$, $m > 0$, wobei $R_1$ und $R_2$ punktförmig sind und jetzt $z_1$ und $z_2$ genannt seien. Natürlich seien nicht alle $S_1, \ldots, S_m$ punktförmig. Sei also jetzt $\mathfrak{G} \ni \infty$ berandet von $S_1, \ldots, S_m$ und den punktförmigen Randkomponenten $z_1$, $z_2$. Dann haben wir also das

**Problem II***. Unter allen hydrodynamisch normierten schlichten konformen Abbildungen $f(z)$ von $\mathfrak{G}$ bestimme man diejenigen mit

$$\mathfrak{b}(f) = \min(\Re w_1, \Re w_2) \to \max, \tag{8}$$

wenn $w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$ gesetzt wird.

Unser Ziel ist der

**Satz.** a) *Problem II* besitzt mindestens eine Lösung. Bei jeder Lösung $w = f_*(z)$ sind die Bildrandkomponenten $f_*(S_1), \ldots, f_*(S_m)$ Schlitze auf der Schar der Trajektorien eines quadratischen Differentials der Form*

$$\Omega(w)dw^2 = -\frac{w - w_0}{(w - w_1)(w - w_2)}dw^2. \tag{9}$$

*Dabei ist entweder* (Fall 1) $w_0$ *gleich* $w_1$ *oder* $w_2$, *oder es gilt* (Fall 2) $\Re w_1 = \Re w_2$ *mit einem gewissen* $w_0$, *welches evtl.* $= \infty$ *ist, in welch letzterem Falle der Zähler in* (9) *sinngemäß durch eine Konstante* $\neq 0$ *zu ersetzen ist.*

b) *Bei mindestens einer Lösung von Problem II* liegt darüber hinaus* $w_0$ *auf der offenen Verbindungsstrecke von* $w_1$ *und* $w_2$ (im Falle 2).

Im Falle 1 liegt also eine Parabelschlitzabbildung vor, da dann durch die Trajektorien von (9) konfokale Parabeln definiert werden, deren gemeinsame Brennachse in Richtung der negativ reellen Achse zeigt und z.B. für $w_0 = w_2$ in $w_1$ startet. Der Übergang von hier zum Falle 2 findet offenbar dann statt, wenn für diese Parabelschlitzabbildung $w_2$ gleichen Realteil wie $w_1$ hat (das ist dann zu Fall 1 und zu Fall 2 zu rechnen).

Falls $\mathfrak{G} \equiv \{|z| > 1\}$, wenn wir es also mit der Abbildungsklasse $\Sigma$ zu tun haben, lassen sich nach [5], §3 im Prinzip die Extremalabbildungen bestimmen, was sich aber im Falle 2 kompliziert gestaltet, da unbekannte Parameter die Lösung gewisser Gleichungen erheischen. Im Falle 1 ist das kein Problem und bekannt (vgl. [1], S. 129 oder [2], S. 97), so daß insbesondere zu festem $z_1$ diejenigen $z_2$ charakterisiert werden können, für die genannter Übergang von Fall 1 zu Fall 2 stattfindet.

Der Beweis dieses Satzes kann nach dem gleichen Schema wie in [6] erfolgen. Zuerst löst man ein "höher normiertes" Extremalproblem durch Bereitstellung der erforderlichen Schlitzabbildungen mit der Koebeschen Kontinuitätsmethode und führt den zugehörigen Extremalbeweis mit der Grötzschschen Flächenstreifenmethode (bzw. Methode der extremalen Länge). Anschließend erfolgt durch eine Zusatzvariation eine Ausscheidung spezieller derartiger Abbildungen. Wir ziehen es allerdings hier vor, die erforderlichen Schlitzabbildungen so bereitzustellen, daß wir das genannte höher normierte Extremalproblem mit der Variationsmethode direkt behandeln, wobei — das ist hier entscheidend — die höhere Normierung durch die schon in [11] angewandte Methode des Straffunktionals erzwungen wird. Die genannte Zusatzvariation benutzt in eigentümlicher Weise quasikonforme Abbildungen. Und zwar werden lokale Abänderungen von quasikonformen Abbildungen derart erzeugt, daß auf dem Rande von Kreisscheiben die Werte fest bleiben. Derartige quasikonforme Abbildungen mit festen Randwerten wurden zuerst von O. Teichmüller betrachtet [13] und später umfassend von K. Strebel u.a. [12].

## 2. Beweis des Satzes

a) Falls für eine — natürlich aus Kompaktheitsgründen in bekannter Schlußweise existierende — Extremalfunktion $f_*(z)$ zu Problem II* die Bilder $w_1$ und $w_2$ verschiedenen Realteil bekommen, muß im Satz von §1 der Fall 1 vorliegen. Überdies gibt es dann nur diese eine Extremalfunktion. Wenn nämlich z.B. $\Re w_2 > \Re w_1$ ist, dann muß $f_*(z)$ eine Parabelschlitzabbildung sein, bei der $S_1, \ldots, S_m$ in Schlitze auf der Schar der zu $w_1$ konfokalen Parabeln übergehen, deren gemeinsame Brennachse der von $w_1$ startende Strahl in Richtung der negativ reellen Achse ist. Andernfalls ergäbe sich sofort nach einem klassischen Resultate von H. Grötzsch (vgl. [2], Th. 6.12) ein Widerspruch zur Eigenschaft von $f_*(z)$.

b) Sei nun hinfürder $\Re w_1 = \Re w_2$ für die Extremalfunktion $f_*(z)$, o.E.d.A. dazu $\Im w_1 < \Im w_2$. Die Extremalfunktion $f_*(z)$ ist dann auch Extremalfunktion in der Teilklasse der hydrodynamisch normierten $f(z)$ mit der Nebenbedingung

$$\Re f(z_1) = \Re f(z_2), \quad \Im f(z_1) < \Im f(z_2). \tag{10}$$

Durch die ganz-lineare Substitution

$$W = i\frac{2w - (w_1 + w_2)}{w_2 - w_1} \tag{11}$$

mit $\infty \to \infty$, $w_1 \to -i$, $w_2 \to +i$ entstehen aus den hydrodynamisch normierten Abbildungen $f(z)$ mit (10) schlichte konforme Abbildungen (12)

$$F(z) = A_{-1}z + A_0 + \frac{A_1}{z} + \ldots \text{ mit } A_{-1} = \frac{2i}{w_2 - w_1}, \quad A_0 = -\frac{w_2 + w_1}{w_2 - w_1}$$

von $\mathfrak{G}$ mit der neuen Normierung

$$F(\infty) = \infty, \quad F(z_1) = -i, \quad F(z_2) = +i, \quad A_{-1} > 0, \tag{13}$$

und umgekehrt gibt jedes $F(z)$ mit dieser Normierung (13) durch hydrodynamische Umnormierung Anlaß zu einem $f(z)$ mit (10).

Aus dem Extremalproblem

$$\Re f(z_1) = \Re f(z_2) \to \max \tag{14}$$

mit der Lösung $f_*(z)$ wird über diese Entsprechung das Extremalproblem

$$\Re(A_0/A_{-1}) \to \min \tag{15}$$

mit der Lösung $F_*(z)$, die über die obige Substitution $f_*(z)$ entspricht.

Zur Behandlung dieses Extremalproblems (15) bietet sich wie in [6] folgende *1. Lösungsvariante* an. Es wird nämlich zunächst noch zusätzlich $A_{-1}$ (bzw. $w_2 - w_1$) fest vorgegeben (innerhalb des sich nach H. Grötzsch — vgl. [2], Th. 6.6 und 6.8 — ergebenden abgeschlossenen Intervalles) und das Extremalproblem unter dieser höheren Normierung gelöst. Dazu werden zuerst Schlitzabbildungen bezüglich des quadratischen Differentials der Gestalt (9) mit Hilfe der Koebeschen Kontinuitätsmethode bereit gestellt und deren Extremaleigenschaft mit der Grötzschschen Flächenstreifenmethode bzw. heute auch unmittelbar mit dem General Coefficient Theorem von J. A. Jenkins [2] bewiesen. In der entstehenden einparametrigen Abbildungsschar (Parameter ist dieses fixierte $A_{-1}$) muß sich die von uns gesuchte Extremalabbildung befinden, und diese wird dann durch eine Zusatzvariation (diese wird unten tatsächlich verwendet) ausgesondern.

c) Da sich der Kontinuitätsbeweis in diesem Falle jedoch etwas komplizierter gestaltet, ziehen wir folgende *2. Lösungsvariante* mit der Variationsmethode vor. Und zwar wird wieder zunächst zusätzlich $A_{-1}$ bei den durch (13) normierten $F(z)$ der Entwicklung (12) bzw. $w_2 - w_1$ bei den ursprünglichen $f(z)$ festgehalten. $F_*(z)$ bzw. $f_*(z)$ muß sich ja bei einem geeigneten Wert $A_{-1}$ bzw. $w_2 - w_1$ als Lösung unseres Extremalproblems auch bei dieser höheren Normierung einstellen. Das dann entstehende Problem kann man mit der in [11] dargestellten Form der Methode des Straffunktionals behandeln.* Falls man mit den $f(z)$ arbeitet (bei den $F(z)$ müßte man die Überlegungen in [11] noch auf die dreipunktige Normierung (13) umschreiben), nimmt man z.B. das folgende zu maximierende Funktional (vgl. (15) und (12)) mit dem hinzugefügten (zweiten) Strafterm

$$\mathfrak{Re}[f(z_1) + f(z_2)] - m \cdot |f(z_1) - f(z_2) - \text{const}|^2 \tag{16}$$

($m$ =natürliche Zahl, anschließend $m \to \infty$). Man kann bei der Betrachtung zusätzlich eine Homotopieklasse für die Abbildungen vorgeben (falls bei den betrachteten Abbildungen mehrere entstehen). Und zwar kann man wie üblich (schon in den Arbeiten von H. Grötzsch) eine Homotopieklasse dadurch definieren, daß man das Bild einer festen Kurve von $z = \infty$ über $z_1$ nach $z_2$ betrachtet, wobei diese Kurve in $z = \infty$ z.B. in Richtung der positiv reellen Achse einläuft. Eine Homotopieklasse entsteht bei denjenigen Abbildungen, bei denen diese Kurvenbilder durch $\pm i$ ineinander stetig deformierbar sind in der in $\pm i$ punktierten Ebene, unter Beibehaltung der Richtung in $\infty$. Bei den Variationen, die ja lokaler Natur sind, bleibt man in der jeweiligen Homotopieklasse.

---

*Herrn H. Renelt danke ich herzlich für diesbezügliche Hinweise und Diskussionen.

Das Ergebnis dieser Variationsbetrachtung: In jeder Homotopieklasse ist *mindestens* eine Extremalabbildung $w = f_*(z)$ Schlitzabbildung bezüglich des quadratischen Differentials der Gestalt

$$-\frac{\lambda w + \mu}{(w - w_1)(w - w_2)} dw^2 > 0. \tag{17}$$

Dabei sind $\lambda$ und $\mu$ gewisse Konstanten, $\lambda \geq 0$, $\mu$ komplex, $\mu \neq 0$ für $\lambda = 0$. (Mehr als "mindestens eine" gibt die Methode des Straffunktionals zunächst nicht her.) Insbesondere gibt es also in jeder Homotopieklasse eine solche Schlitzabbildung bezüglich dieses quadratischen Differentials. Diese Schlitzabbildung gibt vermöge der Substitution (11) Anlaß zu einer Schlitzabbildung $W = F_*(z)$ bezüglich des quadratischen Differentials

$$-\frac{\lambda W + \mu^*}{(W - i)(W + i)} dW^2 > 0. \tag{18}$$

d) Jetzt wenden wir zusätzlich entscheidend die Flächenstreifenmethode bzw. Methode der extremalen Länge, z.B. in Form des General Coefficient Theorem von J. A. Jenkins [2] an. Danach ist $F_*(z)$, etwa entwickelt in der Form von

$$F_*(z) = A^*_{-1} z + A^*_0 + \frac{A^*_1}{z} + \ldots, \qquad A^*_{-1} > 0, \tag{19}$$

unter allen durch (12) entwickelten $F(z)$ mit fixiertem $A_{-1} = A^*_{-1}$ in der gleichen Homotopieklasse sogar diejenige *eindeutig bestimmte* Abbildung von $\mathfrak{G}$ mit minimalem Wert für $\mathfrak{Re}\, A_0$.

Zur Anwendung von [2] noch diese Bemerkung. Falls $\lambda \neq 0$ ist, dann (außer wenn die Zählernullstelle in (18) $i$ order $-i$ ist, wo dann alles klar ist nach H. Grötzsch — vgl. [2], Th. 6.12) hat (18) in $+i$ und $-i$ einfache Pole, in $W = \infty$ einen Pol 3. Ordnung (und zusätzlich eine einfache Nullstelle), und [2] zeigt die Behauptung. Falls $\lambda = 0$ ist, dann haben wir in $W = \infty$ einen Doppelpol (und die einfache Nullstelle ist verschwunden), und auch schon nach einem Resultate von H. Grötzsch (vgl. [2], Th. 6.15 nach linearer Transformation) ist $F_*(z)$ bei Vorgabe des betreffenden Wertes für $A_{-1}$ (und der Homotopieklasse) überhaupt einzige mögliche Abbildung.

Insbesondere ist durch diese zusätzliche Anwendung des General Coefficient Theorem jetzt also jede Extremalfunktion bei Weglassung der Homotopiebedingung zu fixiertem $w_2 - w_1$ und also auch unsere angenommene Lösung $f_*(z)$ von Extremalproblem II* eine Schlitzabbildung bezüglich eines quadratischen Differentials der Gestalt (17).

Damit ist Teil a) des Satzes von §1 bewiesen.

e) Um nun entsprechend Teil b) des Satzes von §1 nachzuweisen, daß für *mindestens* eine Extremalfunktion sogar noch genauer $w_0$ die angegebene Lage hat, nehmen wir eine weitere Variationsbetrachtung zu Hilfe.

Dazu müssen wir etwas weiter ausholen und nehmen quasikonforme Abbildungen zu Hilfe. Es sei $\mathfrak{K}_1$ bzw. $\mathfrak{K}_2$ eine zu $z_1$ bzw. $z_2$ konzentrische feste Kreisscheibe. Beide Kreisscheiben werden so klein gewählt, daß sie punktfremd sind und vollständig in $\mathfrak{G}$ liegen. Wenn wir dann in Problem II* statt durchweg konformer Abbildungen allgemeiner stetige Abbildungen von $\mathfrak{G}$ betrachten, die in $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ jetzt $Q$-quasikonform ($Q > 1$, zunächst fest) sind, im Rest von $\mathfrak{G}$ wieder konform und hydrodynamisch normiert, wollen wir von Problem $\mathrm{II}_Q^*$ sprechen.

Entscheidend ist nun, daß die Aussage a) des Satzes von §1 und der zugehörige Beweis (entsprechend dem Bisherigen in diesem Paragraphen) sinngemäß gültig bleibt (vgl. [8], Fußnote auf S.2), wenn man jetzt Problem $\mathrm{II}_Q^*$ betrachtet. Im Teil a) des Satzes von §1 tritt dann noch die Aussage hinzu, daß bei jeder Lösung $w = f_{*Q}(z)$ des Extremalproblems in $\mathfrak{K}_1$ oder $\mathfrak{K}_2$ gelegene infinitesimale Kreise übergehen in infinitesimale Ellipsen des Achsenverhältnisses $Q$, wobei die großen Achsen auf dem durch $\Omega(w)\, dw^2 > 0$ definierten Richtungsfeld liegen.

f) Nun kommt der entscheidende

**Hilfssatz.** *Es ist unmöglich, daß bei einer Lösung $f_{*Q}(z)$ von Problem $II_Q^*$ in $w_1$ oder $w_2$ ein einfacher Pol beim quadratischen Differential* (10) *vorliegt und eine Trajektorie dort so endet, daß in dem Endpunkt die Neigung gegen die positiv reelle Achse $\neq \pi$ ist.*

Beweis (von ähnlicher Tendenz, wie in anderem Zusammenhange in [9] angedeutet). In [13] ist das Verschiebungsproblem gelöst, den genauen Wertebereich von $g(0)$ in der Klasse aller $Q$-quasikonformen Abbildungen $g(\zeta)$ der Einheitskreisscheibe $|\zeta| < 1$ auf sich unter Festhaltung aller Punkte des Randes $|\zeta| = 1$ zu bestimmen. Dieser Wertebereich ist eine gewisse zu $O$ konzentrische Kreisscheibe, und der Punkt $P$ maximalen Realteils wird von genau einer Abbildung $g^*(z)$ angenommen, bei der infinitesimale Kreise in infinitesimale Ellipsen des Achsenverhältnisses $Q$ übergehen, wobei die großen Achsen dieser Ellipsen auf einer gewissen Kurvenschar $\mathfrak{S}$ der $g^*$-Ebene liegen. Zu $\mathfrak{S}$ gehört eine horizontale Strecke mit rechtem Endpunkt $P$. Es ist $\mathfrak{S}$ topologisch äquivalent einer Schar konfokaler Parabeln innerhalb einer zum Brennpunkt konzentrischen Kreisscheibe. Und es gibt eine schlichte konforme Abbildung mit $P \to O$ der Einheitskreisscheibe der $g^*$-Ebene, bei der $\mathfrak{S}$ in ein von einer geschlossenen Jordankurve $\mathfrak{B}$ berandetes Gebiet $\ni O$ übergeht und $\mathfrak{S}$ eine Bildschar bekommt, die auf einer Schar zu $O$ konfokaler Parabeln liegt. (Konkret: $\mathfrak{B}$ ist nach [13] eine zu $O$ konfokale Ellipse, was hier aber nicht benutzt wird.)

Daneben gibt es eine schlichte konforme Abbildung des Inneren von $\mathfrak{B}$ mit $O \to w_1$, so daß die Bilder genannter Parabeln (bzw. der Bögen innerhalb $\mathfrak{B}$) auf den Trajektorien des $f_{*Q}$ beschreibenden quadratischen Differentials (9) liegen, falls dieses in $w_1$ einen einfachen Pol hat (das Analoge gilt bei $w_2$). Dabei gehe $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B}'$ über. Durch Zusammensetzung erhalten wir eine schlichte konforme Abbildung des Inneren von $\mathfrak{B}'$ auf das Innere des Einheitskreises der $g^*$-Ebene mit $w_1 \to P$, wobei die Schar der Trajektorien innerhalb $\mathfrak{B}'$ in die Schar $\mathfrak{S}$ übergeht. Eine lokale Abänderung (nämlich innerhalb $\mathfrak{B}'$) bei der Lösung $f_{*Q}(z)$ von Problem $\mathrm{II}_Q^*$, bei der wieder eine zulässige Abbildung $f_{**Q}(z)$ entsteht (die also insbesondere wieder $Q$-quasikonform ist innerhalb $\mathfrak{K}_1$), induziert eine Abänderung der Abbildung $g^*(\zeta)$ bei Festhaltung der Punkte des Einheitskreises $|\zeta| = 1$ unter Wahrung der $Q$-Quasikonformität, und umgekehrt.

Nach diesen umfangreichen Vorbereitungen ist die Behauptung des Hilfssatzes evident. Da es Abänderungen (genannter Art) von $g^*(\zeta)$ gibt, bei denen statt $P$ ein beliebiger Punkt auf dem durch $P$ verlaufenden und zu $O$ konzentrischen Kreis erscheint, gibt es zulässige Abänderungen $f_{**Q}$ der Extremalabbildung $f_{*Q}$ von Problem $\mathrm{II}_Q$, bei denen statt $w_1$ ein Punkt auf einer Kurve erscheint, die zur in $w_1$ endenden Trajektorie in $w_1$ orthogonal ist. Wenn der Hilfssatz falsch wäre, gäbe es also jedenfalls auch zulässige Abänderungen von $f_{*Q}(z)$, deren Dilatation z.Tl. $< Q$ ist und bei denen statt $w_1$ ein Punkt mit größerem Realteil erscheint. Das ist ein Widerspruch, weil diese Abänderung also auch Extremalfunktion von Problem $\mathrm{I}_Q^*$ wäre, die aber nicht die oben schon bewiesene Gestalt hat, nämlich nicht in $\mathfrak{K}_1$ durchweg die Dilatation $Q$ besitzt.

g) Nach dem eben unter f) Bewiesenen ist nun also bei einer Extremalfunktion zu Problem $\mathrm{II}_Q^*$ sicher im quadratischen Differential (17) $\lambda \neq 0$ (bei $\lambda = 0$ endet in mindestens einem der beiden Punkte $w_1$ und $w_2$ die zugehörige Trajektorie unter einer Neigung $\neq \pi$), und bei dem dann also in der Gestalt (9) endlichen $w_0$ muß gelten: Entweder ist $w_0$

einer der Punkte $w_1$, $w_2$ oder (bei also $w_0 \neq w_1$ und $w_0 \neq w_2$) es gilt

$$\frac{w_1 - w_0}{w_1 - w_2} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{w_2 - w_0}{w_2 - w_1} > 0. \tag{20}$$

Das folgt unter Benutzung des Hilfssatzes von f) durch lokale Betrachtung der Trajektorien des quadratischen Differentials in Umgebung von $w_1$ bzw. $w_2$. (20) zieht nach sich, daß $w_0$ auf der offenen Verbindungsstrecke von $w_1$ und $w_2$ liegt.

h) Damit gilt nun für *jede* Extremalfunktion zu Problem $\mathrm{II}_Q^*$: Die Bildrandkomponenten werden durch $\Omega(w)\, dw^2 > 0$ mit dem quadratischen Differential (9) mit einem gewissen (endlichen) $w_0$ beschrieben. Es ist entweder $w_0$ gleich $w_1$ oder $w_2$, oder es gilt $\mathfrak{Re}\, w_1 = \mathfrak{Re}\, w_2$, wobei $w_0$ auf der offenen Verbindungsstrecke von $w_1$ und $w_2$ liegt. Dabei liegt Konformität vor außer in $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, wo die Extremalfunktion $Q$-quasikonform ist und die großen Achsen der infinitesimalen Bildellipsen durch $\Omega(w)\, dw^2 > 0$ beschrieben werden.

i) Nachdem wir nun zu jedem $Q > 1$ eine Extremalfunktion $f_{*Q}(z)$ von in h) beschriebener Bauart zu Problem $\mathrm{II}_Q$ gefunden haben, betrachten wir jetzt den Grenzübergang $Q \searrow 1$. Bei sinkendem $Q$ sinken auch die zugehörigen Funktionale $\mathfrak{b}(f_{*Q})$. Für eine geeignete Folge von $Q$-Werten mit $Q \searrow 1$ ergibt sich aus einschlägigen Kompaktheitssätzen die im bekannten Sinne gleichmässige Konvergenz der zugehörigen $f_{*Q}(z)$, wobei die Grenzfunktion $f_*(z)$ eine normierte rein konforme Abbildung sein muß, bei der Schlitze beim Bildgebiet erscheinen, die durch $\Omega(w)\, dw^2 > 0$ mit einem quadratischen Differential der Gestalt (9) beschrieben werden, mit $w_0$ wie in h) besagt. Es ist $f_*(z)$ dazu Extremalfunktion zu Problem $\mathrm{II}^*$, da andernfalls eine zulässige konforme Vergleichsabbildung $f_{**}$ mit größerem Funktional $\mathfrak{b}(f_{**})$ existieren würde. Und $f_{**}$ hätte auch ein größeres Funktional als gewisse $f_{*Q}$, was nicht angeht, da $f_{**}$ zulässige Abbildung bei Extremalproblem $\mathrm{II}_Q^*$ ist.

Damit haben wir in Gestalt von $f_*(z)$ eine Extremalfunktion zu Problem $\mathrm{II}^*$ gefunden, wie in Teil b) des Satzes von §1 beschrieben. Der Satz ist nun vollständig bewiesen. ◊

**Bemerkung.** Durch den Grenzübergang im Beweisteil i) entsteht leider nicht die schärfere Aussage im Satz von §1, daß bei *jeder* Extremalfunktion zu Problem $\mathrm{II}^*$ der Punkt $w_0$ auf der Verbindungsstrecke von $w_1$ und $w_2$ liegt, falls $\mathfrak{Re}\, w_1 = \mathfrak{Re}\, w_2$. An der Richtigkeit dieser schärferen Aussage ist aber wohl nicht zu zweifeln.

# Literatur

[1] GOLUSIN, G. M.: Geometrische Funktionentheorie, Berlin, 1957.

[2] JENKINS, J. A.: Univalent functions and conformal mapping, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1958.

[3] KOMATU, Y.: Über Verzerrungen bei der konformen Parallelschlitzabbildung von zweifach zusammenhängenden Gebieten, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **21** (1945), 1–5.

[4] KOMATU, Y.: Zur konformen Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete IV, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **21** (1945), 372–377.

[5] KÜHNAU, R.: Über die analytische Darstellung von Abbildungsfunktionen, insbesondere von Extremalfunktionen der Theorie der konformen Abbildung, *J. reine angew. Math.* **228** (1967), 93–132.

[6] KÜHNAU, R.: Geometrisch-funktionentheoretische Lösung eines Extremalproblems der konformen Abbildung, I und II, *J. reine angew. Math.* **229** (1968), 131–136 und **237** (1969), 175–180.

[7] KÜHNAU, R.: Herleitung einiger Verzerrungseigenschaften konformer und allgemeinerer Abbildungen mit Hilfe des Argumentprinzipes, *Math. Nachr.* **39** (1969), 249–275.

[8] KÜHNAU, R.: Wertannahmeprobleme bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung, *Math. Nachr.* **40** (1969), 1–11.

[9] KÜHNAU, R.: Interpolation durch möglichst konforme Jordankurven, *Sib. Mat. Žurn.* (in Russ.) **32/2** (1991), 94–103; *Sibir. Math. J.* (in Engl.) **32** (1991), 257–264.

[10] LÖWNER, K.: Über Extremumsätze bei der konformen Abbildung des Äußeren des Einheitskreises, *Math. Z.* **3** (1919), 65–77.

[11] RENELT, H.: Extremalprobleme bei quasikonformen Abbildungen unter höheren Normierungen, *Math. Nachr.* **66** (1975), 125–143.

[12] STREBEL, K.: Extremal quasiconformal mappings, *Results in Math.* **10** (1986), 168–209.

[13] TEICHMÜLLER, O.: Ein Verschiebungssatz der quasikonformen Abbildung, *Deutsche Math.* **7** (1944), 336–343; auch in den "Gesammelten Abhandlungen", Berlin–Heidelberg–New York, 1982.