Mathematica Pannonica
4/1 (1993), 3 – 22

BEWEGUNGSVORGÄNGE DES FLAGGENRAUMES MIT SPHÄRISCHEN BAHNEN I

DIE VIERPARAMETRIGEN BEWEGUNGSVORGÄNGE

Johann **Lang**

Institut für Geometrie, Technische Universität, Kopernikusgasse 24, A-8010 Graz, Österreich

Herrn Prof. Dr. Hans Sachs zum 50. Geburtstag gewidmet

Received February 1992

AMS Subject Classification: 53 A 17

Keywords: Zweifach isotroper Raum, Flaggenraum, Kinematik.

Zusammenfassung: Ein Übertragungsprinzip erlaubt es, die Bewegungsvorgänge des Flaggenraumes, welche sphärische Bahnen besitzen, vollständig zu klassifizieren und zu beschreiben. Dabei werden nicht nur jene Bewegungsvorgänge betrachtet, welche alle Punkte auf einer sphärischen Bahn führen, sondern auch jene, welche nur gewissen Punkten sphärische Bahnen zuweisen. Die Fragestellung für den euklidischen Fall ist etwa gegen Ende des 19. Jahrhunderts in Frankreich aufgetreten, wurde aber nie vollständig gelöst. Das hier verwendete Übertragungsprinzip, das in J. Lang [12] vorgestellt wurde, erlaubt es nun erstmals, diese Fragen - im Fall der zweifach isotropen Geometrie - erschöpfend zu beantworten.

In J. Lang [12] wurde ein Übertragungsprinzip beschrieben, das es erlaubt, die Bewegungsvorgänge des Flaggenraumes mit sphärischen Bahnen systematisch und in zweckmäßiger Form zu behandeln. Die Ursprünge dieser Vorgangsweise gehen auf E. Borel [1] und R. Bricard [2],

[3] zurück, welche gemeinsam mit E. Duporcq [8] diese Fragestellungen - für den euklidischen dreidimensionalen Raum - aufgeworfen haben. Eine Verallgemeinerung dieses Übertragungsprinzips wird Inhalt von H. Vogler [22] (in Vorbereitung) sein. In der Geometrie des Flaggenraumes (zweifach isotropen Raumes) liegen Resultate von O. Röschel [16] vor: Alle C^4- Bricard-zwangläufe des Flaggenraumes - das sind jene mit *durchwegs sphärischen Bahnen* - werden beschrieben; auch die C^4- Darboux-zwangläufe - das sind jene mit *durchwegs ebenen* Bahnen - sind dort angeführt.

In der vorliegenden Arbeit sollen nun *alle* vierparametrigen Bewegungsvorgänge, die sphärische Bahnen besitzen, vollständig beschrieben werden; es gelingt, Normalformen anzugeben und die Invarianten für jeden einzelnen Fall zu ermitteln. Die Ebenen des Rastraumes betrachten wir als Sonderfälle von Sphären, sodaß auch der Fall ebener Bahnen miteingeschlossen ist. Es sei besonders darauf hingewiesen, daß für die folgenden Untersuchungen *keinerlei Differenzierbarkeitsvoraussetzungen* notwendig sind.

Die Geometrie des Flaggenraumes beschäftigt sich mit jenen Eigenschaften des dreidimensionalen affinen Raumes $\mathbb{R}^3$, die bezüglich der Gruppe

$$(1)\qquad G_6^{(2)}: \begin{cases} \overline{x} = x + a \\ \overline{y} = bx + y + c \\ \overline{z} = dx + ey + z + f \end{cases} \qquad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

invariant sind[1]. Diese Transformationen nennt man *Bewegungen des Flaggenraumes*. Sie lassen das Tripel (F, u, ϕ), bestehend aus dem Fernpunkt F der z-Achse (*absoluter Punkt*), der Ferngeraden u der yz-Ebene (*absolute Gerade*) und der Fernebene ϕ (*absolute Ebene*) fest. Eine Parameterdarstellung eines k-parametrigen Bewegungsvorganges ζ auf einem Parametergebiet $G \subset \mathbb{R}^k$ hat die Gestalt

$$(2)\qquad \zeta : G \longrightarrow G_6^{(2)}$$

mit $(t_1, \ldots, t_k) \to \zeta(t_1, \ldots, t_k) \ldots (a(t_1, \ldots, t_k), \ldots, f(t_1, \ldots, t_k))$. Eine Sphäre Φ des Flaggenraumes ist definiert durch eine Gleichung der Form

$$(3)\qquad Ax^2 + 2Bx + 2Cy + 2Dz + E = 0 \qquad A, B, C, D, E \in \mathbb{R}.$$

Für $A = 0$ erhalten wir die Ebenen, die wir hier als Sonderfälle der

[1] Siehe hiezu H. Brauner [4], [5], [6] und das Standardwerk H. Sachs [18].

Sphären betrachten werden. Für $A \neq 0$ sind die Sphären Zylinderflächen zweiter Ordnung, deren Fernscheitel U auf der absoluten Geraden u liegt. Er ist durch die Koordinaten

$$U \ldots (0:0:D:-C) \tag{4}$$

gegeben. Für $D = 0$ ist $U = F$, also der absolute Punkt. Φ nennt man dann *Punktgrenzkugel.* Die Tatsache, daß ein Punkt $P_0 \ldots (x_0/y_0/z_0)$ aus $\mathcal{A}$ auf einer Sphäre Φ (siehe (3)) geführt wird, drückt sich in einer Gleichung

$$\begin{array}{lll} & a^2 & A+ \\ + & a & 2(Ax_0+B)+ \\ + & b & 2Cx_0+ \\ + & c & 2C+ \\ + & d & 2Dx_0+ \\ + & e & 2Dy_0+ \\ + & f & 2D+ \\ + & & Ax_0^2+2Bx_0+2Cy_0+2Dz_0+E \;=\; 0 \end{array} \tag{5}$$

aus, wobei das Absolutglied $Ax_0^2 + 2Bx_0 + 2Cy_0 + 2Dz_0 + E$, falls der Bewegungsvorgang durch $\mathrm{id}(G_6^{(2)})$ geht, verschwindet (siehe hiezu J. Lang [12]). Die Bedingung (5) ist also eine Gleichung der Form

$$\omega_0 Y_1^2 + \omega_1 Y_1 + \omega_2 Y_2 + \omega_3 Y_3 + \omega_4 Y_4 + \omega_5 Y_5 + \omega_6 Y_6 = 0. \tag{6}$$

Es handelt sich dabei um ein Polynom in den Variablen $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6$, für das die Funktionen a, b, c, d, e, f eine Nullstelle (identisch in den Parameterwerten $(t_1, \ldots, t_k) \in G$) liefern.

Die Polynome des Typs

$$V = \{\omega_0 Y_1^2 + \sum_{i=1}^{6} \omega_i Y_i | \, \omega_0, \; \ldots \; \omega_6, \in \mathbb{R}\}\,. \tag{7}$$

bilden einen siebendimensionalen Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$.

Wir bilden aus dem siebendimensionalen Vektorraum V den projektiven Raum $P(V)$ der Dimension 6 und nennen diesen Raum $P(V)$ im folgenden *Bedingungsraum.* Seine Punkte sind die eindimensionalen Unterräume von V. Der Einfachheit halber identifizieren wir jede Bedingung (6) mit dem von ihr bestimmten Punkt des Bedingungsraumes $P(V)$.

Erfüllt (a, b, c, d, e, f) für alle Parameterwerte $t_1, \ldots, t_k \in G$ die Gleichung L_1 der Form (6) und auch noch eine weitere Gleichung L_2

derselben Gestalt, so erfüllt (a, b, c, d, e, f) auch jede Linearkombination $L_1\lambda_1 + L_2\lambda_2$. Die Menge aller Bedingungen der Form (6), welche von einem Bewegungsvorgang $\zeta \ldots (a, b, c, d, e, f)$ erfüllt werden, ist also ein ganzer linearer Unterraum U von V, die Menge aller zugehörigen Punkte des projektiven Raumes $P(V)$ ist ein projektiver Teilraum $T = P(U) \subset P(V)$. Dabei zeigt sich, daß genau jene Polynome aus V, welche der Bedingung

$$\omega_2\omega_6 - \omega_3\omega_4 = 0 \tag{8}$$

genügen, auch wirklich *Sphärenbedingungen* sind. Aus dem Polynom (6) kann man den Punkt $P_0(x_0/y_0/z)$ des Gangraumes und seine Bahnsphäre Φ (3) mit Hilfe von

$$\begin{aligned} A &= \omega_0 \\ B &= \frac{\omega_1}{2} - \frac{\omega_0\omega_4}{\omega_6} \qquad & x_0 &= \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{\omega_4}{\omega_6} \\ C &= \frac{\omega_3}{2} & y_0 &= \frac{\omega_5}{\omega_6} \\ D &= \frac{\omega_6}{2} \end{aligned} \tag{9}$$

erhalten[2]. Die Bedingung (8) ist die Gleichung einer Hyperfläche 2. Ordnung im Bedingungsraum. Wir nennen diese Hyperfläche im folgenden $\Theta \subset P(V)$. Wie in J. Lang [12] ausgeführt, ist die Geometrie des Bedingungsraumes durch die Transformationsgruppe

$$G_5(P(V)) \ldots \begin{cases} \overline{\omega}_0 = & \omega_0 \\ \overline{\omega}_1 = & \omega_1 + t_b\omega_3 + t_d\omega_6 \\ \overline{\omega}_2 = & \omega_2 - t_a\omega_3 + t_e\omega_4 - t_a t_e\omega_6 \\ \overline{\omega}_3 = & \omega_3 + t_e\omega_6 \\ \overline{\omega}_4 = & \omega_4 - t_a\omega_6 \\ \overline{\omega}_5 = & \omega_5 - t_b\omega_4 + (t_a t_b - t_c)\omega_6 \\ \overline{\omega}_6 = & \omega_6 \end{cases} \tag{10}$$

bestimmt: Bedingungen, welche auseinander durch eine Transformation (10) hervorgehen, gehören zu konjugierten Bewegungsvorgängen.

---

[2]Die Werte z und E sind unwesentlich: Mit jedem Punkt $P_0 \ldots (x_0/y_0/z_0)$, der eine sphärische Bahn $H(P_0)$ durchläuft, wird auch jeder Punkt $\overline{P}(x_0/y_0/\overline{z}_0)$ eine sphärische Bahn $H(\overline{P}_0)$ durchlaufen, die sich von $H(P_0)$ nur durch eine Translation in z-Richtung um den Betrag $\overline{z}_0 - z_0$ unterscheidet.

Um zu einem Unterraum $T \subset P(V)$ den zugehörigen maximalen Bewegungsvorgang (siehe J. Lang [12]) ζ zu ermitteln, ersetzen wir die quadratischen Polynome $L_i \in U$ in den Variablen $Y_1, \ldots, Y_6$, welche U aufspannen und die Gestalt

(11) $$L_i \ \ldots \ \omega_0^{(i)} Y_1^2 + \sum_{j=1}^{6} \omega_j^{(i)} Y_i$$

besitzen, durch die Polynome

(12) $$K_i \ \ldots \ \omega_0^{(i)} Y_0 + \sum_{j=1}^{6} \omega_j^{(i)} Y_j = \sum_{j=0}^{6} \omega_j^{(i)} Y_j.$$

in Variablen $Y_0, Y_1, \ldots, Y_6$ und ergänzen dieses lineare, homogene Gleichungssystem durch die quadratische Gleichung

(13) $$Y_0 - Y_1^2 = 0.$$

(13) erlaubt es, in der allgemeinen Lösung des Systems (12) einen der Parameter zu elimineren (siehe J. Lang [12]).

Die Untersuchung der r-dimensionalen Unterräume des Bedingungsraumes $P(V)$ führt dabei (siehe [12]) auf $(5-r)$-parametrige Bewegungsvorgänge. Die Suche nach den vierparametrigen Bewegungsvorgängen führt dabei auf die *Untersuchung der Geraden von* $P(V)$.

1. Klassifikation der eindimensionalen Unterräume

Von den eindimensionalen Unterräumen des Bedingungsraumes $P(V)$ sind nur jene von Interesse, welche zur Gänze auf der Hyperfläche Θ liegen, da sie auf eine einparametrige Menge von Sphärenbedingungen führen; ein Unterraum T, der nicht Teilmenge von Θ ist, liefert im allgemeinen höchstens zwei Sphärenbedingungen.

Wir werden in diesem Abschnitt die eindimensionalen Unterräume des Bedingungsraumes, die zur Gänze in der Hyperfläche Θ liegen, vollständig bezüglich der Gruppe (10) klassifizieren. Zu jeder Klasse werden wir eine Normalform angeben und daraus eine Normalform des maximalen Bewegungsvorganges errechnen, der zu diesem Bedingungsraum T gehört. Schließlich werden wir die Punkte des Gangraumes, zu denen Bedingungen $X \in T$ gehören, angeben und die zugehörigen Bahnsphären beschreiben. Unmittelbar aus der Normalform von T werden wir die Invarianten des zugehörigen maximalen

Bewegungsvorganges erhalten; die geometrische Deutung solcher Invarianten anhand des Bewegungsvorganges wird die Betrachtungen abschließen. Auf diese Weise werden wir alle *vierparametrigen* Bewegungsvorgänge mit sphärischen Bahnen erhalten.

Aus (10) erkennen wir unmittelbar, daß die Hyperebenen

$$H_0 \; \ldots \; \omega_0 = 0, \qquad H_6 \; \ldots \; \omega_6 = 0$$

invariant sind. Dasselbe gilt dann auch für den Schnittraum $W_{06} = H_0 \cap H_6$.

Wir wollen nun die eindimensionalen Unterräume im einzelnen betrachten. In den folgenden Abschnitten sei T also eine Gerade, die ganz in Θ liegt.

1.1 FALL 1: T trifft den Unterraum W_{06} nicht.

Es gibt genau einen Punkt $G = T \cap H_0$ und genau einen Punkt $K = T \cap H_6$. Diese Punkte seien

$$G \ldots (0{:}\,\gamma_1{:}\,\gamma_2{:}\,\gamma_3{:}\,\gamma_4{:}\,\gamma_5{:}\,1), \qquad K \ldots (1{:}\,\kappa_1{:}\,\kappa_2{:}\,\kappa_3{:}\,\kappa_4{:}\,\kappa_5{:}\,0) \tag{14}$$

Wegen $\kappa_6 = 0$ sind auch κ_3, κ_4 bezüglich der Gruppe (10) invariant. Wir unterscheiden nun folgende Fälle:

Fall 1a: $\kappa_4 \neq 0$. Die Koordinaten (14) können durch geeignete Wahl[3] von t_a, t_b, t_c, t_d, t_e vermöge (10) in die Form

$$G \ldots (0{:}\,0{:}\,\gamma_2{:}\,0{:}\,0{:}\,0{:}\,1), \qquad K \ldots (1{:}\,\kappa_1{:}\,k_2{:}\,\kappa_3{:}\,\kappa_4 \neq 0{:}\,0{:}\,0)$$

gebracht werden. Berücksichtigt man, daß die Koordinaten aller Punkte $X \in T$ der Gleichung (8) genügen müssen, so erhält man noch:

$$\gamma_2 = 0, \qquad \kappa_2 = 0, \qquad \kappa_3 = 0. \tag{15}$$

Die Verbindungsgerade $GK = T$ der Punkte

$$G \ldots (0{:}\,0{:}\,0{:}\,0{:}\,0{:}\,0{:}\,1), \qquad K \ldots (1{:}\,\kappa_1{:}\,0{:}\,0{:}\,\kappa_4 \neq 0{:}\,0{:}\,0) \tag{16}$$

hat die Darstellung

$$X(\mu_1, \mu_2) = (\mu_2{:}\,\mu_2\kappa_1{:}\,0{:}\,0{:}\,\mu_2\kappa_4{:}\,0{:}\,\mu_1). \tag{17}$$

Wir gehen wie in J. Lang [12], Abschnitt 2 beschrieben vor und erhalten schließlich zum System

---

[3] Durch $t_a = \frac{\gamma_4}{\gamma_6}$, $t_b = \frac{\kappa_5}{\kappa_4}$, $t_c = \frac{\gamma_5}{\gamma_5}$, $t_d = -\frac{\gamma_1\kappa_4 + \gamma_3\kappa_5}{\gamma_6\kappa_4}$, $t_e = -\frac{\gamma_3}{\gamma_6}$ kann man die angegebene Form erreichen.

$$\begin{aligned} Y_0 + \kappa_1 Y_1 + \kappa_4 Y_4 &= 0 \\ Y_6 &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

und zur quadratischen Gleichung (13) die Lösung

$$(Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6) = \left(t_1^2, t_1, t_2, t_3, \frac{-t_1^2 - \kappa_1 t_1}{\kappa_4}, t_4, 0 \right). \tag{19}$$

Das ergibt einen vierparametrigen Bewegungsvorgang der Gestalt

$$\begin{aligned} \overline{x} &= x + t_1 \\ \overline{y} &= y + t_2 x + t_3 \qquad \kappa_4 \neq 0\,. \\ \overline{z} &= z - \frac{t_1^2 + \kappa_1 t_1}{\kappa_4} x + t_4 y \end{aligned} \tag{20}$$

Die Invarianten im Fall 1a sind κ_1, κ_4. Die Punkte des Gangraumes, welchen eine sphärische Bahn zugewiesen wird, erhält man aus (9) durch

$$x_0(\mu_1, \mu_2) = \kappa_4 \frac{\mu_2}{\mu_1}, \qquad y_0(\mu_1, \mu_2) = 0. \tag{21}$$

Sie erfüllen eine isotrope, nicht vollisotrope Ebene. Die zugehörigen Bahnsphären haben die Gestalt

$$\Phi(\mu_1, \mu_2) \ \ldots \ \mu_1 \mu_2 x^2 + (\mu_1 \mu_2 \kappa_1 - \mu_2^2 \kappa_4) x + \mu_1^2 z + E = 0, \tag{22}$$

wobei $E \in \mathbb{R}$ ist. Ihre Fernscheitel stimmen überein, d. h. es handelt sich gemäß J. Lang [12], Satz 6 um den Typ A. Die Radien sind wegen $R = \frac{-D}{A} = -\frac{\omega_6}{2\omega_0}$ gegeben durch

$$R(\mu_1, \mu_2) = -\frac{\mu_1}{2\mu_2}. \tag{23}$$

Der gemeinsame Fernscheitel U der Sphären ist für die angegebene Normalform (20) durch $U \ldots (0{:}\,0{:}\,1{:}\,0)$ gegeben. Es gibt eine vollisotrope Gerade h, deren Punkte auf *ebenen* Bahnen geführt werden (für die Normalform (20) sind das die Punkte $P \ \ldots \ \mu_1 : \mu_2 = 1 : 0$ der z-Achse; ihre Bahnebene wird durch $z = const.$ beschrieben). Den Abstand eines Punktes $P(\mu_1, \mu_2)$ des Gangraumes aus (21) von dieser ausgezeichneten Geraden h bezeichnen wir mit

$$\delta(\mu_1, \mu_2) = \frac{\kappa_4 \mu_2}{\mu_1}.$$

Das Produkt aus $\delta(\mu_1, \mu_2)$ und dem Radius $R(\mu_1, \mu_2) = -\frac{\mu_1}{2\mu_2}$ der zugehörigen Bahnsphäre ist unabhängig von (μ_1, μ_2) und ergibt eine Invariante des Bewegungsvorganges ζ:

$$\delta(\mu_1, \mu_2) R(\mu_1, \mu_2) = -\frac{\kappa_4}{2}. \tag{24}$$

Wir erhalten somit den

Satz 1. *Der Fall* 1a *ist dadurch charakterisiert, daß die Punkte einer isotropen, aber nicht vollisotropen Ebene ν des Gangraumes auf konzentrischen Sphären geführt werden, welche keine Punktgrenzkugeln sind; dabei entsprechen Punkten auf verschiedenen vollisotropen Geraden in ν Bahnkugeln mit verschiedenen Radien.*

Es gibt genau eine vollisotrope Gerade $h \subset \nu$, deren Punkte in (nichtisotropen, zueinander parallelen) Ebenen laufen, welche durch den gemeinsamen Fernscheitel der Bahnsphären der Punkte $P \in \nu \backslash h$ gehen. Eine geometrische Deutung von κ_4 ist gegeben durch:

- *Das Produkt aus dem Abstand eines Punktes $P \in \nu$ des Gangraumes von der Geraden h mit dem Radius der zugehörigen Bahnsphäre, hängt nicht von der Wahl des Punktes $P \in \nu$ ab und ist eine Invariante von ζ, nämlich gleich $-\frac{\kappa_4}{2}$.*

Jeder Bewegungsvorgang des Typs 1a, *der die Invarianten κ_1, κ_4 aufweist, ist zur Normalform (20) konjugiert.*

Fall 1b: $\kappa_4 = 0, \kappa_3 \neq 0$. Wir können durch geeignete Wahl von t_a, t_b, t_c, t_d, t_e vermöge (10) aus (14) die Gestalt[4]

$$G \ldots (0{:}0{:}0{:}0{:}0{:}0{:}1), \qquad K \ldots (1{:}0{:}0{:}\kappa_3 \neq 0{:}0{:}\kappa_5{:}0). \tag{25}$$

Die gesuchte Normalform hat die Gestalt

$$\begin{aligned} \overline{x} &= x + t_1 \\ \overline{y} &= y + t_2 x - \frac{t_1^2 + \kappa_5 t_3}{\kappa_3} \qquad\qquad \kappa_3 \neq 0. \\ \overline{z} &= z + t_4 x + t_3 y \end{aligned} \tag{26}$$

Die Punkte des Gangraumes, welche eine sphärische Bahn besitzen, bilden eine vollisotrope Ebene ν, welche in der Normalform (26) durch

$$x_0(\mu_1, \mu_2) = 0, \qquad y_0(\mu_1, \mu_2) = \kappa_5 \frac{\mu_2}{\mu_1} \tag{27}$$

gegeben ist. Die zugehörigen Bahnsphären

[4] Mit Hilfe von (10) erhalten wir bei $t_a = \frac{\gamma_4}{\gamma_6}$, $t_b = -\frac{\kappa_1}{\kappa_3}$, $t_c = \frac{\gamma_5}{\gamma_6}$, $t_d = \frac{\gamma_3 \kappa_1 - \gamma_1 \kappa_3}{\gamma_6 \kappa_3}$, $t_e = -\frac{\gamma_3}{\gamma_6}$ unmittelbar $\gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = \kappa_1 = 0$. Da alle Punkte von T nach Voraussetzung die Bedingung (8) erfüllen, gilt dann noch $\gamma_2 = \kappa_2 = 0$.

(28) $$\Phi(\mu_1,\mu_2)\ \ldots\ \mu_2 x^2 + \mu_2\kappa_3 y + \mu_1 z + E = 0, \qquad E\in\mathbb{R}.$$

sind nicht konzentrisch. Ihre Fernscheitel sind für die Normalform (26) gegeben durch

(29) $$U(\mu_1,\mu_2)\ \ldots\ (0{:}\,0{:}\,\mu_1{:}\,-\kappa_3\mu_2).$$

Es handelt sich um den Typ B (siehe J. Lang [12], Satz 6), die Radien der Bahnsphären sind gegeben durch (23). Die Punkte einer vollisotropen Geraden h werden auf ebenen Bahnen geführt; die Bahnebenen sind zueinander parallel. Wenn wir den Ersatzabstand eines Punktes $P(\mu_1,\mu_2)\in\nu$ des Gangraumes aus (27) von dieser ausgezeichneten Geraden h mit

$$\delta(\mu_1,\mu_2) = \frac{\kappa_5\mu_2}{\mu_1}$$

bezeichnen, so erkennen wir unmittelbar:

(30) $$\delta(\mu_1,\mu_2)\ \cdot\ R(\mu_1,\mu_2) = -\frac{\kappa_5}{2}.$$

Das ist eine geometrische Deutung der Invariante κ_5, welche der Deutung (24) im Fall 1a entspricht.

Bezeichnen wir mit $\alpha(\mu_1,\mu_2)$ den Winkel zwischen der Richtung des Fernscheitels $U(\mu_1,\mu_2)$ aus (29) und der ausgezeichneten Bahnebenenstellung, welche zur Geraden h gehört, so errechnet man

(31) $$\alpha(\mu_1,\mu_2)\ \cdot\ R(\mu_1,\mu_2) = \frac{\kappa_3}{2},$$

was eine Deutung für die Invariante κ_3 des Bewegungsvorgangs liefert. Es gilt also der

Satz 2. *Im Fall* 1b *werden die Punkte einer vollisotropen Ebene ν des Gangraumes auf (nichtkonzentrischen) Sphären geführt; dabei werden Punkten auf verschiedenen vollisotropen Geraden in ν Bahnsphären mit verschiedenen Radien zugewiesen. Es gibt genau eine vollisotrope Gerade $h\subset\nu$, deren Punkte in (nichtisotropen, zueinander parallelen) Ebenen laufen. Es gibt zwei Invarianten κ_3,κ_5, welche folgende geometrische Deutung zulassen:*

- *Das Produkt aus dem Ersatzabstand eines Punktes P des Gangraumes von der Geraden h mit dem Radius der zugehörigen Bahnsphäre, hängt nicht von der Wahl des Punktes $P\in\nu$ ab und ist eine Invariante von ζ, nämlich genau $-\frac{\kappa_5}{2}$.*
- *Das Produkt des Winkels zwischen dem Fernscheitel einer Bahnsphäre $\Phi(\mu_1,\mu_2)$ und der ausgezeichneten Bahnebenenstellung mit*

dem Radius $R(\mu_1, \mu_2)$ dieser Bahnsphäre ist unabhängig von der Wahl des Punktes $P \in \nu$ und beträgt wegen (30) und (31) genau $-\frac{\kappa_3}{2}$.

Jeder Bewegungsvorgang des Typs 1b, der die Invarianten κ_3, κ_5 aufweist, ist zur Normalform (26) konjugiert.

Bei $\kappa_3 = \kappa_4 = \kappa_6 = 0$ ist auch κ_5 invariant bezüglich (10). Wir betrachten also:

Fall 1c: $\kappa_3 = \kappa_4 = 0, \kappa_5 \neq 0$. Wir können durch geeignete Wahl von t_a, t_b, t_c, t_d, t_e vermöge (10) erreichen[5]:

$$G \ldots (0{:}\,0{:}\,0{:}\,0{:}\,0{:}\,0{:}\,1), \qquad K \ldots (1{:}\,\kappa_1{:}\,0{:}\,0{:}\,0{:}\,\kappa_5{:}\,0) \tag{32}$$

und erhalten schließlich die Normalform

$$\begin{aligned} \overline{x} &= x + t_1 \\ \overline{y} &= y + t_2 x + t_3 \\ \overline{z} &= z + t_4 x + -\frac{\kappa_1 t_1 + t_1^2}{\kappa_5} y \end{aligned} \qquad \kappa_5 \neq 0. \tag{33}$$

Die Punkte des Gangraumes, welche sphärische Bahnen haben, bilden eine vollisotrope Ebene ν, welche in der Normalform (33) durch (27) dargestellt werden kann. Die zugehörigen Bahnsphären

$$\Phi(\mu_1, \mu_2) \ \ldots \ \mu_2 x^2 + \mu_2 \kappa_1 x + \mu_1 z + E = 0, \qquad E \in \mathbb{R}. \tag{34}$$

sind konzentrisch. Ihre Fernscheitel sind für die Normalform (33) gegeben durch $U \ldots (0{:}\,0{:}\,1{:}\,0)$. Es handelt sich zugleich um Typ A und Typ B (siehe J. Lang [12], Satz 6), die Radien der Bahnsphären können auch hier in der Form (23) angeschrieben werden.

Die Punkte einer vollisotropen Geraden h, welche in der Normalform (26) durch $x_h = y_h = 0$ beschrieben wird, werden auf ebenen Bahnen geführt; die Bahnebenen sind zueinander parallel. Der Ersatzabstand eines Punktes $P(\mu_1, \mu_2) \in \nu$ von dieser ausgezeichneten Geraden h ist $\delta(\mu_1, \mu_2) = \frac{\kappa_5 \mu_2}{\mu_1}$. Es gilt auch hier die Beziehung (30).

Satz 3. *Im Fall* 1c *werden die Punkte einer vollisotropen Ebene ν des Gangraumes auf konzentrischen Sphären geführt; dabei werden Punkten auf verschiedenen vollisotropen Geraden in ν Bahnsphären mit verschiedenen Radien zugewiesen. Es gibt genau eine vollisotrope Gerade*

---

[5] Es ergibt sich bei $t_a = \frac{\gamma_4}{\gamma_6}$, $t_c = \frac{\gamma_5}{\gamma_6}$, $t_d = -\frac{\gamma_1 + t_b \gamma_3}{\gamma_6}$, $t_e = -\frac{\gamma_3}{\gamma_6}$ vorerst $\gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = 0$. Mit Hilfe der Bedingung (8) erkennt man dann noch: $\gamma_2 = 0$, $\kappa_2 = 0$.

$h \subset \nu$, deren Punkte in (nichtisotropen, zueinander parallelen) Ebenen laufen. Es gilt:

- *Das Produkt aus dem Ersatzabstand eines Punktes P des Gangraumes von der Geraden h mit dem Radius der zugehörigen Bahnsphäre, hängt nicht von der Wahl des Punktes $P \in \nu$ ab und ist eine Invariante von ζ, nämlich $\frac{\kappa_5}{2}$.*

Jeder Bewegungsvorgang des Typs 1c, der die Invarianten κ_1, κ_5 aufweist, ist zur Normalform (33) konjugiert.

Fall 1d: $\kappa_3 = \kappa_4 = \kappa_5 = 0$. Dieser Fall liefert nur eine vollisotrope Gerade von Punkten mit sphärischen Bahnen und ist deshalb nicht von Interesse.

1.2 FALL 2: T trifft W_{06}, liegt aber nicht in H_0 oder H_6.

Sei $T = GK$ mit $G \notin H_0, H_6$ und $K = T \cap W_{06}$. Wir haben also die Verbindungsgerade von Punkten

$$G \ldots (1{:}\gamma_1{:}\gamma_2{:}\gamma_3{:}\gamma_4{:}\gamma_5{:}\gamma_6 \neq 0), \qquad K \ldots (0{:}\kappa_1{:}\kappa_2{:}\kappa_3{:}\kappa_4{:}\kappa_5{:}0) \tag{35}$$

zu betrachten. Da $\kappa_6 = 0$ ist, sind κ_3 und κ_4 invariant gegenüber (10). Wir unterscheiden:

Fall 2a: $\kappa_4 \neq 0$. Dann ist wegen (8) aber $\kappa_3 = 0$. Wir können mit Hilfe von (10) und (8) jedenfalls[6]

$$G \ldots (1{:}0{:}0{:}0{:}0{:}0{:}\gamma_6 \neq 0), \qquad K \ldots (0{:}\kappa_1{:}0{:}0{:}1{:}0{:}0) \tag{36}$$

erreichen und erhalten schließlich die Normalform

$$\begin{aligned} \overline{x} &= x + t_1 \\ \overline{y} &= y + t_2 x + t_3 \\ \overline{z} &= z - \kappa_1 t_1 x + t_4 y - \frac{t_1^2}{\gamma_6} \end{aligned} \qquad \gamma_6 \neq 0\,. \tag{37}$$

Die Punkte des Gangraumes mit sphärischen Bahnen liegen in einer isotropen, aber nicht vollisotropen Ebene ν

[6] Der Punkt K ist ein ausgezeichneter Punkt auf T, der Punkt G hingegen ist willkürlich auf T gewählt. Setzt man statt (35) allgemein $G \ldots (1{:}\gamma_1 + \lambda\kappa_1{:}\gamma_2 + \lambda\kappa_2{:}\gamma_3 + \lambda\kappa_3{:}\gamma_4 + \lambda\kappa_4{:}\gamma_5 + \lambda\kappa_5{:}\gamma_6 \neq 0)$, so ergibt sich das oben angegebene Resultat (36). Man erhält diese Normalform dann mit Hilfe von (10) bei $t_a = \frac{\lambda+\gamma_4}{\gamma_6}$, $t_b = \kappa_5$, $t_c = \frac{\lambda\kappa_5+\gamma_5}{\gamma_6}$, $t_d := -\frac{\gamma_1+\lambda\kappa_1+\lambda\kappa_3\kappa_5+\gamma_3\kappa_5}{\gamma_6}$, $t_e = \frac{\lambda\kappa_3+\gamma_4\kappa_3-\gamma_6\kappa_2}{\gamma_6}$.

(38) $$x_0(\mu_1,\mu_2)=\frac{\mu_2}{\gamma_6\mu_1},\qquad y_0(\mu_1,\mu_2)=0\,.$$

Die zugehörigen Bahnsphären sind von der Gestalt

(39) $$\Phi(\mu_1,\mu_2)\ \ldots\ \mu_1x^2+\mu_2\left(\frac{\kappa_1}{2}-\frac{1}{\gamma_6}\right)x+\mu_1\frac{\gamma_6}{2}z+E=0$$

mit $E\in\mathbb{R}$. Alle Bahnsphären haben denselben Fernscheitel $U\in u$ und zugleich denselben Radius

(40) $$R=-\frac{\gamma_6}{2}\,.$$

Je zwei dieser Bahnsphären sind schiebungsgleich. Betrachtet man den Abstand $q(P,\overline{P})$ zweier Punkte aus ν und den Betrag $n(P,\overline{P})$ des Schiebvektors, der zu den beiden Bahnsphären gehört, so bestätigt man leicht:

(41) $$n(P,\overline{P})\colon q(P,\overline{P})=\frac{\gamma_6\kappa_1}{4}-\frac{1}{2}\,.$$

Dieses Verhältnis hängt also nicht von der Wahl der beiden Punkte ab und liefert zusammen mit (40) eine Deutung für die Invariante κ_1. Wir erhalten also:

Satz 4. *Im Fall 2a haben die Punkte einer isotropen, aber nicht vollisotropen Ebene ν des Gangraumes sphärische Bahnen; dabei sind die Bahnsphären konzentrisch und haben denselben Radius, sind also schiebungsgleich. Die Invarianten sind κ_1,γ_6. $-\frac{\gamma_6}{2}$ tritt als gemeinsamer Radius der Bahnsphären auf. Das Verhältnis zwischen dem Abstand zweier Punkte aus ν und der Spanne des Vektors der Translation, die die beiden Bahnsphären ineinander überführt, ist eine Invariante* (41). *Jeder Bewegungsvorgang des Typs* 2a, *der die Invarianten κ_1,γ_6 aufweist, ist zur Normalform* (37) *konjugiert.*

Fall 2b: $\kappa_4=0$, $\kappa_3\neq 0$. Wir können mit Hilfe von (10) und (8) schießlich[7]

(42) $$G\ldots(1{:}\,0{:}\,0{:}\,0{:}\,0{:}\,0{:}\,\gamma_6\neq 0),\qquad K\ldots(0{:}\,0{:}\,0{:}\,1{:}\,0{:}\,\kappa_5{:}\,0)$$

erreichen. Es ergibt sich eine Normalform der Gestalt

[7]Wie in Fall 2a liefert der Ansatz $G\ldots(1{:}\,\gamma_1+\lambda\kappa_1{:}\,\gamma_2+\lambda\kappa_2{:}\,\gamma_3+\lambda\kappa_3{:}\,\gamma_4+\lambda\kappa_4{:}\,\gamma_5+\lambda\kappa_5{:}\,\gamma_6\neq 0)$ wegen (8) die Normalform für die Verbindungsgerade $T=GK$. Hier verwenden wir $t_a=\frac{\gamma_4}{\gamma_6}$, $t_c=-\kappa_1$, $t_b=\frac{\lambda\kappa_5+\gamma_5}{\gamma_6}$, $t_d=\frac{-\gamma_1+\gamma_3\kappa_1+\lambda\kappa_1}{\gamma_6}$, $te=-F\lambda+\gamma_3\gamma_6$.

$$\begin{aligned} \overline{x} &= x + t_1 \\ \overline{y} &= y + t_2 x - \kappa_5 t_4 \\ \overline{z} &= z + t_3 x + t_4 y - \frac{t_1^2}{\gamma_6} \end{aligned} \qquad \gamma_6 \neq 0 \tag{43}$$

Die Punkte mit sphärischen Bahnen liegen in einer vollisotropen Ebene

$$\nu \;\ldots\; x_0(\mu_1,\mu_2) = 0, \qquad y_0(\mu_1,\mu_2) = \frac{\mu_2 \kappa_5}{\mu_1 \gamma_6}. \tag{44}$$

Die zugehörigen Bahnsphären sind von der Gestalt

$$\Phi(\mu_1,\mu_2) \;\ldots\; \mu_1 x^2 + \mu_2 y + \mu_1 \gamma_6 z + E = 0, \qquad E \in \mathbb{R}. \tag{45}$$

Sie haben durchwegs denselben Radius

$$R = -\frac{\gamma_6}{2}. \tag{46}$$

Die Fernscheitel dieser Bahnsphären sind gegeben durch

$$U \;\ldots\; (0{:}\,0{:} -\mu_1\gamma_6{:}\,\mu_2). \tag{47}$$

Man erkennt, daß der Ersatzabstand $t(P,\overline{P})$ zweier Punkte aus ν und der Ersatzwinkel $\alpha(P,\overline{P})$ zwischen den Fernscheiteln der zugehörigen Bahnsphären zueinander proportional sind: Ihr Verhältnis hängt nicht von der Wahl der beiden Punkte ab und ist genau die Invariante

$$t(P,\overline{P}) : \alpha(P,\overline{P}) = \kappa_5. \tag{48}$$

Also gilt:

Satz 5. *Fall* 2b *liegt genau dann vor, wenn die Punkte einer vollisotropen Ebene ν des Gangraumes sphärische Bahnen durchlaufen und wenn dabei alle Punkte von ν kongruente Bahnsphären mit verschiedenen Fernscheiteln besitzen. Die Invarianten κ_5, γ_6 kann man geometrisch charakterisieren:*

- $-\frac{\gamma_6}{2}$ *tritt als gemeinsamer Radius der Bahnsphären auf.*
- *Das Verhältnis zwischen dem Ersatzabstand zweier Punkte aus ν und dem Ersatzwinkel, den die Fernscheitel der zugehörigen Bahnsphären bestimmen, ist die Invariante κ_5* (48).

Jeder Bewegungsvorgang des Typs 2b, *der die Invarianten κ_5, γ_6 aufweist, ist zur Normalform* (43) *konjugiert.*

Ist $\kappa_3 = \kappa_4 = 0$, so ist κ_5 invariant bezüglich (10). Wir setzen also:

Fall 2c: $\kappa_3 = \kappa_4 = 0,\ \kappa_5 \neq 0.$ Wir können mit Hilfe von (10) und (8) für die Spurpunkte G, K erreichen[8]:

(49) $G \ldots (1{:}\,0{:}\,0{:}\,0{:}\,0{:}\,0{:}\,\gamma_6 \neq 0), \qquad K \ldots (0{:}\,\kappa_1{:}\,0{:}\,0{:}\,0{:}\,1{:}\,0).$

Es ergibt sich schließlich eine Normalform der Gestalt

$$\begin{aligned} \overline{x} &= x + t_1 \\ \overline{y} &= y + t_2 x + t_3 \\ \overline{z} &= z + t_4 x - t_1 \kappa_1 y + \frac{t_1^2}{\gamma_6} \end{aligned} \qquad \gamma_6 \neq 0. \tag{50}$$

Die Punkte mit sphärischen Bahnen liegen in einer vollisotropen Ebene ν, die ebenso wie in (44) beschrieben werden kann. Die zugehörigen Bahnsphären sind konzentrisch und von der Gestalt

$$\Phi(\mu_1, \mu_2) \ldots \; \mu_1 x^2 + \mu_2 \frac{\kappa_1}{2} x + \mu_1 \frac{\gamma_6}{2} z + E = 0, \qquad E \in \mathbb{R}. \tag{51}$$

Sie haben durchwegs denselben Radius $R = -\frac{\gamma_6}{2}$ und sind folglich kongruent. Also:

Satz 6. *Fall 2c liegt genau dann vor, wenn die Punkte einer vollisotropen Ebene ν des Gangraumes sphärische Bahnen durchlaufen und wenn dabei Punkte auf verschiedenen vollisotropen Geraden in ν kongruente und konzentrische Bahnsphären besitzen. Jeder Bewegungsvorgang des Typs 2c, der die Invarianten κ_1 und γ_6 aufweist, ist zur Normalform (50) konjugiert.*

Der Fall $\kappa_3 = \kappa_4 = \kappa_5 = 0$ führt auf eine einzige vollisotrope Gerade, deren Punkte sphärische Bahnen durchlaufen und ist deshalb nicht interessant.

1.3 FALL 3: T liegt in der Hyperebene H_0.

In diesem Fall haben wir mit *ebenen* Bahnen zu rechnen. Sei $T = GK$ mit $G \in H_0 \setminus W_{06}$ und $K = T \cap W_{06}$. Wir setzen

(52) $G \ldots (0{:}\,\gamma_1 \gamma_2{:}\,\gamma_3{:}\,\gamma_4{:}\,\gamma_5{:}\,1), \qquad K \ldots (0{:}\,\kappa_1{:}\,\kappa_2{:}\,\kappa_3{:}\,\kappa_4{:}\,\kappa_5{:}\,0)$

Wegen $\kappa_6 = 0$ sind auch hier κ_3, κ_4 invariant gegenüber (10). Wir unterscheiden:

[8] Hier erhalten wir, wenn wir so wie in Fall 2a oder Fall 2b vorgehen, bei $t_a = \frac{\gamma_4}{\gamma_6}$, $t_c = \frac{\lambda + \gamma_5}{\gamma_6}$, $t_d = -\frac{\gamma_1 + t_b \gamma_3}{\gamma_6}$, $t_e = -\frac{\gamma_3}{\gamma_6}$ mit Hilfe von (8) die angegebene Normalform.

Fall 3a: $\kappa_4 \neq 0$. Wir können mit Hilfe von (10) und (8) jedenfalls[9]

$$G \ldots (0{:}\,0{:}\,0{:}\,0{:}\,0{:}\,0{:}\,1), \qquad K \ldots (0{:}\,\kappa_1{:}\,0{:}\,0{:}\,1{:}\,0{:}\,0) \tag{53}$$

erreichen[10] und erhalten die Normalform

$$\begin{aligned} \overline{x} &= x + t_1 \\ \overline{y} &= y + t_2 x + t_3 \\ \overline{z} &= z - \kappa_1 t_1 x + t_4 y. \end{aligned} \tag{54}$$

Die Punkte des Gangraumes, welchen sphärische (hier: ebene) Bahnen zugewiesen werden, erhält man in

$$x_0(\mu_1, \mu_2) = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \qquad y_0(\mu_1, \mu_2) = 0. \tag{55}$$

Sie erfüllen eine isotrope, nicht vollisotrope Ebene. Die zugehörigen Bahnsphären sind die Ebenen

$$\Phi(\mu_1, \mu_2) \ \ldots \ \mu_2 \kappa_1 x + \mu_1 z + E = 0, \qquad E \in \mathbb{R}, \tag{56}$$

welche ein Ebenenbündel mit dem Scheitel U bilden[11]. Es besteht eine Projektivität zwischen dem Parallelstrahlbüschel vollisotroper Geraden in ν und dem Büschel $U(x)$ der zugehörigen Bahnebenenferngeraden. Ist λ der Abstand zwischen zwei Punkten aus ν und α der Winkel zwischen ihren Bahnebenen, so bestätigt man durch Rechnung:

$$\alpha : \lambda = -\kappa_1. \tag{57}$$

Dieses Verhältnis hängt also nicht von der Wahl der beiden Punkte ab und liefert eine Deutung für die Invariante κ_1. Also gilt:

Satz 7. *Im Fall* 3a *durchlaufen die Punkte einer isotropen, aber nicht vollisotropen Ebene ν des Gangraumes ebene Bahnen; dabei entsprechen Punkten auf verschiedenen vollisotropen Geraden in ν nichtparallele Bahnebenen, welche aber einen festen Fernpunkt U auf der absoluten Geraden u gemeinsam haben. Das Verhältnis zwischen dem Winkel zweier Bahnebenen und dem Abstand der zugehörigen Punkte im Gangraum ist konstant, und zwar gleich $-\kappa_1$. Jeder Bewegungsvorgang des*

[9] Der Punkt K ist ein ausgezeichneter Punkt auf T, der Punkt G hingegen ist willkürlich auf T gewählt. In der Rechnung setzen wir für G statt (52) allgemein $G \ldots (0{:}\, \gamma_1 + \lambda\kappa_1 {:}\, \gamma_2 + \lambda\kappa_2 {:}\, \gamma_3 + \lambda\kappa_3 {:}\, \gamma_4 + \lambda\kappa_4 {:}\, \gamma_5 + \lambda\kappa_5 {:}\, 1)$ und versuchen, durch geeignete Wahl von λ zu spezialisieren.

[10] Wir setzen $\kappa_4 = 1$ und in (10) $t_a = \lambda + \gamma_4$, $t_b = \kappa_5$, $t_c = \lambda\kappa_5 + \gamma_5$, $t_d = -\gamma_1 + \lambda\kappa_1 + \lambda\kappa_3\kappa_5 + \gamma_3\kappa_5$, $t_e = -\lambda\kappa_3 + \gamma_3$. Wegen (8) ergibt sich dann (53).

[11] Man vergleiche hiezu H. Vogler [21].

Typs 3a, *der die Invariante* κ_1 *aufweist, ist zur Normalform* (54) *konjugiert.*

Fall 3b: $\kappa_4 = 0$, $\kappa_3 \neq 0$. (10) und (8) liefern[12]

$$G \ldots (0{:}0{:}0{:}0{:}0{:}0{:}1), \qquad K \ldots (0{:}0{:}0{:}1{:}0{:}\kappa_5{:}0). \tag{58}$$

Wir erhalten schließlich

$$\begin{aligned} \overline{x} &= x + t_1 \\ \overline{y} &= y + t_2 x - \kappa_5 t_4 \\ \overline{z} &= z + t_3 x + t_4 y \end{aligned} \tag{59}$$

als Normalform. Die Punkte des Gangraumes, welchen eine sphärische Bahn zugewiesen wird, liegen in einer vollisotropen Ebene

$$x_0(\mu_1, \mu_2) = 0, \qquad y_0(\mu_1, \mu_2) = \frac{\kappa_5 \mu_2}{\mu_1}, \tag{60}$$

die Bahnebenen sind durch

$$\Phi(\mu_1, \mu_2) \ \ldots \ \mu_2 y + \mu_1 z + E = 0, \qquad E \in \mathbb{R}. \tag{61}$$

gegeben. Alle Bahnebenen haben einen Fernpunkt U gemeinsam, der aber nicht auf der absoluten Geraden liegt. Es besteht auch hier eine Projektivität zwischen dem Parallelstrahlbüschel vollisotroper Geraden in ν und dem Büschel $U(u)$ der zugehörigen Bahnebenenferngeraden. Ist t der Abstand zwischen zwei Punkten aus ν und α der Winkel zwischen ihren Bahnebenen, so gilt:

$$\alpha : t = -1 : \kappa_5 \tag{62}$$

und somit:

Satz. *Im Fall* 3b *werden die Punkte einer vollisotropen Ebene* ν *des Gangraumes auf ebenen Bahnen geführt; dabei entsprechen Punkten auf verschiedenen vollisotropen Geraden in* ν *nichtparallele Bahnebenen, welche aber einen festen Fernpunkt* $U \notin u$ *gemeinsam haben. Das Verhältnis zwischen dem Winkel zweier Bahnebenen und dem Ersatzabstand der zugehörigen Punkte im Gangraum ist konstant, und zwar gleich* $-\frac{1}{\kappa_5}$. *Jeder Bewegungsvorgang des Typs* 3b, *der die Invariante* κ_5 *aufweist, ist zur Normalform* (59) *konjugiert.*

Fall 3c: $\kappa_3 = \kappa_4 = 0$. Nur bei $\kappa_5 \neq 0$ erhalten wir einen interessanten Fall. Man kann[13]

---

[12] Wir setzen $\kappa_3 = 1$ und in (10) dann $t_a = -\kappa_1$, $t_b = \gamma_4$, $t_c = -\kappa_1$, $t_d = -\gamma_1 + \kappa_1 \gamma_3$, $t_e = -\lambda - \gamma_3$. Aus (8) ergibt sich (58).

[13] Wir setzen $\kappa_5 = 1$ und erhalten mit Hilfe von (10) und (8) bei $t_a = \frac{\gamma_4}{\gamma_5}$, $t_c = \lambda + \gamma_5$, $t_d = -\gamma_1 - \lambda\kappa_1 - t_b\gamma_3$, $t_e = -\gamma_3$ die Gestalt (63).

$$G\ldots(0{:}\,0{:}\,0{:}\,0{:}\,0{:}\,0{:}\,1), \qquad K\ldots(0{:}\,\kappa_1{:}\,0{:}\,0{:}\,0{:}\,1{:}\,0). \tag{63}$$

erreichen und erhält schließlich als Normalform

$$\begin{aligned}\overline{x} &= x + t_1\\ \overline{y} &= y + t_2 x + t_3\\ \overline{z} &= z + t_4 x - t_1\kappa_1 y\end{aligned} \tag{64}$$

Die Punkte des Gangraumes mit sphärischer Bahn liegen in einer vollisotropen Ebene

$$x_0(\mu_1,\mu_2) = 0, \qquad y_0(\mu_1,\mu_2) = \frac{\kappa_5\mu_2}{\mu_1}; \tag{65}$$

die Bahnebenen sind durch

$$\Phi(\mu_1,\mu_2)\ \ldots\ \kappa_1\mu_2 x + \mu_1 z + E = 0, \qquad E \in \mathbb{R}. \tag{66}$$

gegeben. Alle Bahnebenen haben einen Fernpunkt U (auf der absoluten Geraden) gemeinsam. Die einzige Invariante κ_1 kann man ebenso wie im Fall 3b deuten, wenn man als Winkel zweier Bahnebenen den Ersatzwinkel α wählt:

$$\alpha : t = -\kappa_1. \tag{67}$$

Es gilt:

Satz 9. *Der Fall* 3c *ist dadurch charakterisiert, daß die Punkte einer vollisotropen Ebene ν des Gangraumes ebene Bahnen durchlaufen. Das Verhältnis zwischen dem Winkel zweier Bahnebenen und dem Ersatzabstand der zugehörigen Punkte im Gangraum ist konstant, und zwar gleich $-\kappa_1$. Jeder Bewegungsvorgang des Typs* 3c, *der die Invariante κ_1 aufweist, ist zur Normalform* (64) *konjugiert.*

1.4 FALL 4: T liegt in der Hyperebene H_6.

Dieser Fall schließt die Betrachtung eindimensionaler Unterräume von $P(V)$ ab. Den Fall, daß T in $W_{06} = H_0 \cap H_6$ liegt, schließen wir aus; er ist nicht von Interesse, da alle Punkte auf isotropen Ebenen wandern und der *Grundrißzwanglauf* ein *Kreuzschiebergetriebe* ist (siehe O. Röschel [14]). Wir haben mit Bahnen auf Punktgrenzkugeln zu rechnen. Gemäß J. Lang [12], Satz 2, werden mit jeder Sphärenbedingung dieses Typs alle Punkte einer vollisotropen Ebene ebenfalls auf Punktgrenzkugeln geführt. Wir können den Unterraum T als Verbindungsgerade $T = GK$ mit $G \in H_6 \setminus W_{06}$, $K \in W_{06}$ darstellen. Der Ansatz

(68) $\quad G\ldots(1{:}\,\gamma_1\gamma_2{:}\,\gamma_3{:}\,\gamma_4{:}\,\gamma_5{:}\,0), \qquad K\ldots(0{:}\,\kappa_1{:}\,\kappa_2{:}\,\kappa_3{:}\,\kappa_4{:}\,\kappa_5{:}\,0)$

liefert wegen J. Lang [12], Satz 2, nur bei $\gamma_4 = \gamma_5 = \kappa_4 = \kappa_5 = 0$ ein nichttriviales Resultat. κ_3 ist wegen $\kappa_6 = 0$ eine Invariante bezüglich (10). Es ergibt sich:

Fall 4a: $\kappa_3 \neq 0$. Wir können vermöge (69) $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ erreichen. Es ergibt sich[14]

(69) $\quad G\ldots(1{:}\,\gamma_1{:}\,\gamma_2{:}\,0{:}\,0{:}\,0{:}\,0), \qquad K\ldots(0{:}\,0{:}\,0{:}\,1{:}\,0{:}\,0{:}\,0).$

Die verbleibenden Invarianten γ_1, γ_2 liefern[15] bei $\gamma_2 \neq 0$, $\kappa_1 = 1$ einen Bewegungsvorgang der Gestalt

$$\begin{aligned} \overline{x} &= x + t_1 \\ \overline{y} &= y - \frac{\gamma_1 t_1 + t_1^2}{\gamma_2} x \qquad \gamma_2 \neq 0. \\ \overline{z} &= z + t_2 x - t_3 y + t_4 \end{aligned} \tag{70}$$

Fall 4b: $\kappa_3 = 0$. Wenn wir den trivialen Fall außer acht lassen, in dem nur die Punkte einer vollisotropen Ebene auf schiebungsgleichen Punktgrenzkugeln geführt werden, so können wir $\gamma_3 \neq 0$, $\kappa_2 \neq 0$ setzen; sei also $\kappa_2 = 1$. Vermöge (10) erreichen wir[16]

(71) $\quad G\ldots(1{:}\,0{:}\,0{:}\,\gamma_3{:}\,0{:}\,0{:}\,0), \qquad K\ldots(0{:}\,\kappa 1{:}\,1{:}\,0{:}\,0{:}\,0{:}\,0).$

Die Invarianten γ_3, κ_1 liefern den Bewegungsvorgang

$$\begin{aligned} \overline{x} &= x + t_1 \\ \overline{y} &= y - \kappa_1 t_1 x - \frac{t_1^2}{\gamma_3} \qquad \gamma_3 \neq 0. \\ \overline{z} &= z + t_2 x + t_3 y + t_4 \end{aligned} \tag{72}$$

Die Bewegungsvorgänge aus Fall 4a und Fall 4b sind die einzigen Bricardbewegungsvorgänge, welche zu eindimensionalen Bedingungsr"aumen gehören. Es handelt sich bei (70) und (72) um die Normalformen jener Bricardschen Bewegungsvorgänge, die in O. Röschel [16], Satz 1, als der Typ I angeführt sind. Es gilt also:

---

[14] Wir haben hier den Punkt K als den Schnittpunkt mit W_{06} ausgezeichnet, während G willkürlich auf T gewählt wurde. Wir setzen $G(\ldots\gamma_i + \lambda\kappa_i\ldots)$ und erhalten bei $\lambda = -\gamma_3$ und $t_a = \kappa_2$, $t_b = -\kappa_1$ das Resultat (69).

[15] Im Fall $\gamma_2 = 0$ werden nur die Punkte einer einzigen vollisotropen Ebene auf Punktgrenzkugeln geführt. Dieser Fall ist nicht von Interesse.

[16] $t_a = \frac{\lambda+\gamma_2}{\gamma_3}$, $t_b = -\frac{\lambda\kappa_1+\gamma_1}{\gamma_3}$ liefert (71). Eine Spezialisierung von λ bringt keine weitere Vereinfachung.

Satz 10. *Die einzigen vierparametrigen Bricardbewegungen haben die Normalformen* (70) *und* (72).

(a) *Im Fall* 4a *werden alle Punkte des Gangraumes auf Punktgrenzkugeln geführt, die Punkte einer vollisotropen Ebene* ν *sogar auf isotropen Ebenen (die wir als Grenzfälle von Punktgrenzkugeln betrachten). Bezeichnet* δ *den Abstand eines Punktes von dieser Ebene* ν *und* R *den Radius der ihm zugehörigen Bahnsphäre, so gilt:*

$$\delta \cdot R = -\frac{\gamma_2}{2}. \tag{73}$$

Besitzen zwei Bewegungsvorgänge des Typs 4a *dieselben Invarianten* γ_1, γ_2, *so sind sie zueinander konjugiert.*

(b) *Im Fall* 4b *werden alle Punkte des Gangraumes auf kongruenten Punktgrenzkugeln geführt. Die Invariante* γ_3 *bestimmt den Radius der Bahnkugeln:* $R = -\frac{\gamma_3}{2}$. *Die andere Invariante* κ_1 *läßt folgende Deutung zu: Sind* P_1, P_2 *zwei Punkte des Gangraumes mit dem isotropen Abstand* $\delta(P_1, P_2) = \overline{P_1P_2}$, *so sind die zugehörigen Bahnsphären* Φ_1, Φ_2 *schiebungsgleich. Für den Betrag* $v(\Phi_1, \Phi_2)$ *eines Schiebvektors, der* Φ_1 *in* Φ_2 *überführt, gilt*

$$2\delta(P_1, P_2) + v(\Phi_1, \Phi_2) = \kappa_1. \tag{74}$$

Besitzen zwei Bewegungsvorgänge des Typs 4b *dieselben Invarianten* γ_3, κ_1, *so sind sie zueinander konjugiert.*

References

[1] BOREL, E.: Mémoire sur les déplacements à trajectoires sphériques, *Mém. savants étrangers (2)* Paris **33** (1908), 1-128.

[2] BRICARD, R.: Sur un déplacement remarquable, *Comptes rendus des Séances, séance du 30 nov.* 1896.

[3] BRICARD, R.: Mémoire sur les déplacements à trajéctoires spheriques. *Journal de l'école polytéchnique, II^e série, 11^e cahier*, Paris 1906, 1-93.

[4] BRAUNER, H.: Geometrie des zweifach isotropen Raumes I, *J. Reine Angew. Math.* **224** (1966), 118—146.

[5] BRAUNER, H.: Geometrie des zweifach isotropen Raumes II, *J. Reine Angew. Math.* **226** (1967), 132—158.

[6] BRAUNER, H.: Geometrie des zweifach isotropen Raumes III, *J. Reine Angew. Math.* **228** (1967), 38–70.

[7] DARBOUX, G.: Sur le déplacement d'une figure invariable, *Comptes rendus Paris* **92** (1881), 118–1221.

[8] DUPORCQ, E.: Sur le déplacement le plus générale d'une droite dont tous les points décrivent des trajéctoires sphériques, *Journal de Math. (5^e série), tôme IV, fasc. II*, Paris, 1898.

[9] KOENIGS, G.: Leçons de Cinématique, Libr. Scient. A. Hermann, Paris (1897).

[10] LANG, J.: Zur Kinematik des Flaggenraumes, *Journ. of Geometry* 29 (1987), 140 - 155.

[11] LANG, J.: Einparametrige Zwangläufe des zweifach isotropen Raumes, *Ber. d. Math.-Stat. Sektion, Forschungszentrum Graz*, 297 (1989) 1–53.

[12] LANG, J.: Bewegungsvorgänge des Flaggenraumes mit sphärischen Bahnen. Ein Übertragungsprinzip. *Journ. of Geometry* (im Druck).

[13] MANNHEIM, A.: Propriétées relatives aux trajectories des points d'une figure de forme invariable, *Comptes rendus Paris* 76 (1873), 635—638.

[14] RÖSCHEL, O.: Zur Kinematik der isotropen Ebene I, *Journ. of Geometry* 21 (1983), 146—156.

[15] RÖSCHEL, O.: Zur Kinematik der isotropen Ebene II, *Journ. of Geometry* 24 (1985), 112—122.

[16] RÖSCHEL, O.: Darboux- und Bricard-Bewegungen im Flaggenraum, *Journal of Geom.* 28 (1987), 189–196.

[17] SACHS, H.: Lehrbuch der ebenen isotropen Geometrie, Vieweg-Verlag, Wiesbaden, 1987.

[18] SACHS, H.: Geometrie des Flaggenraumes, Vieweg-Verlag, Wiesbaden, 1992.

[19] SCHÖNFLIES, A.: Geometrie der Bewegungen in synthetischer Darstellung, Teubner, Leipzig, 1886.

[20] VOGLER, H.: Der Satz von A. Mannheim und A. Schoenflies in der isotropen Kinematik, *Ber. d. Math.-Stat. Sektion, Forschungszentrum Graz*, 306 (1989), 1–14.

[21] VOGLER, H.: Über Affinzwangläufe, bei denen alle Punkte einer Geraden ebene Bahnen durchlaufen, *Vortragsauszüge des 11. Kolloquiums über Differentialgeomtrie*, Darmstadt 1986, 44 – 57.

[22] VOGLER, H.: Zwangläufe mit sphärischen Bahnen (in Vorbereitung).