Mathematica Pannonica
3/2 (1992), 29 – 41

S–METRISCHE ZUSAMMENHÄNGE IN ISOTROPEN MANNIGFALTIGKEITEN

Walter O. **Vogel**

Mathematisches Institut II, Universität, D–7500 Karlsruhe, Englerstraße 2, Deutschland.

Herrn Professor Dr. Hans Sachs zum fünfzigsten Geburtstag gewidmet.

Received January 1992

AMS Subject Classification: 53 B 05, 53 B 30; 53 C 50

Keywords: Isotropic manifolds, singular Riemannian metrics, special linear connections, constant curvature connections.

Abstract: In this paper we study some properties of symmetric and quasisymmetric S–metric connections in an isotropic manifold (M, g). Let $\mathcal{X}_0M$ be the set of the isotropic vector fields on M. A linear connection ∇ is called a S–metric connection if $\nabla_{Z_0} g = 0$, $Z_0 \in \mathcal{X}_0 M$. After some preliminaries we investigate the problem of existence and uniqueness of S–metric connections in M, and consider connections which have constant curvature K. For $\dim M \geq 3$ it is shown that M admits *a* symmetric S–metric connection with constant curvature $K \neq 0$ iff the metric tensor g is absolutely reducible. The quasisymmetric S–metric connection with curvature $K = 0$ is also an isotropic connection if g is absolutely reducible and semidefinite. Finally, we determine the components of the symmetric S–metric connections with constant curvature in special coordinate systems.

1. Einleitung

Es seien M eine n–dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und g ein zweifach kovariantes symmetrisches Tensorfeld auf M, beide von der Klasse C^∞. g heißt eine *r–fach singuläre Riemannsche Metrik* auf M oder eine *Riemannsche Metrik vom Defekt r*, wenn rang $g = n - r$ mit $1 \leq r \leq n$, $r = \text{const}$, auf M. Wir nennen $M^{n(r)} \doteq (M, g)$ eine *r–fach isotrope Mannigfaltigkeit* oder eine *isotrope Mannigfaltigkeit vom Defekt r*. Im folgenden schließen wir isotrope Mannigfaltigkeiten vom Defekt n aus. Sie sind als Untermannigfaltigkeiten einer Mannigfaltigkeit mit regulärer Metrik von Bedeutung.

Es bezeichne $S_p \subset T_pM$ den Nullraum der Bilinearform $g_p = g(p)$ im Tangentialraum T_pM. $S : p \mapsto S_p$ ist eine r–dimensionale Distribution auf M. Es seien weiter $\mathcal{X}M$ die Menge der differenzierbaren Vektorfelder auf M und $\mathcal{X}_0M = \{X \in \mathcal{X}M \mid X(p) \in S_p, p \in M\}$ die Menge der differenzierbaren isotropen Vektorfelder, ferner $\mathcal{F}M$ die Menge der differenzierbaren Funktionen auf M.

Für die Komponenten g_{ij} von g in einem lokalen Koordinatensystem gilt rang $(g_{ij}) = n - r$. g heißt *reduzibel singulär*, wenn jeder Punkt $p \in M$ eine Karte besitzt, so daß[1]

$$(1) \qquad (g_{ij}(x^k)) = \begin{pmatrix} g_{ab}(x^k) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \det(g_{ab}) \neq 0.$$

g ist genau dann reduzibel singulär, wenn[2]

$$(2) \qquad [X_0, Y_0] \in \mathcal{X}_0M; \quad X_0, Y_0 \in \mathcal{X}_0M.$$

S ist dann eine involutive Distribution. g heißt *absolut reduzibel singulär*, wenn jeder Punkt $p \in M$ eine Karte besitzt, so daß (1) und $g_{ab} = g_{ab}(x^c)$ gilt. g ist genau dann absolut reduzibel, wenn die Lie–Ableitung von g bezüglich jedes isotropen Vektorfeldes Z_0 verschwindet[3]:

$$(3) \qquad \begin{aligned} (L_{Z_0}g)(X,Y) &= Z_0(g(X,Y)) - g([Z_0,X],Y) - g(X,[Z_0,Y]) = 0; \\ & X, Y \in \mathcal{X}M, \quad Z_0 \in \mathcal{X}_0M. \end{aligned}$$

[1]Für die verwendeten Indizes soll im folgenden gelten: $i,j,k,l,m \in \{1,\dots,n\}$; $a,b,c,d \in \{1,\dots,n-r\}$; $A,B,C,D \in \{n-r+1,\dots,n\}$.

[2]Bortolotti [1], p.543.

[3]Bortolotti [1], p.545; Dautcourt [3], p.320.

2. Metrische Zusammenhänge

Ein *metrischer* oder ein *Riemannscher Zusammenhang* ist ein linearer Zusammenhang ∇, für den die kovariante Ableitung des Metriktensors g verschwindet: $\nabla_Z g = 0$, $Z \in \mathcal{X}M$. Metrische Zusammenhänge in isotropen Mannigfaltigkeiten sind schon mehrfach untersucht worden, z. B. Bortolotti [2], Jankiewicz [4], Vogel [6], Oproiu [5]. ∇ ist ein *symmetrischer* Zusammenhang, wenn seine Torsion verschwindet:

$$(4) \qquad T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0; \quad X, Y \in \mathcal{X}M.$$

Die Existenz eines symmetrischen metrischen Zusammenhangs, d. h. eines Zusammenhangs von Levi–Civita, in $M^{n(r)}$ schränkt die Metrik g stark ein. Ein solcher Zusammenhang existiert genau dann, wenn g absolut reduzibel ist[4]. Er ist, anders als im regulären Fall rang $g = n$, durch g allein nicht eindeutig bestimmt.

In Abschwächung von (4) nennen wir einen Zusammenhang *quasisymmetrisch*, wenn

$$(5) \qquad T(X, Y) \in \mathcal{X}_0 M; \quad X, Y \in \mathcal{X}M.$$

Quasisymmetrische lineare Zusammenhänge in $M^{n(r)}$ sind von Vogel [7] untersucht worden. Von den Ergebnissen sei erwähnt, daß für die Existenz eines quasisymmetrischen metrischen Zusammenhangs wieder die absolute Reduzibilität von g notwendig und hinreichend ist. Der Zusammenhang ist *quasieindeutig*, d. h. eindeutig bis auf ein isotropes Vektorfeld. Sind ∇, $\overset{0}{\nabla}$ zwei solche Zusammenhänge in $M^{n(r)}$, so gilt

$$\nabla_X Y = \overset{0}{\nabla}_X Y + I(X, Y); \quad I(X, Y) \in \mathcal{X}_0 M.$$

3. S–metrische Zusammenhänge

Ein linearer Zusammenhang ∇ heißt *S–metrisch*, wenn die kovariante Ableitung des Metriktensors g bezüglich jedes isotropen Vektorfeldes Z_0 verschwindet: $\nabla_{Z_0} g = 0$, ausführlich

$$(6) \qquad \begin{gathered} (\nabla_{Z_0} g)(X, Y) = Z_0\,(g(X, Y)) - g(\nabla_{Z_0} X, Y) - g(X, \nabla_{Z_0} Y) = 0; \\ X, Y \in \mathcal{X}M, \quad Z_0 \in \mathcal{X}_0 M. \end{gathered}$$

[4] Vogel [6], p.107.

Während identisch $(\nabla_Z g)(X_0, Y_0) = 0$, sind noch die Zusammenhänge mit

(7) $(\nabla_Z g)(X_0, Y) = -g(\nabla_Z X_0, Y) = 0; \quad Y, Z \in \mathcal{X}M, \; X_0 \in \mathcal{X}_0 M$

von Interesse, die sogenannten *isotropen* Zusammenhänge[5]. Wegen

$$\nabla_Z X_0 \in \mathcal{X}_0 M; \quad Z \in \mathcal{X}M, \; X_0 \in \mathcal{X}_0 M$$

haben diese Zusammenhänge die Eigenschaft, daß die kovariante Ableitung jedes isotropen Vektorfeldes wieder ein isotropes Vektorfeld ist. Wie schon in [7] gezeigt, existiert ein quasisymmetrischer S–metrischer Zusammenhang *(QS–Zusammenhang)* in $M^{n(r)}$ genau dann, wenn g reduzibel singulär ist. Das gleiche gilt für quasisymmetrische isotrope Zusammenhänge. S–metrische und isotrope Zusammenhänge verdienen ein gewisses Interesse, da jede isotrope Mannigfaltigkeit $M^{n(1)}$ vom Defekt 1 reduzibel singulär ist. Für $n = 3$ sind diese Mannigfaltigkeiten als Untermannigfaltigkeiten der Kodimension 1 in einer 4–dimensionalen Raumzeit von Bedeutung.

Zur lokalen Darstellung verwenden wir ein Koordinatensystem, in dem (1) für die Komponenten des Metriktensors g gilt, ein sog. *σ–Koordinatensystem.* Bezeichnet man die Komponenten des linearen Zusammenhangs mit Λ^i_{jk}, so gilt nach (6) für einen S–metrischen Zusammenhang

(8) $$2\Gamma_{bc|C} + \Lambda^a_{Cb} g_{ac} + \Lambda^a_{Cc} g_{ba} = 0, \quad \Lambda^a_{BC} = 0,$$

nach (7) für einen isotropen Zusammenhang

(9) $$\Lambda^a_{jC} = 0$$

und nach (5) für einen quasisymmetrischen Zusammenhang

(10) $$\Lambda^a_{jk} - \Lambda^a_{kj} = 0.$$

Dabei sind $\Gamma_{ij|k} = \frac{1}{2}\left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\right)$ die *Christoffelsymbole 1. Art* von g_{ij}.

Um zu einer Aussage über die Eindeutigkeit der QS–Zusammenhänge zu kommen, formen wir (6) mit Hilfe der Lie-Ableitung (3) um, beachten dabei (5) und erhalten

(11) $$(L_{Z_0} g)(X, Y) - g(\nabla_X Z_0, Y) - g(X, \nabla_Y Z_0) = 0.$$

[5] [7], p.16.

Alle 3 Terme sind jetzt $\mathcal{F}M$–linear in Z_0, X, Y, im Gegensatz zu den 3 Termen in (6).

Definition. ∇ heißt ein *spezieller QS–Zusammenhang*, wenn

$$(12)\qquad \begin{gathered} g(\nabla_X Z_0, Y) = \tfrac{1}{2}(L_{Z_0}g)(X,Y), \quad T(X,Y) \in \mathcal{X}_0M; \\ X, Y \in \mathcal{X}M, \quad Z_0 \in \mathcal{X}_0M. \end{gathered}$$

In einem σ–Koordinatensystem gilt für die Komponenten eines speziellen QS–Zusammenhangs nach (8), (10), (12)

$$(13)\qquad \Lambda^a_{bc} = \Lambda^a_{cb}, \quad \Lambda^a_{bC} = \Lambda^a_{Cb} = -\Gamma_{bc|C}g^{ca}, \quad \Lambda^a_{BC} = \Lambda^a_{CB} = 0.$$

Dabei sind g^{ca} die Elemente der inversen Matrix zu (g_{ab}). Λ^a_{bc} und die nicht genannten Komponenten Λ^A_{jk} können beliebig gewählt werden.

Aus (12) ergibt sich, daß $\nabla_X Z_0$, die kovariante Ableitung eines isotropen Vektorfeldes, bis auf ein isotropes Vektorfeld eindeutig bestimmt ist. Um den Zusammenhang ∇ genauer zu fixieren, hat man noch gewisse Freiheiten. Wir betrachten z. B. eine zur involutiven Distribution S komplementäre Distribution $H : p \mapsto H_p$, die nicht involutiv sein muß. Eine solche Distribution H existiert immer und kann z. B. definiert werden als das orthogonale Komplement zu S bezüglich einer beliebigen auf M erklärten positiv definiten (regulären) Riemannschen Metrik. Es sei $\mathcal{X}_1M$ die Menge der *horizontalen* Vektorfelder, d. h. $\mathcal{X}_1M = \{X \in \mathcal{X}M | X(p) \in H_p,\, p \in M\}$. Für den speziellen QS–Zusammenhang (12) fordern wir noch

$$(14)\qquad \nabla_{X_1}Y_1 \in \mathcal{X}_1M,$$

$$(15)\qquad (\nabla_{Z_1}g)(X_1, Y_1) = Z_1(g(X_1,Y_1)) - g(\nabla_{Z_1}X_1, Y_1) - g(X_1, \nabla_{Z_1}Y_1) = 0;$$
$$X_1, Y_1, Z_1 \in \mathcal{X}_1M,$$

d. h. die Einschränkung von ∇ auf H sei ein quasisymmetrischer metrischer Zusammenhang. Aus (15) und der Quasisymmetrie ergibt sich nach bekannten Regeln die Formel von Koszul

$$(16)\qquad \begin{aligned} g(\nabla_{X_1}Y_1, Z_1) = \frac{1}{2}\Big(& X_1(g(Y_1,Z_1)) + Y_1(g(X_1,Z_1)) - Z_1(g(X_1,Y_1)) \\ & + g(Z_1,[X_1,Y_1]) - g(X_1,[Y_1,Z_1]) - g(Y_1,[X_1,Z_1])\Big). \end{aligned}$$

Umgekehrt folgt aus (14) und (16), daß $\nabla_{X_1}Y_1$ eindeutig bestimmt ist und die Eigenschaften eines auf H quasisymmetrischen metrischen Zusammenhangs besitzt.

Ein Zusammenhang, der (12), (14), (15) genügt, heiße ein *spezieller QSH-Zusammenhang.* Aus (5), (14) und

$$T(X_1, Y_1) = \nabla_{X_1} Y_1 - \nabla_{Y_1} X_1 - [X_1, Y_1]$$

folgt $[X_1, Y_1] \in \mathcal{X}_1 M$, wenn $T(X_1, Y_1) = 0$, und umgekehrt. Das heißt, ein spezieller QSH-Zusammenhang ist auf H genau dann symmetrisch, wenn H eine involutive Distribution ist.

4. Existenz und Eindeutigkeit

Zum Nachweis der Existenz konstruieren wir zunächst in einer Umgebung jedes Punktes von M einen Zusammenhang, der (12), (14), (15) erfüllt. Dazu verwenden wir für den betrachteten Punkt p_0 ein σ-Koordinatensystem (U_0, φ_0) und wählen für die Komponenten Λ^i_{jk} außer (13) noch

$$\Lambda^A_{bC} = \Lambda^A_{Cb} = 0, \quad \Lambda^A_{BC} = \Lambda^A_{CB} = 0. \tag{17}$$

Sind $X_1 = \xi^i_1 \partial_i$, $Y_1 = \eta^i_1 \partial_i$, $Z_1 = \zeta^i_1 \partial_i$ die Darstellungen der Vektorfelder X_1, Y_1, Z_1 in U_0, so lautet (14)

$$\left(\xi^j_1\, \partial_j\, \eta^i_1 + \Lambda^i_{jk}\, \xi^j_1\, \eta^k_1\right) \partial_i \in \mathcal{X}_1 U_0 \tag{18}$$

und (16)

$$\Lambda^a_{jk} g_{ac}\, \xi^j_1\, \eta^k_1\, \zeta^c_1 = \Gamma_{jk|l}\, \xi^j_1\, \eta^k_1 \zeta^l_1. \tag{19}$$

Wir zeigen, daß sämtliche Komponenten Λ^i_{jk} in U_0 durch (13), (17), (18), (19) eindeutig bestimmt sind. Die Unterräume S_p, $p \in U_0$, werden bei Verwendung eines σ-Koordinatensystems von den Basisvektoren $\partial_{n-r+1}, \ldots, \partial_n$ aufgespannt, und die Unterräume H_p, $p \in U_0$, mögen von den Vektoren $e_1, \ldots, e_{n-r}$ aufgespannt werden. Dabei lassen sich die e_a wegen der Komplementarität von S_p, H_p durch die Basisvektoren ∂_i von $T_p M$ in der Form darstellen

$$e_a = \partial_a + \lambda^A_a \partial_A.$$

Für die Komponenten ξ^A_1 eines Vektors $X_1 = \xi^i_1 \partial_i \in \mathcal{X}_1 U_0$ ist dann $\xi^A_1 = \lambda^A_a \xi^a_1$ zu setzen. Aus (18), (19) ergeben sich, unter Verwendung von (13), (17), die noch fehlenden Komponenten $\Lambda^a_{bc}, \Lambda^A_{bc}$ zu

$$\begin{aligned} \Lambda^a_{bc} = \Lambda^a_{cb} &= \Gamma_{bc|d} g^{da} + \Gamma_{bc|D} \lambda^D_d g^{da}, \\ \Lambda^A_{bc} &= \left(\Gamma_{bc|d} + \Gamma_{bc|D} \lambda^D_d - \Gamma_{bd|D} \lambda^D_c - \Gamma_{cd|D} \lambda^D_b\right) \lambda^A_a g^{da} \\ &\quad - \partial_b \lambda^A_c - \lambda^B_b \partial_B \lambda^A_c. \end{aligned} \tag{20}$$

Ist H nicht involutiv, so ist nach einer früheren Bemerkung $\Lambda^A_{bc} \neq \Lambda^A_{cb}$.

Wie gezeigt, gibt es eine offene Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ von $M^{n(r)}$ derart, daß auf jeder Umgebung U_α ein spezieller QSH–Zusammenhang $\overset{\alpha}{\nabla}{}'$ erklärt ist. Einen Zusammenhang in $M^{n(r)}$ erhält man mittels Zerlegung der Eins $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$, Tr $\varphi_\alpha \subset U_\alpha$. Man definiert zunächst für jedes α die Abbildung $\overset{\alpha}{\nabla}$: $\mathcal{X}M \times \mathcal{X}M \to \mathcal{X}M$ durch

$$\overset{\alpha}{\nabla}_X Y_{|p} = \varphi_\alpha(p)\, \overset{\alpha}{\nabla}{}'_X Y_{|p} \quad \text{für } p \in U_\alpha, \qquad \overset{\alpha}{\nabla}_X Y_{|p} = 0 \quad \text{für } p \notin U_\alpha.$$

Man sieht leicht, daß $\nabla : \mathcal{X}M \times \mathcal{X}M \to \mathcal{X}M$ mit $\nabla_X Y_{|p} = \sum_\alpha \overset{\alpha}{\nabla}_X Y_{|p}$ ein linearer Zusammenhang ist, der (12), (14), (15) erfüllt, d. h. ∇ ist ein spezieller QSH–Zusammenhang.

Zur Frage nach der Eindeutigkeit betrachten wir zwei Zusammenhänge $\nabla, \overset{\circ}{\nabla}$, die (12), (14), (15) genügen. Setzt man

$$\nabla_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + I(X,Y),$$

so ist $I(X,Y)$ ein in beiden Argumenten $\mathcal{F}M$–lineares isotropes Vektorfeld

$$I(X,Y) \in \mathcal{X}_0 M; \quad X,Y \in \mathcal{X}M, \tag{21}$$

für das noch

$$I(X_1,Y_1) = 0; \quad X_1,Y_1 \in \mathcal{X}_1 M \tag{22}$$

gilt. Ist umgekehrt $\overset{\circ}{\nabla}$ ein spezieller QSH–Zusammenhang und $I(X,Y)$ ein $\mathcal{F}M$–lineares Vektorfeld mit (21), (22), so ist auch ∇ ein spezieller QSH–Zusammenhang.

Dieser Zusammenhang kann mit Hilfe von r linear unabhängigen isotropen Vektorfeldern $Z_{(n-r+1)}, \ldots, Z_{(n)}$, die gegeben sind, sogar eindeutig gemacht werden. Wie man leicht zeigt, gibt es genau einen speziellen QSH–Zusammenhang ∇, für den $T(X_0,Y_1) = 0$, $X_0 \in \mathcal{X}_0 M$, $Y_1 \in \mathcal{X}_1 M$ und

$$\nabla_X Z_{(A)} \in \mathcal{X}_1 M; \quad X \in \mathcal{X}M.$$

∇ ist genau dann ein symmetrischer Zusammenhang, wenn H eine involutive Distribution ist und

$$[Z_{(A)}, Z_{(B)}] \in \mathcal{X}_1 M.$$

5. S–metrische Zusammenhänge mit konstanter Krümmung $K \neq 0$

Für einen symmetrischen S–metrischen Zusammenhang (*SS–Zusammenhang*) beweisen wir

Satz 1. *Sei $n - r > 1$ oder $r > 1$. Ist ∇ ein SS–Zusammenhang mit konstanter Krümmung $K \neq 0$, so ist ∇ auch ein isotroper Zusammenhang und g absolut reduzibel.*

Beweis. Es sei $R(X,Y,Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$ die Krümmung des Zusammenhangs ∇ und $R(X,Y,Z,\omega) = \omega(R(X,Y,Z))$ der dreifach kovariante, einfach kontravariante Krümmungstensor. Ist ∇ symmetrisch, so besteht die Bianchi-Identität

$$(23)\quad \begin{gathered}(\nabla_U R)(X,Y,Z,\omega) + (\nabla_X R)(Y,U,Z,\omega) + (\nabla_Y R)(U,X,Z,\omega) = 0;\\ U,X,Y,Z \in \mathcal{X}M, \quad \omega \in \mathcal{X}^*M,\end{gathered}$$

$\mathcal{X}^*M$ die Menge der differenzierbaren Kovektorfelder auf M. Wir setzen jetzt voraus, daß ∇ von konstanter Krümmung K sei:

$$(24)\qquad R(X,Y,Z,\omega) = K \cdot \big(\omega(X)g(Y,Z) - \omega(Y)g(X,Z)\big).$$

Nach einer kleinen Rechnung erhält man aus (23), (24)

$$(25)\qquad \begin{aligned} K \cdot \Big\{ &\omega(X)\big((\nabla_U g)(Y,Z) - (\nabla_Y g)(U,Z)\big) \\ &+ \omega(Y)\big((\nabla_X g)(U,Z) - (\nabla_U g)(X,Z)\big) \\ &+ \omega(U)\big((\nabla_Y g)(X,Z) - (\nabla_X g)(Y,Z)\big)\Big\} = 0. \end{aligned}$$

Mit $K \neq 0$ und $X = X_0 \in \mathcal{X}_0 M$, $Y = Y_0 \in \mathcal{X}_0 M$ wird

$$\begin{aligned} &\omega(X_0)\,((\nabla_U g)(Y_0,Z) - (\nabla_{Y_0} g)(U,Z)) \\ &+ \omega(Y_0)\,((\nabla_{X_0} g)(U,Z) - (\nabla_U g)(X_0,Z)) \\ &+ \omega(U)\,((\nabla_{Y_0} g)(X_0,Z) - (\nabla_{X_0} g)(Y_0,Z)) = 0. \end{aligned}$$

Für S–metrische Zusammenhänge ist $\nabla_{X_0} g = \nabla_{Y_0} g = 0$ und es bleibt

$$\omega(X_0)(\nabla_U g)(Y_0,Z) - \omega(Y_0)(\nabla_U g)(X_0,Z) = 0$$

und nach einer kleinen Umformung

$$-\omega(X_0)g(\nabla_U Y_0, Z) + \omega(Y_0)g(\nabla_U X_0, Z) = 0.$$

Durch Verjüngung über ω, Y erhält man hieraus $(-1+r)g(\nabla_U X_0, Z) = 0$, für $r > 1$ also

$$g(\nabla_U X_0, Z) = 0. \tag{26}$$

Setzt man in (25) $K \neq 0$, $U = U_0 \in \mathcal{X}_0 M$, $\nabla_{U_0} g = 0$, so wird

$$\begin{aligned} -\omega(X)(\nabla_Y g)(U_0, Z) + \omega(Y)(\nabla_X g)(U_0, Z) & \\ + \,\omega(U_0)\left((\nabla_Y g)(X, Z) - (\nabla_X g)(Y, Z)\right) &= 0, \end{aligned}$$

und nach einer kleinen Umformung

$$\begin{aligned} \omega(X)g(\nabla_Y U_0, Z) - \omega(Y)g(\nabla_X U_0, Z) & \\ + \,\omega(U_0)\left((\nabla_Y g)(X, Z) - (\nabla_X g)(Y, Z)\right) &= 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Nun sei $\omega = \omega_0 \in \mathcal{X}_0^* M$ ein isotropes Kovektorfeld, d. h. $\omega_0(U_0) = 0$. Dann geht (27) über in

$$\omega_0(X)g(\nabla_Y U_0, Z) - \omega_0(Y)g(\nabla_X U_0, Z) = 0.$$

Hieraus erhält man $(1-(n-r))\, g(\nabla_X U_0, Z) = 0$, wenn man über ω, Y verjüngt, und für $n - r > 1$ wieder (26). ∇ ist nach (7) ein isotroper Zusammenhang. Besitzt $M^{n(r)}$ einen quasisymmetrischen S–metrischen isotropen Zusammenhang, so ist nach (11) $L_{Z_0} g = 0$ und nach (3) g absolut reduzibel singulär. $\diamondsuit$

In einem Koordinatensystem lautet (24)

$$R^i_{jkl} = \partial_j \Lambda^i_{kl} - \partial_k \Lambda^i_{jl} + \Lambda^i_{jm}\Lambda^m_{kl} - \Lambda^i_{km}\Lambda^m_{jl} = K\left(\delta^i_j g_{kl} - \delta^i_k g_{jl}\right), \tag{28}$$

wo R^i_{jkl} die Komponenten des Krümmungstensors R sind. Ist $n - r > 1$ oder $r > 1$, so ist g nach Satz 1 absolut reduzibel. Für die Komponenten eines SS–Zusammenhangs mit konstanter Krümmung $K \neq 0$ zeigt man dann in einem geeigneten σ –Koordinatensystem

$$\Lambda^i_{bc} = K g_{bc} x^i\,, \quad \Lambda^i_{jC} = \Lambda^i_{Cj} = 0, \tag{29}$$

wobei die Komponenten des Metriktensors den Bedingungen

$$g_{iB} = 0, \quad \partial_A g_{bc} = 0, \quad \partial_a g_{bc} - \partial_b g_{ac} + \left(g_{ad} g_{bc} - g_{bd} g_{ac}\right) K x^d = 0 \tag{30}$$

genügen. Von den in (30) stehenden Differentialgleichungen lassen sich leicht sämtliche *isothermen* Lösungen $g_{bc} = F^{-1}\left(x^i\right)\delta_{bc}$ angeben. Ist der

Zusammenhang ∇ sogar metrisch, so kommt noch $\Lambda^a_{bc} = \Gamma_{bc|d}g^{da}$ hinzu. Setzt man dies in (29.1) ein, so ergibt sich eine zusätzliche Bedingung für g_{bc}, nämlich

$$K g_{bc} g_{ad} x^a = \Gamma_{bc|d}. \tag{31}$$

Mit (31) sind die Differentialgleichungen in (30) von selbst erfüllt.

Für $n - r = 1$, $r = 1$, d. h. $n = 2$, $M^{2(1)}$, muß g nicht absolut reduzibel sein. Es lassen sich leicht sämtliche Komponenten Λ^i_{jk}, g_{ij} angeben. Ist g absolut reduzibel, so ist ∇ auch ein isotroper Zusammenhang, und umgekehrt. In diesem Fall gelten (29), (30.1), (30.2) für $r = 1$, $n = 2$. Die Differentialgleichung (30.3) ist identisch erfüllt.

6. S–metrische Zusammenhänge mit verschwindender Krümmung K

Ist ∇ ein spezieller QS–Zusammenhang und g absolut reduzibel, so ist nach (3), (12) ∇ auch ein isotroper Zusammenhang. Wir beweisen

Satz 2. *Sei ∇ ein QS-Zusammenhang mit verschwindender Krümmung K, und sei g absolut reduzibel und semidefinit. Dann ist ∇ auch ein isotroper Zusammenhang.*

Beweis. Für ∇ gelten nach (6) $\nabla_{Z_0} g = 0$, nach (5) $T(X, Y) \in \mathcal{X}_0 M$ und für g nach (3) $L_{Z_0} g = 0$. Nach einigen Umformungen erhält man hieraus

$$g(\nabla_X Z_0, Y) + g(X, \nabla_Y Z_0) = 0; \quad X, Y \in \mathcal{X}M, \ Z_0 \in \mathcal{X}_0 M \tag{32}$$

und speziell für $X = Y$

$$g(\nabla_X Z_0, X) = 0. \tag{33}$$

Durch Ableiten nach Z_0 entsteht

$$(\nabla_{Z_0} g)(\nabla_X Z_0, X) + g(\nabla_{Z_0} \nabla_X Z_0, X) + g(\nabla_X Z_0, \nabla_{Z_0} X) = 0,$$

und mit $\nabla_{Z_0} g = 0$ wird

$$g\,(\nabla_{Z_0} \nabla_X Z_0, X) + g\,(\nabla_X Z_0, \nabla_{Z_0} X) = 0. \tag{34}$$

Da die Krümmung verschwindet, ist

$$\nabla_{Z_0} \nabla_X Z_0 - \nabla_X \nabla_{Z_0} Z_0 - \nabla_{[Z_0, X]} Z_0 = 0.$$

Damit geht (34) über in

$$(35)\quad g\left(\nabla_X\nabla_{Z_0}Z_0, X\right) + g\left(\nabla_{[Z_0,X]}Z_0, X\right) + g\left(\nabla_X Z_0, \nabla_{Z_0}X\right) = 0.$$

Setzt man in (32) $[Z_0, X]$ an Stelle von X, so erhält man

$$g\left(\nabla_{[Z_0,X]}Z_0, Y\right) + g\left([Z_0, X], \nabla_Y Z_0\right) = 0$$

und speziell für $X = Y$

$$(36)\qquad g\left(\nabla_{[Z_0,X]}Z_0, X\right) + g\left([Z_0, X], \nabla_X Z_0\right) = 0.$$

Nach (35), (36) wird

$$g(\nabla_X\nabla_{Z_0}Z_0, X) + g\left(\nabla_X Z_0, \nabla_{Z_0}X - [Z_0, X]\right) = 0.$$

Es ist $\nabla_{Z_0}X - \nabla_X Z_0 - [Z_0, X] = T(Z_0, X) \in \mathcal{X}_0 M$, so daß

$$(37)\qquad g\left(\nabla_X\nabla_{Z_0}Z_0, X\right) + g\left(\nabla_X Z_0, \nabla_X Z_0\right) = 0.$$

Aus (32) folgt für $Y = Z_0$, daß $V_0 := \nabla_{Z_0}Z_0 \in \mathcal{X}_0 M$. Nach (33) ist $g\left(\nabla_X V_0, X\right) = 0$, also

$$g(\nabla_X\nabla_{Z_0}Z_0, X) = 0,$$

und von (37) bleibt noch

$$g(\nabla_X Z_0, \nabla_X Z_0) = 0.$$

Wegen der Semidefinitheit von g ist $\nabla_X Z_0 \in \mathcal{X}_0 M$ und damit ∇ ein isotroper Zusammenhang. $\diamondsuit$

Im folgenden sei $n-r \geq 1$, $r \geq 1$ und ∇ ein SS-Zusammenhang mit verschwindender Krümmung K. In einem Koordinatensystem gilt (28) mit $K = 0$. Leider gibt es im allgemeinen kein σ-Koordinatensystem, in dem sämtliche Komponenten des Zusammenhangs verschwinden. Wie man leicht sieht, gibt es ein σ-Koordinatensystem (U, φ), $0 \in \varphi(U)$, in dem außer $g_{iB} = 0$ noch

$$(38)\qquad \Lambda^a_{bc}\big|_{x^A=0} = 0, \quad \Lambda^A_{jk} = 0$$

ist. Durch eine Koordinatentransformation $\overline{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ der Gestalt $\overline{x}^a = \psi^a(x^b, x^B)$, $\overline{x}^A = \psi^A(x^B)$, wo ψ^a, ψ^A einem Differentialgleichungssystem

2. Ordnung genügen, läßt sich erreichen, daß im neuen Koordinatensystem $(\overline{U},\overline{\varphi})$ nun $\overline{\Lambda}^{i}_{jk}=0$ gilt. Dabei können die Anfangsbedingungen

$$\overline{x}^{i}(0)=0, \quad \frac{\partial \overline{x}^{i}}{\partial x^{j}}(0)=\delta^{i}_{j} \tag{39}$$

gewählt werden. Im allgemeinen gilt nicht $\overline{g}_{iB}=0$, d. h. $(\overline{U},\overline{\varphi})$ ist kein σ–Koordinatensystem.

Ausgehend von $\overline{\Lambda}^{i}_{jk}=0$ berechnen sich die Komponenten Λ^{i}_{jk} im Koordinatensystem (U,φ) bekanntlich nach

$$\Lambda^{i}_{jk}=\frac{\partial^2\overline{x}^{l}}{\partial x^{j}\partial x^{k}}\frac{\partial x^{i}}{\partial \overline{x}^{l}}. \tag{40}$$

Wegen den Bedingungen (8.2), (38) für Λ^{i}_{jk} in (U,φ) und mit (39) ist $\overline{\varphi}\circ\varphi^{-1}$ von der Gestalt

$$\begin{aligned} \overline{x}^{a} &= x^{a}+\varphi^{a}_{B}(x^{b})x^{B} \\ \overline{x}^{A} &= x^{A}. \end{aligned} \tag{41}$$

Die Λ^{i}_{jk} in (40) werden damit zu

$$\Lambda^{a}_{bc}=\frac{\partial^2\varphi^{d}_{B}}{\partial x^{b}\partial x^{c}}x^{B}\frac{\partial x^{a}}{\partial \overline{x}^{d}}, \quad \Lambda^{a}_{bC}=\frac{\partial \varphi^{d}_{C}}{\partial x^{b}}\frac{\partial x^{a}}{\partial \overline{x}^{d}}, \quad \Lambda^{a}_{BC}=0, \quad \Lambda^{A}_{jk}=0. \tag{42}$$

In (U,φ) gelten für g_{ij}, Λ^{i}_{jk} die Beziehungen (1), (8.1), (10), (28) mit $K=0$, und (38). Daraus folgt nach einer kleinen Rechnung, daß die Komponenten g_{ab} des Metriktensors g von der Form sind

$$g_{ab}\left(x^{c},x^{C}\right)=G_{ABab}(x^{c})x^{A}x^{B}+G_{Aab}(x^{c})x^{A}+G_{ab}(x^{c}). \tag{43}$$

Setzt man nun (40), (41), (43) in (8.1) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} G_{Aab} &= G_{ad}\frac{\partial\varphi^{d}_{A}}{\partial x^{b}}+G_{bd}\frac{\partial\varphi^{d}_{A}}{\partial x^{a}}, \\ G_{ABab} &= \frac{1}{2}\,G_{cd}\left(\frac{\partial\varphi^{c}_{A}}{\partial x^{a}}\frac{\partial\varphi^{d}_{B}}{\partial x^{b}}+\frac{\partial\varphi^{c}_{B}}{\partial x^{a}}\frac{\partial\varphi^{d}_{A}}{\partial x^{b}}\right). \end{aligned} \tag{44}$$

Umgekehrt sind Λ^{i}_{jk} nach (41), (42) die Komponenten eines SS–Zusammenhangs mit $K=0$ in (U,φ), wenn die Komponenten g_{ij} des Metriktensors den Gleichungen (1), (43), (44) genügen.

Wir wollen noch zwei Folgerungen ziehen. Ist ∇ auch ein isotroper Zusammenhang, so ist nach (9) $\Lambda^a_{jC} = 0$, nach (41), (42) $\dfrac{\partial \varphi^d_C}{\partial x^b} = 0$ und $\Lambda^a_{bc} = 0$. Alle Komponenten Λ^i_{jk} verschwinden in (U, φ). Nach (43), (44) ist $g_{ab} = G_{ab}$, d. h. g ist absolut reduzibel.

Aus (44) folgt speziell

$$G_{AAaa} = G_{cd} \frac{\partial \varphi^c_A}{\partial x^a} \frac{\partial \varphi^d_A}{\partial x^a}. \tag{45}$$

Ist g absolut reduzibel und semidefinit, so ist $G_{AAaa} = 0$, $\dfrac{\partial \varphi^c_A}{\partial x^a} = 0$, nach (42) $\Lambda^a_{jC} = 0$ und nach (9) ∇ ein isotroper Zusammenhang. Damit ist Satz 2 für SS-Zusammenhänge nochmals bestätigt.

Literatur

[1] BORTOLOTTI, E.: Sulle forme differenziali quadratiche specializzate. *Atti Accad.naz.Lincei, Rend., Cl.Sci.fis.mat.natur.*, VI.Ser.**12** (1930), 541 - 547.

[2] BORTOLOTTI, E.: Calcolo assoluto rispetto a una forma differenziale quadratica specializzata. *Atti Accad.naz.Lincei, Rend., Cl.Sci.fis.mat.natur.*, VI.Ser.**13** (1931), 19 - 25.

[3] DAUTCOURT, G.: Zur Differentialgeometrie singulärer Riemannscher Räume. *Math.Nachrichten* **36** (1968), 311 - 322.

[4] JANKIEWICZ, C.: Sur les espaces riemanniens dégénérés. *Bull.Accad.Polon. Sci.Cl.III* **2** (1954), 301 - 304.

[5] OPROIU, V.: Degenerate Riemannian and degenerate conformal connexions. *An.Şt.Univ.„Al.I.Cuza"Jassy* **16** (1970), 357 - 376.

[6] VOGEL, W.O.: Über lineare Zusammenhänge in singulären Riemannschen Räumen. *Archiv.d.Math.* **16** (1965), 106 - 116.

[7] VOGEL, W.O.: Quasisymmetrische lineare Zusammenhänge in Mannigfaltigkeiten mit singulärer Riemannscher Metrik. *Berichte der Math.-stat. Sektion, Forschungszentrum Graz*, Bericht **224** (1984), 1 - 33.