

# DER HOMOGENE PARALLEL- TRIEB-MECHANISMUS

K. Wohlhart

*Institut für Mechanik, Technische Universität, Kopernikusgasse  
24, A-8010 Graz, Österreich.*

*Received March 1990*

*AMS Subject Classification: 53 A 17*

*Keywords: Räumliches Parallelogrammgelenk, Übertragungsfunktion*

**Zusammenfassung:** Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist ein räumlicher Mechanismus, bestehend aus vier starren Körpern, die über vier Parallelogrammgelenke so miteinander verbunden sind, daß eine geschlossene kinematische Kette entsteht. Ein Parallelogrammgelenk ist ein spezielles Viereck, das als Einzelgelenk aufgefaßt wird und die Kurzbezeichnung  $\Pi$  erhält. Ziel der Arbeit ist die Berechnung der drei Übertragungsfunktionen des homogenen  $4\Pi$ -Paralleltrieb-Mechanismus, der durch gleiche Gelenkdimensionen und gleiche Lageparameter der Gelenke in den Gliedkörpern gekennzeichnet ist.

## 1. Einleitung

Wegen der grundlegenden Bedeutung für die Roboter- bzw. die Manipulator-Technik waren die räumlichen Mechanismen (nullter Ordnung) in den letzten Jahren häufig Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchungen. Mit der Veröffentlichung der Arbeit von H. Y. Lee und Ch. G. Liang [2] haben diese Untersuchungen, soweit sie die Kinematik der räumlichen Mechanismen betreffen, einen vorläufigen Höhepunkt erreicht. Diesen beiden Autoren ist es erstmals gelungen, die Hauptübertragungsfunktion des allgemeinen, aus sieben Gliedern und sieben

Drehgelenken bestehenden 7R Mechanismus nullter Ordnung in der endgültigen Form anzugeben: Die gleich Null gesetzte Determinante einer  $8 \times 8$  Matrix führt auf eine in den Tangens des halben Eingangsbzw. des Ausgangswinkels algebraische Gleichung 16-ter Ordnung.

In den bekannt gewordenen Arbeiten über räumliche Mechanismen werden ausschließlich Mechanismen mit Drehgelenken (R), Prismengelenken (P), Zylindergelenken (C), Kugelgelenken (G) und Schraubgelenken (H) analytisch behandelt. In der Robotertechnik kommen die R und die P-Gelenke am häufigsten zur Anwendung. Bei den ebenen Manipulatoren (z.B. den Hebebühnen) werden auch sogenannte Parallelogrammgelenke verwendet [4]. Ein Parallelogrammgelenk ist ein Viereck mit besonderen Abmessungen. Ein solches Viereck kann auch als Einzelgelenk aufgefaßt werden, das zwei starre Körper mit einem relativen Freiheitsgrad aneinander bindet. Die Relativbahnen der Punkte von zwei so verbundenen Körpern sind kongruente Kreise, die Relativbewegung ist translatorisch. Wir werden dieses Einzelgelenk Parallelogramm-Gelenk nennen und mit der Kurzbezeichnung  $\Pi$  versehen.  $\Pi$ -Gelenke vermögen P-Gelenke bei entsprechender Auslegung überall zu ersetzen, und haben gegenüber diesen technologisch gesehen den Vorteil, daß die Führungsbahn nicht ungeschützt ist. Abgesehen davon aber ist es jedenfalls von theoretischem Interesse, Mechanismen die teilweise oder ausschließlich  $\Pi$ -Gelenke enthalten, zu untersuchen.

Es ist zu erwarten, daß der Ersatz eines P-Gelenkes in einem Raummechanismus durch ein  $\Pi$ -Gelenk, die Ordnung der algebraisierten Übertragungsfunktion beträchtlich erhöht; so kann z.B. vermutet werden, daß der 5R $\Pi$ -Mechanismus auf eine Übertragungsfunktion mindestens 32.ter Ordnung führt. Diese Fragen sollen in einigen Folgearbeiten abgehandelt werden.

In der vorliegenden Arbeit wird der einfachste Mechanismus mit nur  $\Pi$ -Gelenken untersucht, das ist der homogene 4 $\Pi$ -Mechanismus, dessen Gelenke gleiche Abmessungen und gleiche Lageparameter in den Gliedkörpern besitzen.

## 2. Das Parallelogramm-Gelenk

Die Abb. 1 zeigt das Parallelogramm-Gelenk und die relevanten Parameter. Die festen Systemparameter  $a_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $s_i$ ,  $\Theta_i$ ,  $h_i$  und der

(variable) Lageparameter  $\sigma_i$  bestimmen die Lage der im Gliedkörper  $K_i$  fixierten Vektorbasis  $(O_i, \vec{e}_\alpha^{(i)})$  in der Vektorbasis  $(O_{i-1}, \vec{e}_\alpha^{(i-1)})$  in  $K_{i-1}$ .

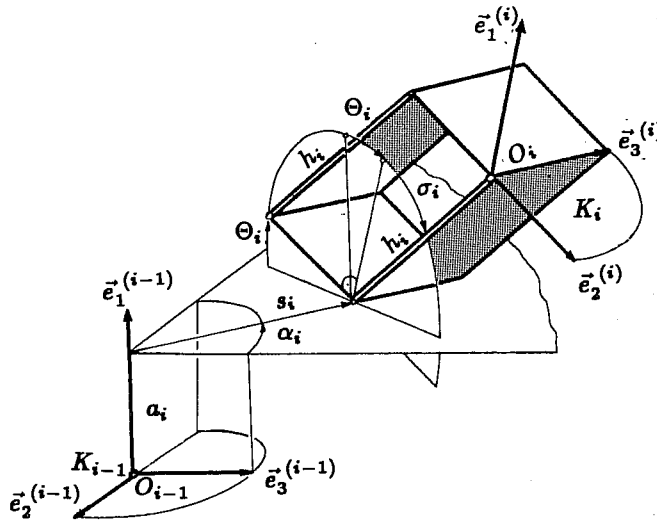


Abb.1

Das Parallelogramm-Gelenk II

Die orthonormierten Vektoren  $\vec{e}_1^{(i)}, \vec{e}_2^{(i)}, \vec{e}_3^{(i)}$  in  $K_i$  können als Linearkombinationen der Basisvektoren  $\vec{e}_1^{(i-1)}, \vec{e}_2^{(i-1)}, \vec{e}_3^{(i-1)}$  in  $K_{i-1}$  dargestellt werden. Mit den drei Matrizen

$$(1) \begin{matrix} \vec{e}_1^{(i)} \\ \vec{e}_2^{(i)} \\ \vec{e}_3^{(i)} \end{matrix} := \begin{matrix} \vec{e}_1^{(i-1)} \\ \vec{e}_2^{(i-1)} \\ \vec{e}_3^{(i-1)} \end{matrix} \underline{A}_i := \begin{matrix} \cos \Theta_i & \sin \Theta_i \cos \alpha_i & \sin \Theta_i \sin \alpha_i \\ -\sin \Theta_i & \cos \Theta_i \cos \alpha_i & \cos \Theta_i \sin \alpha_i \\ \Theta & -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{matrix}$$

läßt sich die gegenseitige Abhängigkeit der Basisvektoren in der folgenden Form anschreiben:

$$(2) \quad \vec{e}^{(i)} = \underline{A}_i \vec{e}^{(i-1)} \quad \text{bzw.} \quad \vec{e}^{(i-1)} = \underline{A}_i^T \vec{e}^{(i)}$$

Die Matrix  $\underline{A}_i$  ist eine orthogonale Matrix d.h. es gilt  $\underline{A}_i^{-1} = \underline{A}_i^T$ .

Mit dem Drehwinkel  $\varphi_i$  und dem Einheitsvektor  $\vec{e}_i$  in der Drehachse kann der Drehtensor  $\underline{R}_i$ , der die Einheitsvektoren  $\vec{e}_\alpha^{(i-1)}$  in die

Einheitsvetkoren  $\vec{e}_\alpha^{(i)}$  überführt, in der folgenden Weise dargestellt werden [1]:

$$(3) \quad \mathbf{R}_i = \vec{e}^{(i-1)T} \underline{R}_i \vec{e}^{(i-1)} = \vec{e}^{(i)T} \underline{R}_i \vec{e}^{(i)} \\ = \exp(\varphi_i \vec{n}_i \times) = \cos \varphi_i \mathbf{I} + \sin \varphi_i (\vec{n}_i \times) + (1 - \cos \varphi_i) (\vec{n}_i \vec{n}_i).$$

Aus  $\mathbf{R}_i \circ \vec{e}^{(i-1)T} = \vec{e}^{(i)T} = \vec{e}^{(i-1)T} \underline{R}_i \vec{e}^{(i-1)} \circ \vec{e}^{(i-1)T} = \vec{e}^{(i-1)T} \underline{R}_i \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \vec{e}^{(i)} = \underline{R}_i^T \vec{e}^{(i-1)} = \underline{A}_i \vec{e}^{(i-1)}$  folgt

$$(4) \quad \underline{R}_i^T = \underline{A}_i.$$

Der Vergleich der Koordinaten von  $\underline{A}_i$  und  $\underline{R}_i^T$  liefert für die Koordinaten  $n_\alpha^{(i)}$  des Einheitsvektors  $\vec{n}_i$  sowohl in der Basis  $(O_i, \vec{e}_\alpha^{(i)})$  als auch in der Basis  $(O_{i-1}, \vec{e}_\alpha^{(i-1)})$  zunächst

$$(5) \quad n_1^{(i)} \sin \varphi_i = (1/2) \sin \alpha_i (1 + \cos \Theta_i) \\ n_2^{(i)} \sin \varphi_i = -(1/2) \sin \alpha_i \sin \Theta_i \\ n_3^{(i)} \sin \varphi_i = (1/2) \sin \Theta_i (1 + \cos \alpha_i).$$

Für den Drehwinkel  $\varphi_i$  erhält man aus  $\text{tr}(\underline{R}_i^T) = \text{tr}(\underline{A}_i)$ :

$$(6) \quad \varphi_i = \pm \arccos[(1 + \cos \alpha_i)(1 + \cos \Theta_i)/2 - 1].$$

Die Wahl des Vorzeichens von  $\varphi_i$  ist belanglos, weil sich mit dem Vorzeichen von  $\varphi_i$  auch das Vorzeichen des Einheitsvektors  $\vec{n}_i$  ändert.

### 3. Der homogene Paralleltrieb-Mechanismus 4II

Für kinematische Ketten, bestehend aus  $n$  Gliedkörpern die über  $g$  Gelenke verbunden sind gilt die Zwanglaufbedingung

$$F = 1 = \Sigma f_i + k(\Omega + 1).$$

Hierin bezeichnen  $\Omega = g - n$  die Ordnung,  $k$  den Grundfreiheitsgrad aller Gliedkörper und  $\Sigma f_i$  die Summe der relativen Freiheitsgrade der Gliedkörper die die, sie verbindenden Gelenke zulassen. Für kinematische Ketten nullter Ordnung mit Gelenken die nur einen relativen Freiheitsgrad zulassen gilt demnach:  $\Sigma f_i = n = g$ . In einem Paralleltrieb-Mechanismus sind sämtliche Gelenke II-Gelenke, die Gliedkörper können sich daher nur noch ohne Richtungsänderungen, d.h. nur translatorisch bewegen, ihr Grundfreiheitsgrad ist daher gleich 3. Damit

erhält man für den räumlichen Paralleltrieb-Mechanismus nullter Ordnung:  $n = 4$ . Unter einem homogenen 4II-Mechanismus wird hier ein Paralleltrieb-Mechanismus mit gleichen Gelenken verstanden. Demnach gilt für diesen speziellen Mechanismus

$$(7) \quad a_i = a, \quad \alpha_i = \alpha, \quad s_i = s, \quad \Theta_i = \Theta, \quad h_i = h \quad i = 1 \div 4.$$

Die Koordinaten des Drehtensors und des Einheitsvektors in der Drehachse und der Drehwinkel selbst, sind dann in allen vier Koordinatensystemen ( $O_i, \vec{e}_\alpha^{(i)}$ ) gleich groß:

$$(8) \quad \underline{R}_i = \underline{R}, \quad n_\alpha^{(i)} = n_\alpha, \quad \varphi_i = \varphi \quad i = 1 \div 4.$$

Die vier aufeinanderfolgenden Drehungen mit dem Drehtensor  $\mathbf{R}$  führen die Basisvektoren in sich selbst zurück. Aus

$$\mathbf{R} \circ \mathbf{R} \circ \mathbf{R} \circ \mathbf{R} \circ \vec{e}^{(i-1)T} = \vec{e}^{(i-1)T} \text{ folgt}$$

$$(9) \quad \mathbf{R}^4 = \mathbf{I} = \exp(4\varphi \vec{n} \times) \Rightarrow 4\varphi = 2\pi \Rightarrow \varphi = \pi/2.$$

Die Winkel  $\alpha$  und  $\Theta$  können beim homogenen 4II-Mechanismus nicht unabhängig von einander gewählt werden. Denn mit  $\varphi = \pi/2$  erhält man aus (6) den Zusammenhang

$$(10) \quad (1 + \cos \alpha)(1 + \cos \Theta) = 2.$$

Diese Bedingungsgleichung beschränkt die Werte für  $\alpha$  und für  $\Theta$  auf den Bereich

$$-\pi/2 \leq \alpha, \quad \Theta \leq \pi/2.$$

Unter Berücksichtigung von (10) erhält man für die in den vier Koordinatensystemen ( $O_i, \vec{n}_\alpha^{(i)}$ ) gleichen Koordinaten des Richtungsvektors der Drehachse

$$(11) \quad n_1 = \tan(\alpha/2), \quad n_2 = -\tan(\alpha/2) \cdot \tan(\Theta/2), \quad n_3 = \tan(\Theta/2).$$

Nur eine der Koordinaten von  $\vec{n}$  kann also frei zwischen +1 und -1 gewählt werden. Zwischen den Koordinaten von  $\vec{n}$  bestehen die Beziehungen:  $n_2 = -n_1 n_3$ ,  $n_1^2(1 + n_3^2) = 1 - n_3^2$ ,  $n_3(1 + n_1^2) = 1 - n_1^2$ .

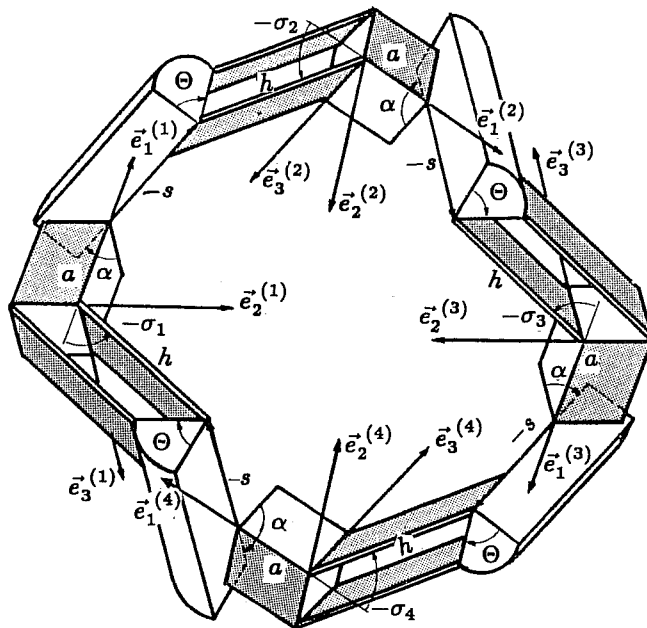


Abb. 2.  
Der homogene 4II-Mechanismus (Liniensymmetrische Bauart,  
Blickrichtung von  $\vec{n}$ )

#### 4. Das Grundgleichungssystem

Von noch zu besprechenden Sonderfällen abgesehen, ist der homogene 4II-Mechanismus zwangläufig. Die drei Übertragungsfunktionen sind aus drei voneinander unabhängigen Gleichungen, die die Lagewinkel  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  und  $\sigma_4$  enthalten, zu berechnen. Diese Gleichungen liefert die vektorielle Schießbedingung. Diese lautet:

$$\vec{s} := [\vec{e}_1^{(1)} + \vec{e}_1^{(2)} + \vec{e}_1^{(3)} + \vec{e}_1^{(4)}]a + [\vec{e}_3^{(1)} + \vec{e}_3^{(2)} + \vec{e}_3^{(3)} + \vec{e}_3^{(4)}]s + \\ + h[\vec{e}_1^{(1)} \cos \sigma_1 + \vec{e}_2^{(1)} \sin \sigma_1] + h[\vec{e}_1^{(2)} \cos \sigma_2 + \vec{e}_2^{(2)} \sin \sigma_2] + \\ + h[\vec{e}_1^{(3)} \cos \sigma_3 + \vec{e}_2^{(3)} \sin \sigma_3] + h[\vec{e}_1^{(4)} \cos \sigma_4 + \vec{e}_2^{(4)} \sin \sigma_4] = \vec{0}.$$

Mit 
$$\vec{e}_1^{(1)} + \vec{e}_1^{(2)} + \vec{e}_1^{(3)} + \vec{e}_1^{(4)} = (\mathbf{I} + \mathbf{R} + \mathbf{R}^2 + \mathbf{R}^3) \circ \vec{e}_1^{(1)} = \\ = 4\vec{n}\vec{n} \circ \vec{n}_1^{(1)} = 4n_1\vec{n}$$

und 
$$\vec{e}_3^{(1)} + \vec{e}_3^{(2)} + \vec{e}_3^{(3)} + \vec{e}_3^{(4)} = (\mathbf{I} + \mathbf{R} + \mathbf{R}^2 + \mathbf{R}^3) \circ \vec{e}_3^{(1)} =$$

$$= 4\vec{n}\vec{n} \circ \vec{n}_3^{(1)} = 4n_3\vec{n}$$

sowie der Abkürzung

$$(12) \quad \vec{r}_i = \vec{e}_1^{(i)} \cos \sigma_i + \vec{e}_2^{(i)} \cos \sigma_i$$

kann die Schießbedingung in der folgenden Form angeschrieben werden:

$$(13) \quad \vec{s} := 4(n_1 \frac{a}{h} + n_3 \frac{c}{h})\vec{n} + \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4 = \vec{0}.$$

Um die vorhandenen Symmetrien möglichst in Rechnung zu stellen, soll der Vektor  $\vec{s}$  nach den drei Richtungen zerlegt werden, die die orthonormalen Vektoren

$$(14) \quad \vec{n}, \vec{f}_1 = (\vec{e}_1^{(1)} - n_1\vec{n})/\sqrt{1-n_1^2}, \vec{f}_2 = \mathbf{R} \circ \vec{f}_1 = \vec{n} \times \vec{f}_1 = (\vec{e}_1^{(2)} - n_1\vec{n})/\sqrt{1-n_1^2}$$

bestimmen. Die in (13) vorkommenden Einheitsvektoren können als Linearkombinationen der Vektoren  $\vec{n}, \vec{f}_1, \vec{f}_2$  wie folgt dargestellt werden (Abb. 3):

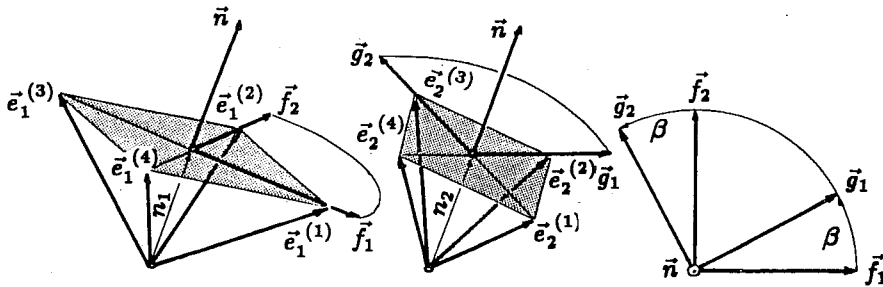


Abb.3

Darstellung der Vektoren  $\vec{e}_1^{(i)}$  und  $\vec{e}_2^{(i)}$  in der Vektorbasis  $(\vec{n}, \vec{f}_1, \vec{f}_2)$

$$(15) \quad \begin{aligned} \vec{e}_1^{(1)} &= n_1\vec{n} + \sqrt{1-n_1^2}\vec{f}_1, & \vec{e}_2^{(1)} &= n_2\vec{n} + \sqrt{1-n_2^2}\vec{g}_1 = \\ &= n_2\vec{n} + \sqrt{1-n_2^2}(\cos \beta \vec{f}_1 + \sin \beta \vec{f}_2) \\ \vec{e}_1^{(2)} &= n_1\vec{n} + \sqrt{1-n_1^2}\vec{f}_2, & \vec{e}_2^{(2)} &= n_2\vec{n} + \sqrt{1-n_2^2}\vec{g}_2 = \\ &= n_2\vec{n} + \sqrt{1-n_2^2}(-\sin \beta \vec{f}_1 + \cos \beta \vec{f}_2) \\ \vec{e}_1^{(3)} &= n_1\vec{n} - \sqrt{1-n_1^2}\vec{f}_1, & \vec{e}_2^{(3)} &= n_2\vec{n} - \sqrt{1-n_2^2}\vec{g}_1 = \\ &= n_2\vec{n} - \sqrt{1-n_2^2}(\cos \beta \vec{f}_1 + \sin \beta \vec{f}_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{e}_1^{(4)} &= n_1 \vec{n} - \sqrt{1 - n_1^2} \vec{f}_2, \quad \vec{e}_2^{(4)} = n_2 \vec{n} - \sqrt{1 - n_2^2} \vec{g}_2 = \\ &= n_2 \vec{n} - \sqrt{1 - n_2^2} (-\sin \beta \vec{f}_1 + \cos \beta \vec{f}_2)\end{aligned}$$

Der hierin auftretende Winkel  $\beta$  kann aus den Koordinaten  $n_1, n_2$  und  $n_3$  berechnet werden:

Aus  $\vec{f}_1 \circ \vec{g}_1 = \cos \beta = (\vec{e}_1^{(1)} - n_1 \vec{n}) \circ (\vec{e}_1^{(2)} - n_2 \vec{n}) / \sqrt{(1 - n_1^2)(1 - n_2^2)}$  folgt  $\sqrt{1 - n_2^2} \cos \beta = n_1^2 n_3 / \sqrt{1 - n_1^2}$  und aus  $(\vec{f}_1 \times \vec{g}_1) \circ \vec{n} = \sin \beta$  erhält man  $\sqrt{1 - n_2^2} \sin \beta = n_3 / \sqrt{1 - n_1^2}$ .

Mit Hilfe dieser Formeln kann die Zerlegung des Nullvektors  $\vec{s}$  nach den Richtungen  $\vec{n}, \vec{f}_1$  und  $\vec{f}_2$  durchgeführt werden. Als Ergebnis erhält man die folgenden drei Gleichungen:

$$(16) \quad 4[n_1(a/h) + n_3(s/h)] + n_1(\cos \sigma_1 + \cos \sigma_2 + \cos \sigma_3 + \cos \sigma_4) + \\ + n_2(\sin \sigma_1 + \sin \sigma_2 + \sin \sigma_3 + \sin \sigma_4) = 0$$

$$(1 - n_1^2)(\cos \sigma_1 - \cos \sigma_3) + n_3[n_1^2(\sin \sigma_1 - \sin \sigma_3) - (\sin \sigma_2 - \sin \sigma_4)] = 0$$

$$(1 - n_1^2)(\cos \sigma_2 - \cos \sigma_4) + n_3[n_1^2(\sin \sigma_2 - \sin \sigma_4) - (\sin \sigma_3 - \sin \sigma_1)] = 0$$

Es erweist sich als vorteilhaft nun anstelle der Lagewinkel  $\sigma_i$  neue Lagewinkel  $\tau_i$  durch

$$(17) \quad \tau_i = \sigma_i + \Theta/2$$

einzuführen. Ersetzt man nämlich in (16)  $\sigma_i$  durch  $\tau_i - \Theta/2$  und berücksichtigt, daß einerseits  $n_3 = \tan(\Theta/2)$  und andererseits die Beziehungen  $n_1 n_3 = -n_2$  und  $n_1^2(1 + n_3^2) = 1 - n_3^2$  gelten, dann erhält man – nach Addition bzw. Subtraktion der letzten beiden Gleichungen – unter Einführung eines neuen Parameters  $K$

$$(18) \quad K := 4[n_1(a/h) + n_3(s/h)] / (n_1 \sqrt{1 + n_3^2})$$

den sehr viel durchsichtigeren Gleichungssatz für die Lagewinkel  $\tau_i$ :

$$(19) \quad \begin{aligned}K + \cos \tau_1 + \cos \tau_2 + \cos \tau_3 + \cos \tau_4 &= 0 \\ (\sin \tau_1 - \sin \tau_3) + n_3(\cos \tau_2 - \cos \tau_4) &= 0 \\ (\sin \tau_2 - \sin \tau_4) + n_3(\cos \tau_3 - \cos \tau_1) &= 0.\end{aligned}$$

Dieses Grundgleichungssystem, das nur zwei Systemparameter enthält, läßt bereits einiges von der Struktur der zu bestimmenden Übertragungsfunktionen erkennen.



## 5. Folgerungen aus dem Grundgleichungssystem

Die erste Gleichung (19) zeigt, daß reelle Werte für die Lagewinkel  $\tau_i$  sich nur ergeben können, wenn der Parameter  $K$  der folgenden Bedingung genügt

$$(20) \quad -4 \leq K \leq 4.$$

Die Grenzwerte von  $K$  sind den aus (19) ablesbaren Punktlösungen  $\tau_i = 0$  bzw.  $\tau_i = \pm\pi$  zugeordnet, der entsprechende 4II-Mechanismus ist nur "infinitesimal" beweglich.

Erfüllen die Lagewinkel  $\tau_i$  ( $i = 1 \div 4$ ) das Gleichungssystem (19) mit dem Parameterpaar  $K, n_3$ , dann erfüllen die Winkel  $\tilde{\tau}_i = \tau_i \pm \pi$  dieses Gleichungssystem für das Parameterpaar  $-K, n_3$ , und die Winkel  $\tilde{\tau}_1 = \tau_1, \tilde{\tau}_2 = \tau_4, \tilde{\tau}_3 = \tau_3$  und  $\tilde{\tau}_4 = \tau_2$  erfüllen es für das Parameterpaar  $K, -n_3$ . Demnach kann der Variationsbereich von  $K$  und  $n_3$  z.B. auf  $(0 \div 4) \times (0 \div 1)$  beschränkt werden.

Das Grundgleichungssystem (19) geht bei zyklischer Vertauschung der Lagewinkel  $\tau_i$  in sich selbst über. Wir bezeichnen die aus (19) durch Elimination von je zwei Winkeln zu ermittelnden Übertragungsfunktionen mit  $f(\tau_2, \tau_1) = 0, g(\tau_3, \tau_1) = 0$  und  $h(\tau_4, \tau_1)$ . Aus der zyklischen Vertauschbarkeit der Winkel ist auf

$$(21) \quad f(\tau_2, \tau_1) = f(\tau_1, \tau_4) \equiv h(\tau_4, \tau_1) = 0$$

zu schließen, d.h. der Graph  $\tau_4(\tau_1)$  geht aus  $\tau_2(\tau_1)$  durch Spiegelung an der Geraden  $\tau_2 = \tau_1$  und der Umbenennung von  $\tau_2$  in  $\tau_4$  hervor. Ferner zeigt die zyklische Vertauschung

$$(22) \quad g(\tau_3, \tau_1) = g(\tau_1, \tau_3) = 0,$$

daß der Graph  $\tau_3(\tau_1)$  symmetrisch ist in bezug auf die Gerade  $\tau_3 = \tau_1$ . Das Grundgleichungssystem (19) läßt neben der zyklischen Vertauschung aber auch noch eine andere Variablenvertauschung zu, nämlich:

$$\tau_1 \rightarrow -\tau_3, \tau_2 \rightarrow -\tau_2, \tau_3 \rightarrow -\tau_1, \tau_4 \rightarrow -\tau_4.$$

Demnach gelten auch die Beziehungen  $f(\tau_2, \tau_1) = f(-\tau_2, -\tau_3) = 0, g(\tau_3, \tau_1) = g(-\tau_1, -\tau_3) = 0$  und  $h(\tau_4, \tau_1) = h(-\tau_4, -\tau_3) = 0$ . Mit den zyklischen Vertauschungen  $f(-\tau_2, -\tau_3) = f(-\tau_1, -\tau_2) = 0$  und  $0 = h(-\tau_4, -\tau_3) = h(-\tau_1, -\tau_4)$  erhält man dann

$$(23) \quad f(\tau_2, \tau_1) = f(-\tau_1, -\tau_2) = 0, \quad g(\tau_3, \tau_1) = g(-\tau_1, -\tau_3) = 0, \\ h(\tau_4, \tau_1) = h(-\tau_1, -\tau_4) = 0,$$

d.h., die Graphen der drei Übertragungsfunktionen sind bezüglich ihrer Querdiagonalen ( $\tau_2 = -\tau_1, \tau_3 = -\tau_1, \tau_4 = -\tau_1$ ) symmetrisch.

## 6. Nichtzwangsläufige homogene 4II-Mechanismen

Der ebene homogene 4II-Mechanismus (Abb. 4) ist gekennzeichnet durch  $\Theta = \pi/2$ . Die erste Gleichung von (19) kann mit (18) wie folgt angeschrieben werden:

$$4[n_1(a/h) + n_3(s/h)] + n_1 \sqrt{1 + n_3^2} (\cos \tau_1 + \cos \tau_2 + \cos \tau_3 + \cos \tau_4) = 0$$

Mit  $n_3 = \tan \Theta/2 = 1$  und  $n_1 = 0$  erhält man daraus:  $s = 0$ . Die vier Winkel  $\tau_i$  müssen nur den beiden letzten Gleichungen von (19) mit  $n_3 = 1$  genügen. Diese sind gleichwertig dem Gleichungssatz

$$\begin{aligned} \cos \sigma_1 - \sin \sigma_2 - \cos \sigma_3 + \sin \sigma_4 &= 0 \\ \sin \sigma_1 + \cos \sigma_2 - \sin \sigma_3 - \cos \sigma_4 &= 0 \end{aligned}$$

der im allgemeinen nur die Lösung  $\sigma_3 = \sigma_1, \sigma_4 = \sigma_2$  zuläßt,  $\sigma_2$  ist im allgemeinen unabhängig von  $\sigma_1$ , der ebene 4II-Mechanismus besitzt zwei Freiheitsgrade. Wählt man allerdings  $\sigma_3 = \text{konst}$  und  $\sigma_4 = -\pi/2 + \sigma_3$ , dann besitzt der Mechanismus immer noch einen Freiheitsgrad wobei  $\sigma_2 = \pi/2 + \sigma_1$  wird.

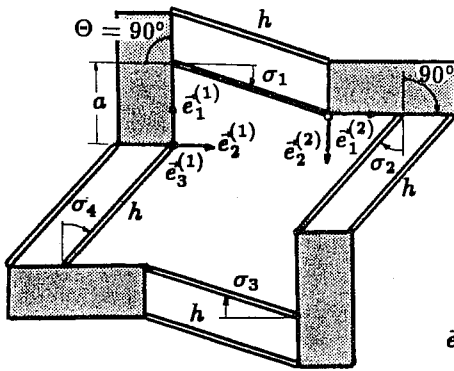


Abb.4

Der ebene homogene  
4II-Mechanismus ( $F = 2$ )

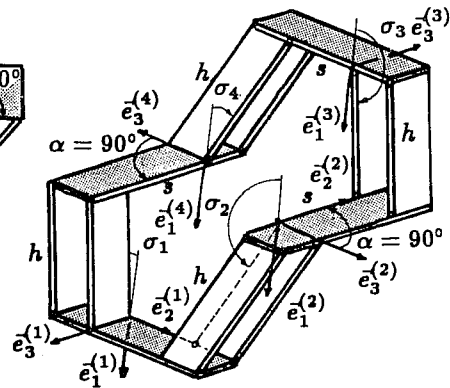


Abb.5

Der räumliche homogene  
4II-Mechanismus ( $F = 2$ )

Einen zweiten homogenen 4II-Mechanismus mit zwei Freiheits-

graden (Abb. 5) erhält man mit den Systemparametern  $\alpha = \pi/2$  und  $a = 0$ . In diesem Falle stimmen die Lagewinkel  $\tau_i$  und  $\sigma_i$  überein ( $\Theta = 0$ ) und die Gleichungen, die sie zu erfüllen haben, sind die folgenden:

$$(24) \quad \begin{aligned} \cos \sigma_1 + \cos \sigma_2 + \cos \sigma_3 + \cos \sigma_4 &= 0 \\ \sin \sigma_3 &= \sin \sigma_1, \quad \sin \sigma_4 = \sin \sigma_2 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen zwei qualitativ sehr verschiedene Lösungen zu, nämlich

$$(25) \quad \sigma = \pm\pi \pm \sigma_1, \quad \sigma_3 = \sigma_1, \quad \sigma_4 = \sigma = \pm\pi \pm \sigma_1 \quad \text{und}$$

$$(26) \quad \sigma_3 = \pm\pi - \sigma_1, \quad \sigma_4 = \pm\pi - \sigma_2$$

Die erste Lösung entspricht einem zwangsläufigen Mechanismus, und die zweite einem mit zwei Freiheitsgraden. Der durch  $(\alpha = 0) \wedge (a = 0)$  charakterisierte homogene 4II-Mechanismus ist insofern bemerkenswert als er beim Durchgang durch eine besondere Lage ( $\sigma_i = \pm\pi/2$ ) den Freiheitsgrad ändert.

## 7. Die Übertragungsfunktionen

Bevor an die allgemeine Lösung des Grundgleichungssystems herangegangen wird, soll die enthaltene, explizite angebbare Lösung gesondert betrachtet werden. Es handelt sich dabei um die Übertragungsfunktionen des *liniensymmetrischen* homogenen 4II-Mechanismus (Abb. 2).

Setzt man in (16)  $\tau_3 = \tau_1$  und  $\tau_4 = \tau_2$ , dann sind die letzten beiden Gleichungen von (16) bereits erfüllt und die erste vereinfacht sich zur unmittelbar auflösbaren Gleichung:

$$(K/2) + \cos \tau_2 + \cos \tau_1 = 0.$$

Die Übertragungsfunktionen des, bezüglich der Drehachse (die der Einheitsvektor  $\vec{n}$  richtungsmäßig angibt) liniensymmetrischen homogenen 4II-Mechanismus ergeben sich auf diese Weise zu:

$$(27) \quad \tau_2(\tau_1) = \pm \arccos[-(\frac{K}{2} + \cos \tau_1)], \quad \tau_3(\tau_1) = \tau_1, \quad \tau_4(\tau_1) = \tau_2(\tau_1).$$

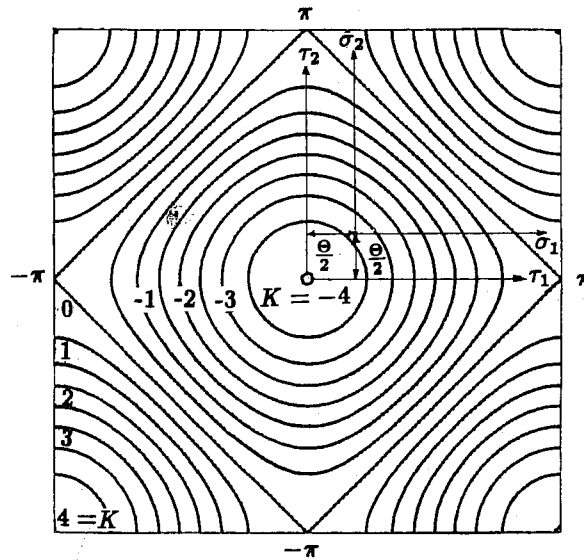


Abb.6

Die Übertragungsfunktion  $\tau_2(\tau_1)$  bzw.  $\sigma_2(\sigma_1)$   
des liniensymmetrischen homogenen 4II-Mechanismus

Diese Übertragungsfunktionen, dargestellt in den Lagewinkeln  $\tau_i$  sind unabhängig von dem Systemparameter  $n_3$ . Die Übertragungsfunktionen in den ursprünglich gewählten Lageparameter erhält man gemäß (17) durch Verschiebung des Koordinatenursprungs in beiden Richtungen um  $\Theta/2 = \arctan n_3$  (Abb. 6).

Die allgemeine Lösung des Grundgleichungssystems (19) und damit die Übertragungsfunktionen der nichtsymmetrischen 4II-Mechanismen können nur in impliziter Form angegeben werden. Die Elimination von zwei Winkeln aus den drei Gleichungen (19) gelingt in zwei Schritten: Zuerst können aus (19) zwei Gleichungen gewonnen werden, die einen Lagewinkel nicht enthalten und die im Sinus und im Cosinus der restlichen drei Lagewinkel linear sind. Aus diesen beiden Gleichungen kann dann mit Hilfe der Euler-Sylvesterschen Resultanten-Methode [3] der zweite Lagewinkel eliminiert werden.

Das Grundgleichungssystem (19) soll zunächst in der Form einer Matrixgleichung angeschrieben werden. Mit der Abkürzung

$$(28) \quad c = \sqrt{1 - n_3^2}$$

und den Matrizen

$$\underline{e}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(29) \quad \begin{aligned} \underline{k}_1^T &= \begin{bmatrix} c & 0 & n_3 \end{bmatrix} \cos \tau_1 + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sin \tau_1 \\ \underline{k}_2^T &= \begin{bmatrix} c & n_3 & 0 \end{bmatrix} \cos \tau_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sin \tau_2 \\ \underline{k}_3^T &= \begin{bmatrix} c & 0 & -n_3 \end{bmatrix} \cos \tau_3 + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sin \tau_3 \\ \underline{k}_4^T &= \begin{bmatrix} c & -n_3 & 0 \end{bmatrix} \cos \tau_4 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sin \tau_4 \end{aligned}$$

nimmt (19) folgende Gestalt an

$$(30) \quad \underline{e} K c + \underline{k}_1 + \underline{k}_2 + \underline{k}_3 + \underline{k}_4 = \underline{0}.$$

Die hier eingeführten  $\underline{k}_i$  Matrizen sind (nichtorthogonale) Einheits-Spaltenmatrizen, d.h. es gilt, unabhängig vom Lagenwinkel  $\tau_i$  der  $\underline{k}_i$  festlegt:

$$(31) \quad \underline{k}_i^T \underline{k}_i = 1 \quad (i = 1 \div 4).$$

Die Matrizen

$$(32) \quad \begin{aligned} \underline{w}_1^T &= \begin{bmatrix} -n_3 & 0 & c \end{bmatrix} & \underline{w}_2^T &= \begin{bmatrix} -n_3 & c & 0 \end{bmatrix} \\ \underline{w}_3^T &= \begin{bmatrix} -n_3 & 0 & -c \end{bmatrix} & \underline{w}_4^T &= \begin{bmatrix} -n_3 & -c & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

sind ebenfalls Einheits-Spaltenmatrizen die außerdem folgende Orthogonalitätsbedingungen:

$$(33) \quad \underline{w}_i^T \underline{k}_i = \underline{0} \quad (i = 1 \div 4)$$

erfüllen. Mit (31) und (33) kann aus (30) auf zweifache Weise ein Lagenwinkel so eliminiert werden, daß man Gleichungen erhält die im Sinus und Cosinus der verbleibenden Winkel linear sind. Aus

$$\begin{aligned} \underline{w}_3^T \underline{k}_3 = 0 &= -\underline{w}_3^T (\underline{e} K c + \underline{k}_1 + \underline{k}_2 + \underline{k}_4) \quad \text{und} \\ \underline{k}_3^T \underline{k}_3 = 1 &= (\underline{e} K c + \underline{k}_1 + \underline{k}_2 + \underline{k}_4)^T (\underline{e} K c + \underline{k}_1 + \underline{k}_2 + \underline{k}_3) \end{aligned}$$

ergeben sich die folgenden zwei  $\tau_3$ -freien Gleichungen

$$(34) \quad n_3(K + 2 \cos \tau_1) + (n_3 \cos \tau_2 - \sin \tau_2) + (n_3 \cos \tau_4 + \sin \tau_4) = 0$$

$$(35) \quad 1 + c^2 K^2 / 2 + c^2 K (\cos \tau_1 + \cos \tau_2) + (c^2 \cos \tau_1 + n_3 \sin \tau_1) \cos \tau_2 - n_3 \cos \tau_1 \sin \tau_2 + [c^2 K + c^2 \cos \tau_1 - n_3 \sin \tau_1 + (c^2 - n_3^2) \cos \tau_2] \cos \tau_4 + [n_3 \cos \tau_1 - \sin \tau_2] \sin \tau_4 = 0.$$

Mit

$$(36) \quad x_4 = \tan(\tau_4/2)$$

und den Spaltenmatrizen

$$(37) \quad \begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{n_3(K-1) + 2 \cos \tau_1 + \cos \tau_2 - \sin \tau_2}{1 + c^2(K-1)(K/2 + \cos \tau_1) + [c^2(K-1) + n_3^2] \cos \tau_2 + n_3[\sin \tau_1 + \sin(\tau_2 - \tau_1)] + c^2 \cos \tau_1 \cos \tau_2} \\ \zeta_2 &= \frac{2}{n_3 \cos \tau_1 - \sin \tau_2} \\ \zeta_3 &= \frac{n_3(K+1 + 2 \cos \tau_1 + \cos \tau_2) - \sin \tau_2}{1 + c^2(K+1)(K/2 + \cos \tau_1) + [c^2(K+1) - n_3^2] \cos \tau_2 + n_3[-\sin \tau_1 + \sin(\tau_2 - \tau_1)] + c^2 \cos \tau_1 \cos \tau_2} \end{aligned}$$

erhält man anstelle von (34) und (35) die Matrixgleichung

$$(38) \quad \zeta_1 x_4^2 + \zeta_2 x_4 + \zeta_3 = 0.$$

Um den Zusammenhang der Lagewinkel  $\tau_2$  und  $\tau_1$  zu erhalten ist daraus  $x_4$  zu eliminieren und das kann mit Hilfe der Resultanten-Methode bewerkstelligt werden.

Faßt man die Potenzen von  $x_4$  (bis zur dritten Ordnung) zu der Spaltenmatrize  $\underline{x}_4$  zusammen und bildet mit Hilfe der  $\zeta_i$ -Matrizen die  $4 \times 4$  Resultantenmatrix  $\underline{M}$

$$(39) \quad \underline{x}_4 = \begin{array}{|c|} \hline x_4^3 \\ \hline x_4^2 \\ \hline x_4 \\ \hline x_1 \\ \hline \end{array} \quad \underline{M} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \hline \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & 0 \\ \hline \end{array}$$

so muß für diese Matrizen aufgrund von (38) die lineare homogene Gleichung

$$(40) \quad \underline{M} \underline{x}_4 = 0$$

von  $\underline{M}$  verschwindet

$$(41) \quad \det \underline{M} = 0.$$

Diese Gleichung stellt den Zusammenhang zwischen dem Eingangswinkel  $\tau_1$  bzw.  $\sigma_1 = \tau_1 - \Theta/2$  und dem Ausgangswinkel  $\tau_2$  bzw.  $\sigma_2 = \tau_2 - \Theta/2$  her.

Ersetzt man  $\tau_2$  und  $\tau_1$  durch

$$(42) \quad x_2 = \tan(\tau_2/2), \quad x_1 = \tan(\tau_1/2),$$

dann erhält man eine algebraische Gleichung 8-ter Ordnung in den neuen Variablen  $x_2$  und  $x_1$ :

$$(43) \quad \det \underline{M}(\tau_2(x_2), \tau(x_1)) = F(x_2, x_1) = 0.$$

Diese Gleichung erlaubt die Abspaltung des in  $x_2$  und in  $x_1$  quadratischen Faktors

$$(44) \quad F_s(x_2, x_1) = (K/2)(1 + x_2^2)(1 + x_1^2) + 2 - (x_1^2 + x_2^2)$$

der, gleich Null gesetzt, die bereits angegebene erste Übertragungsfunktion des liniensymmetrischen homogenen 4II-Mechanismus liefert.

Die Übertragungsfunktion der *nichtsymmetrischen* homogenen 4II-Mechanismen bestimmen demnach eine algebraische Gleichung 6-ter Ordnung.

Wegen der zyklischen Vertauschbarkeit der Argumente  $x_i$  gilt

$$(45) \quad F(x_2, x_1) = F(x_1, x_4) \equiv H(x_4, x_1) = 0,$$

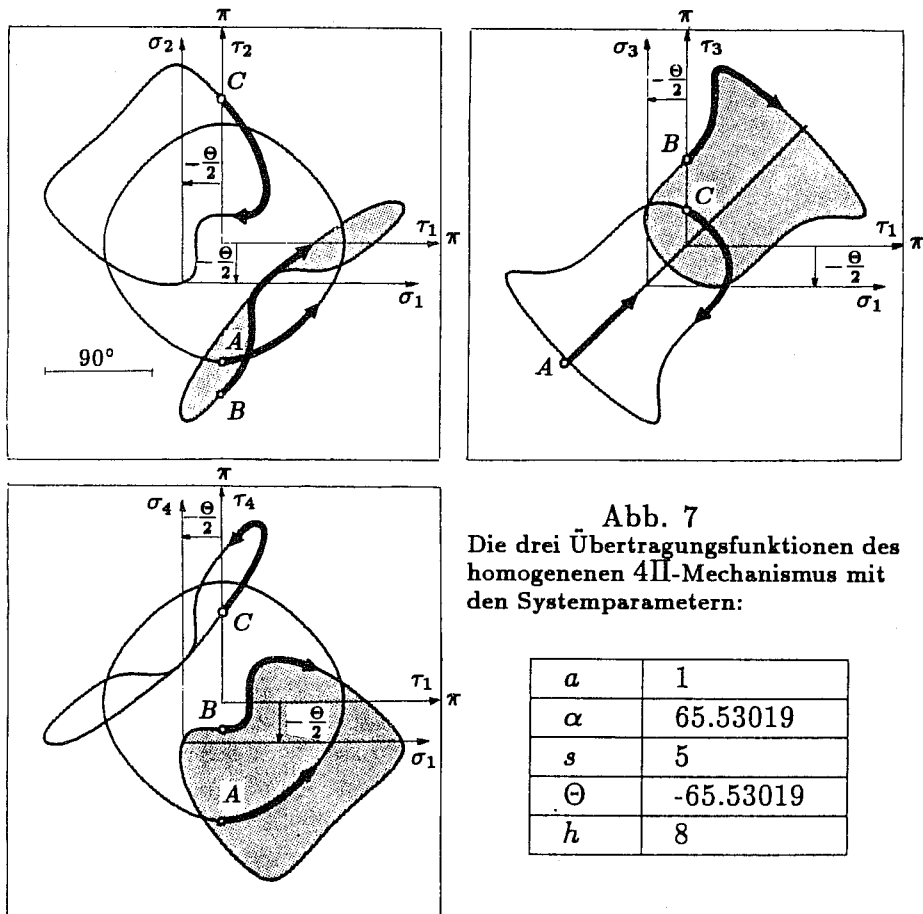
d.h., mit der ersten Übertragungsfunktion ist auch bereits die dritte bestimmt.

Bei der Berechnung der zweiten Übertragungsfunktion  $G(x_3, x_1) = 0$  kann in ganz analoger Weise wie bei der Berechnung von  $F(x_2, x_1) = 0$  vorgegangen werden. Allerdings ist mit der Kenntnis von zusammengehörigen Werten  $x_2, x_4, x_1$  bzw.  $\tau_2, \tau_4, \tau_1$  der Lagewinkel  $\tau_3$  aus den beiden letzten Gleichungen von (19) bereits eindeutig zu bestimmen:

$$(46) \quad \begin{aligned} \sin \tau_3 &= \sin \tau_1 + n_3(\cos \tau_2 - \cos \tau_4) \\ \cos \tau_3 &= \cos \tau_1 - (1/n_3)(\sin \tau_2 - \sin \tau_4) \end{aligned}$$

## 8. Rechenergebnisse

Die Abb. 7 gibt die Rechenergebnisse für einen bestimmten Systemparameter-Satz wieder. Die Annahme  $\alpha = -\Theta$  führt über (10) auf  $\alpha = \arccos \sqrt{\sqrt{2} - 1} = 65.53019^\circ$ ,



$$n_3 = \tan(\Theta/2) = -0,6435942, n_1 = -n_3, K = 4[n_1 a/h + n_3 s/h] / (n_1 \sqrt{1 + n_3^2}) = -1.681792.$$

Der Mechanismus besitzt zwei nichtsymmetrische Bauarten. Bei anderen Parametersätzen zeigt sich, daß entweder keine oder gleich vier



nichtsymmetrische Bauarten möglich sind.

Abb. 8 zeigt die Übertragungsfunktionen nichtsymmetrischer Bauarten von verschiedenen 4II-Mechanismen (mit gleichem  $n_3$  und ungleichen  $K$ -Werten).

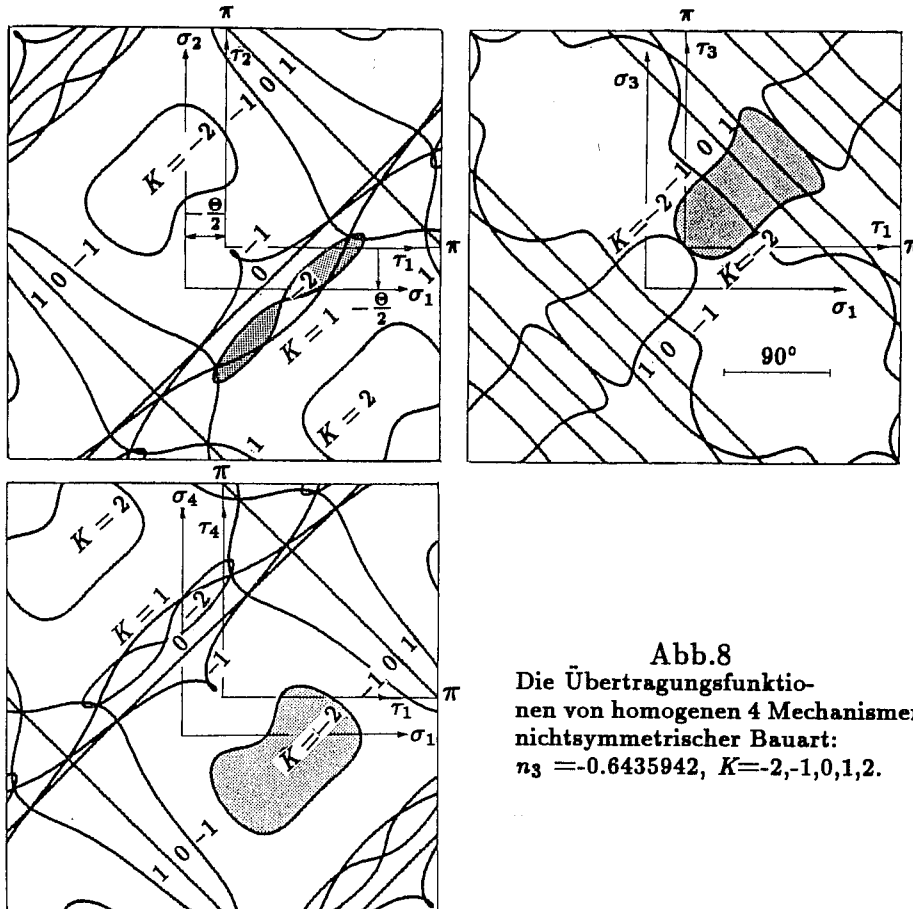


Abb.8

Die Übertragungsfunktionen von homogenen 4 Mechanismen nichtsymmetrischer Bauart:  
 $n_3 = -0.6435942$ ,  $K = -2, -1, 0, 1, 2$ .

Die Graphen der Abbildungen 6,7 und 8 hat cand.ing. G. Moravi aufgrund eines von Dr. P. Dietmaier und ihm entwickelten Rechenprogramms erstellt, wofür ich ihm herzlich Dank sage.

## 9. Literatur

- [1] HILLER, M. and WOERNLE Ch.: A unified representation of spatial displacements, *Mechanism and Machine Theory* 19 (1984), 477 - 486.

- [2] LEE, Hong-You and LIANG, Chong-Gao: Displacements analysis of the general spatial 7-link 7R mechanism, *Mechanism Machine Theory*, **23** (1988), 219 – 226.
- [3] Van der WAERDEN, B.L.: Algebra I, Springer, 1971.
- [4] WUNDERLICH, W.: Ebene Kinematik, B.I. Taschenbuch 447/447a (1970).