Mathematica Pannonica
1/1 (1990), 57 – 71

DREIDIMENSIONALE LIE GRUPPEN UND EBENE KINEMATIK

Manfred **Husty**

Institut für Mathematik und Angewandte Geometrie, Montanuniversität, A-8700 Leoben, Österreich.

Péter **Nagy**

József Attila Tudományegyetem, Bolyai János Intézet, 6720 Szeged, Hongrie.

Received August 1989

AMS Subject Classification: 53 A 17, 22 E 05, 22 E 50

Keywords: Plane cinematics, Lie groups

Abstract: In several papers A. KARGER introduced the notion of moving and fixed directing cones of one parameter motions. By KARGER these cones act in the Lie Algebras belonging to certain Lie Groups. In classical cinematics these Lie Groups act as transformation groups on manifolds (e.g. the plane, the three-space). In this paper we investigate the relation between the concepts of A. KARGER and classical cinematics.

In [8] hat A. KARGER erstmals über die Zusammenhänge zwischen den klassischen ebenen Kinematiken und der Theorie der Lie-Gruppen berichtet. Wir greifen diese Thematik wieder auf und versuchen einige neue Einsichten in die Beziehungen zwischen den, zu den verschiedenen Gruppen gehörenden Lie-Algebren und den ebenen Bewegungsvorgängen zu geben. Hierbei wird besonderes Augenmerk auf die Gemeinsamkeiten der angesprochenen Liegruppen gelegt, auch weil diese Gruppen in jüngster Zeit vom Standpunkt der Liegruppentheorie (vgl. z.B. MILNOR [10]) einer einheitlichen Behandlung unterzogen wurden.

1. Grundlagen

Schauplatz für die kinematischen Bewegungsvorgänge ist die projektive Ebene P^2, die wir uns jeweils mit den entsprechenden projektiven Metriken im CAYLEY-KLEINschen Sinn ausgestattet denken können (vgl. YAGLOM [16]); P^2 wird dadurch zur *elliptischen Ebene* S^2, zur *hyperbolischen Ebene* H^2, zur *euklidischen Ebene* E^2, zur *pseudoeuklidischen Ebene* $E^{1,1}$ oder auch zur *isotropen Ebene* I^2.
Die zu diesen Metriken gehörenden, zusammenhängenden Komponenten der Isometriegruppen werden in üblicher Weise mit $SO(3)$, $SO(2,1)$, $E(2)$, $E(1,1)$ und $I(2)$[1] bezeichnet. Weiters schreiben wir für die, mit den Tangentialräumen in den Einheitselementen der entsprechenden Isometriegruppen identifizierten Lie Algebren: $\mathfrak{o}(3)$, $\mathfrak{o}(2,1)$, $\mathfrak{e}(2)$, $\mathfrak{e}(1,1)$ bzw. $\mathfrak{i}(2)$. Wird keine Aussage über die metrische Struktur benötigt, so bezeichnen wir die Liegruppe mit G und die zugehörige Liealgebra mit $\mathfrak{g}$.

Für die kinematischen Betrachtungen denken wir uns die projektiv metrischen Ebenen in zwei Exemplaren ausgebildet, von denen ein Exemplar als fest anzusehen ist, während das andere gegenüber dem ersten bewegt wird. Wir bezeichnen das feste Exemplar als Rastebene $\bar{P}^2(\bar{S}^2, \bar{H}^2, \ldots)$ und nennen das bewegte Exemplar $P^2(S^2, H^2, \ldots)$ Gangebene. Die Elemente der jeweiligen Liegruppe wirken daher so, daß sie eine Abbildung der Gangebene auf die Rastebene vermitteln. Ein kinematischer Bewegungsvorgang ist nun eine Folge von Abbildungen der Gangebenen auf die Rastebenen und kann daher mit einer Kurve $g(t)$ auf der Lie-Gruppe G identifiziert werden.

Es ist aus der klassischen Kinematik bekannt, daß ein ebener Bewe-

[1] Diese Isometriegruppe ist auch unter dem Namen "Heisenberggruppe" bekannt (vgl. z. B. MILNOR [10])

gungsvorgang durch bogenlängentreues Abrollen von zwei Polkurven erzeugt werden kann. Die Polkurven bestehen dabei aus den jeweiligen Fixpunkten der Momentanbewegungen. Hierbei kann es bei Ausnahmesituationen (Fernpolstellungen in der euklidischen Kinematik (vgl. z.B. B. BLASCHKE [1], S.12f), uneigentliche Fixpunkte in der hyperbolischen Kinematik (vgl. FRANK [2], TÖLKE [15]), isotrope Kinematik (vgl. RÖSCHEL [13], HUSTY [5]) zu gewissen Schwierigkeiten kommen.

Im Gegensatz zu diesem klassischen Konzept hat A. KARGER unter Verwendung der Liegruppentheorie den Bewegungsvorgang mit der Gruppenkurve $g(t)$ identifiziert und den Begriff der Polkegel definiert durch:

$$\begin{array}{lll} (1.1) \qquad & \text{Bewegter Polkegel:=} & R(t) = g^{-1}\dot{g}; \\ & \text{Fester Polkegel:=} & \bar{R}(t) = \dot{g}g^{-1}. \end{array}$$

Der Zusammenhang zwischen den beiden Polkegeln wird durch die Abbildung Ad_g geregelt, die entsprechende Vektoren der Polkegel aufeinander abbildet,

$$\bar{R}(t) = g\ R(t)\ g^{-1} = Ad_g\ R(t) \tag{1.2}$$

und damit ein gewisses Analogon zum Rollen der beiden Polkurven in den entsprechenden projektiv metrischen Ebenen bildet.

Ziel dieser Arbeit ist es nun den Zusammenhang zwischen den beiden Konzepten zu durchleuchten.

2. Die metrische Struktur der Lie Algebren $o(3)$, $o(2,1)$, $e(2)$, $e(1,1)$, $i(2)$.

Im folgenden Teil der Arbeit werden Standardkenntnisse über die metrische Struktur der angesprochenen Lie Algebren zusammengestellt und dann wird eine Abbildung zwischen Vektorräumen erklärt.

2.1. $o(3)$ bzw. $o(2,1)$:

Die Killingform κ ist positiv definit (bzw. indefinit). Die Lie Algebra Elemente X können als lineare Operatoren auf einem dreidimensionalen bzw. pseudoeuklidischen Vektorraum V^3 betrachtet werden. Auf V^3 ist ein Kreuzprodukt definiert durch

$$(2.1)\qquad \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}\varepsilon i & j & k\\ \alpha & \beta & \gamma\\ x & y & z\end{vmatrix}$$

$\varepsilon = 1$ (bzw. -1)und i, j, k als Basisvektoren in V^3. Wir definieren eine Abbildung:

Definition 1: $\Phi : X \to \vec{x} \in V^3$

$$\begin{pmatrix}0 & -\varepsilon\gamma & \varepsilon\beta\\ \gamma & 0 & -\alpha\\ -\beta & \alpha & 0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung ordnet einem Lie Algebra Element X einen Vektor aus V^3 derart zu, daß gilt:

$$(2.2)\qquad X\vec{y} = \vec{x} \times \vec{y} \quad \forall \vec{y} \in V^3.$$

Weiters läßt sich durch eine einfache Rechnung zeigen, daß die Gleichung

$$(2.3)\qquad \vec{x} \times \vec{y} = [X, Y]$$

erfüllt ist und zwischen der Killingform $\kappa(X, Y)$ in $o(3)$ bzw. $o(2,1)$ und dem inneren Produkt $<,>$ in V^3 die Beziehung

$$(2.4)\qquad \kappa(X, Y) = -2 < x, y >$$

besteht. Unmittelbar ergibt sich dann das leicht zu beweisende

Lemma 1. *(KARGER) Zwischen den Darstellungen von $SO(3)$ auf V^3 und Ad $SO(3)$ auf $o(3)$ ist folgendes kommutative Diagramm gültig:*

$$\begin{array}{ccc} V^3 & \xrightarrow{g \,\in\, SO(3)} & V^3 \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\ o(3) & \xrightarrow{Ad\ g} & o(3) \end{array}$$

Korollar. *Das Lemma ist auch gültig wenn $SO(3)$ durch $SO(2,1)$ und $o(3)$ durch $o(2,1)$ ersetzt wird.*

2.2. $e(2)$ bzw. $e(1,1)$:

Wir denken uns in P^2 ein homogenes Koordinatensystem eingeführt und erfassen die Punkte durch projektive Koordinaten $(x_0 : x_1 : x_2) \neq = (0 : 0 : 0)$. Dann kann eine Transformation aus $E(2)$ bzw. $E(1,1)$ durch Matrizen der Form

$$(2.5a,b) \qquad \begin{pmatrix} \cos a & \sin a & b \\ -\sin a & \cos a & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\ a & \mathrm{sh}\ a & b \\ \mathrm{sh}\ a & \mathrm{ch}\ a & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden. Weiters sei durch

(2.6)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_1 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_2 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_3$$

je eine Basis in den Lie Algebren $e(2)$ $(\epsilon = 1)$ bzw. $e(1,1)$ $(\epsilon = -1)$ bestimmt. Wie man leicht berechnet, gelten für die Basisvektoren E_i die folgenden Beziehungen

$$(2.7) \qquad [E_1, E_2] = 0, \qquad [E_1, E_3] = \epsilon E_2, \qquad [E_2, E_3] = -E_1.$$

Die durch die Killingform $\kappa(X,Y) = Tr\ Ad\ X Ad\ Y$ induzierte invariante quadratische Form hat die Gestalt $\kappa(X,Y) = -2\epsilon x^3 y^3$, wobei x^i die Koordinaten eines Lie Algebra Elements in der angegebenen Basis E_i bedeuten. Damit folgt unmittelbar, daß die Gleichung $\kappa(X,X) = 0$ eine zweidimensionale, kommutative Subalgebra g' mit der Basis E_1, E_2 bestimmt. Es gilt das

Lemma 2. *Auf der durch $\kappa = 0$ bestimmten Subalgebra g' gibt es eine, bis auf einen Faktor eindeutig bestimmte, gegenüber $Ad\ E(2)$ bzw. $Ad\ E(1,1)$ invariante, definite (indefinite) quadratische Form $\lambda(X,Y)$.*

Beweis. Wenn $\lambda(X,Y)$ eine invariante quadratische Form sein soll, so muß gelten

$$(2.8) \qquad \lambda([Z,X],Y) + \lambda(X,[Z,Y]) = 0.$$

Wegen der Kommutativität von g' ist diese Beziehung auf g' automatisch erfüllt, und wir haben diese Gleichung nur für $Z = E_3$ auszuwerten. Wir setzen $X = x^1E_1 + x^2E_2$, $Y = y^1E_1 + y^2E_2$ und erhalten durch Einsetzen in (2.8):

$$
\begin{aligned}
(2.9) \qquad -2\lambda(E_1,E_2)x^1y^1 + [\lambda(E_1,E_1) - \epsilon\lambda(E_2,E_2)](x^1y^2 + x^2y^1) + \\
+2\lambda(E_1,E_2)x^2y^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt:

$$
(2.10) \qquad (E_1,E_1) = \epsilon\lambda(E_2,E_2) := A \qquad \text{bzw.} \qquad \lambda(E_1,E_2) = 0.
$$

Insgesamt haben wir damit für die invariante quadratische Form die Gestalt:

$$
(2.11) \qquad \lambda(X,Y) = A(x^1y^1 + \epsilon x^2y^2)
$$

$\diamondsuit$

Folgerung. Durch diese Konstruktion der invarianten quadratischen Formen erhält der Vektorraum $e(2)$ bzw. $e(1,1)$ eine gegenüber $Ad\ g$ invariante quasielliptische (bzw. indefinit quasielliptische) Struktur (vgl. BLASCHKE [1], S. 177 ff). Diese quasielliptische (indefinit quasielliptische) Struktur kann damit durch Links- und Rechtsschiebung auf die gesamte Lie-Gruppe ausgedehnt werden und bestimmt eine biinvariante, differentialgeometrische Struktur auf $E(2)$ bzw. $E(1,1)$.

Im folgenden Teil sollen nun die strukturellen Beziehungen zwischen den projektiv metrischen Ebenen E^2 bzw. $E^{1,1}$ und den entsprechenden - mit obiger Konstruktion metrischen - Lie Algebren untersucht werden.

Dazu beweisen wir den

Satz 1. *Zwischen V^3 und $e(2)(e(1,1))$ existiert ein eindeutig bestimmter linearer quasielliptischer Isomorphismus Φ, so daß das folgende Diagramm kommutiert:*

$$
\begin{tikzcd}
V^3 \arrow[r, "g \in E(2)\ (E(1,1))"] \arrow[d, "\Phi"] & V^3 \arrow[d, "\Phi"] \\
e(2), e(1,1) \arrow[r, "Ad\ g"] & e(2), e(1,1)
\end{tikzcd}
$$

Beweis.
A) $e(2)$:
Zur Bestimmung der Abbildung untersuchen wir die Bilder der Basisvektoren $\vec{e}_i$:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{e}_1) &= a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3 \\ \Phi(\vec{e}_2) &= b_1 E_1 + b_2 E_2 + b_3 E_3 \\ \Phi(\vec{e}_3) &= c_1 E_1 + c_2 E_2 + c_3 E_3. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Wegen der Invarianz des isotropen Unterraumes $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \to \{E_1, E_2\}$ folgt vorerst $a_3 = b_3 = 0$. Weiters gilt mit einer Matrix A von der Form (2.5,a) für den Basisvektor $\vec{e}_1 = (1,0,0)^t$ (t=Transposition):

$$\Phi(A\vec{e}_1) = (a_1 \cos a - b_1 \sin a)E_1 + (a_2 \cos a - b_2 \sin a)E_2 \tag{2.14}$$

und

$$Ad\ A\ \Phi(\vec{e}_1) = A\ \Phi\ (e_1)\ A^{-1} = (a_1 \cos a + a_2 \sin a)E_1 + \\ +(a_2 \cos a - a_1 \sin a)E_2. \tag{2.15}$$

Da die Ausdrücke (2.14) und (2.15) für alle Matrizen A aus $E(2)$ gleich sein müssen, folgt unmittelbar

$$a_2 = -b_1 \qquad \text{und} \qquad b_2 = a_1. \tag{2.16}$$

Eine analoge Rechnung für den Basisvektor $\vec{e}_3 = (0,1,0)^t$ liefert keine neue Bedingungen. Setzt man jedoch $\vec{e}_3 = (0,0,1)^t$ ein, so erhalten wir:

$$b_1 = -c_3, \quad a_1 = b_2 = c_1 = c_2 = 0. \tag{2.17}$$

Weiters folgt aus der Isomorphiebedingung $c_3 = 1$. Damit erhalten wir für die Abbildung der Basisvektoren

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{e}_1) &= E_2 \\ \Phi(\vec{e}_2) &= -E_1 \qquad \text{, d.h.} \\ \Phi(\vec{e}_3) &= E_3 \end{aligned} \tag{2.18}$$

ein Vektor $(x,y,z)^t$ aus V^3 wird durch Φ auf ein Lie Algebra Element von der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

abgebildet. Die Umkehrung ist unmittelbar einsichtig.

B) $e(1,1)$
Analoge Rechnungen wie im Beweisteil A) ergeben für die Gruppe $E(1,1)$ als Abbildungsgleichungen der Basisvektoren

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{e}_1) &= -E_2 \\ \Phi(\vec{e}_2) &= -E_1 \\ \Phi(\vec{e}_3) &= E_3 \end{aligned} \tag{2.20}$$

und ein Vektor aus V^3 wird auf ein Lie Algebra Element der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ z & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

abgebildet.

◊

2.3. $i(2)$:
In der durch homogene Koordinaten $(x_0 : x_1 : x_2)$ koordinatisierten Ebene können isotrope Isometrien durch Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

der Form beschrieben werden. Wir zeichnen in der Lie Algebra $i(2)$ durch

(2.23)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_1 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_2 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = E_3$$

eine Basis aus und erhalten damit folgende Kommutationsrelationen:

$$(2.24) \qquad [E_1, E_2] = [E_2, E_3] = 0, \qquad [E_1, E_3] = -E_2.$$

Wie eine kurze Rechnung zeigt, verschwindet die Killingform auf ganz $i(2)$, und es ist daher notwendig nach invarianten quadratischen Formen zu suchen. Wir beweisen folgendes

Lemma 3. *Jede quadratische Form, die in der Basis E_1, E_2, E_3 die Darstellung $\lambda(X,Y) = \lambda(E_1,E_1)x^1y^1 + \lambda(E_1,E_3)(x^1y^3 + x^3y^1) + \lambda(E_3, E_3)x^3y^3$ besitzt, ist gegenüber Ad $I(2)$ invariant.*

Beweis. Für die Invarianz einer quadratischen Form ist es notwendig und hinreichend, daß (2.8) erfüllt ist. Da diese Relation für E_2 wegen (2.25) automatisch erfüllt ist, können wir setzen $Z = z^1E_1 + z^3E_3$, $X = x^1E_1 + x^2E_2 + x^3E_3$ sowie $Y = y^1E_1 + y^2E_2 + y^3E_3$ und wir erhalten durch Einsetzen in (2.8):

$$(2.25) \qquad \lambda(E_1,E_2)[(x^1z^3 - z^1x^3)y^1 + x^1(z^3y^1 - z^1y^3)] + \lambda(E_2,E_2)\cdot$$
$$\cdot[y^2(x^1z^3 - x^3z^1) + x^2(y^1z^3 - z^1y^3)] + \lambda(E_2,E_3)\cdot$$
$$\cdot[y^2(x^1z^3 - z^1x^3) + x^2(y^1z^3 - z^1y^3)] = 0.$$

Diese Identität ist für alle x^i, y^i, z^i nur dann erfüllt, wenn $\lambda(E_1,E_2) = \lambda(E_2,E_2) = \lambda(E_2,E_3) = 0$ gilt. Alle anderen $\lambda(E_i,E_j)$ $i,j = 1,3$ können beliebig gewählt werden und damit ist die Behauptung gezeigt.

◇

Auf $g' = [g,g] = \{tE_2\}$ verschwindet die quadratische Form $\lambda(X,Y)$. Wir müssen daher eine invariante quadratische Ersatzform bestimmen. Es gilt:

Lemma 4. *Die Form $\mu(X,Y) = hx^2y^2$ $(h \in \mathbb{R})$ auf g' ist invariant gegen Ad g.*

Beweis. Da E_2 im Zentrum der Lie Algebra liegt, ist die Relation (2.8) automatisch erfüllt und weil die Form nur auf g' definiert ist, folgt die Behauptung unmittelbar.

◇

Satz 2. *Die - bis auf eine Konstante - eindeutig bestimmte, lineare Abbildung Φ zwischen dem durch die projektiv metrische Ebene I^2 bestimmten Vektorraum V^3 und der Lie Algebra $i(2)$ mit dem kommutierenden Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} V^3 & \xrightarrow{\quad g \in I(2) \quad} & V^3 \\ \Big\downarrow \Phi & & \Big\downarrow \Phi \\ i(2) & \xrightarrow{\quad Ad\ g \quad} & i(2) \end{array}$$

ist gegeben durch:

$$\Phi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -y & x & 0. \end{pmatrix}$$

Beweis. Wir nehmen an, daß Φ durch die Bilder der Basisvektoren angegeben ist und bestimmen die Koeffizienten der Abbildungsgleichungen

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{e}_1) &= a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3 \\ \Phi(\vec{e}_2) &= b_1E_1 + b_2E_2 + b_3E_3 \\ \Phi(\vec{e}_3) &= c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Nun gilt für den Basisvektor $\vec{e}_1 = (1,0,0)^t$ mit einer Matrix A aus $I(2)$

$$\Phi(A\vec{e}_1) = (a_1 + ab_1 + bc_3)E_3. \tag{2.27}$$

Andererseits erhalten wir

$$Ad\ A\ \Phi(\vec{e}_1) = a_1E_1 + (ca_1 + a_2 - aa_3)E_2 + a_3E_3, \tag{2.28}$$

woraus die Bedingungen

$$a_1 = b_1 = b_3 = c_1 = c_2 = c_3 = 0 \quad \text{und} \quad b_2 = -a_3 \tag{2.29}$$

fließen. Die weiteren Basisvektoren liefern keine neuen Bedingungen, so daß wir für die Abbildungsgleichungen von Φ finden

$$\begin{aligned} \Phi e_1 &= a_3 E_3 \\ \Phi e_2 &= -a_3 E_2 \\ \Phi e_3 &= 0. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Umgekehrt ist unmittelbar einsichtig, daß die so gegebene Abbildung das Kommutativitätsdiagramm erfüllt.

◇

Bemerkung:

1. Wie man sofort sieht, ist der Kern der adjungierten Darstellung der isotropen Bewegungsgruppe $I(2)$ die Untergruppe der isotropen Schiebungen (vgl. SACHS [14]), denn $Ad\ I(2)$ hat in der Basis E_1, E_2, E_3 die Darstellung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1. \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

Als Folge davon müssen alle isotropen Vektoren aus I^2 bei Φ auf den Nullvektor abgebildet werden.

2. Der Bildraum von Φ besteht aus den Linearkombinationen $\lambda E_2 + \mu E_3$ von E_2 und E_3. Für $\mu = 0$ bestimmt das Lie Algebra Element eine einparametrige Schar isotroper Schiebungen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda t & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.32}$$

bzw. für $\mu \neq 0$ eine einparametrige isotrope Scherungsgruppe

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda t & \mu t & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.33}$$

3. Urbilder der Lie Algebra Elemente bei Φ:

3.1. $i(2)$:
Durch $g/\mathbb{R}$ wird aus dem Vektorraum der Lie Algebra eine projektive Ebene $\widetilde{P}^2$. Wir können damit die Lie Algebra Elemente als Punkte von $\widetilde{P}^2$ ansprechen und die Abbildung Φ vermittelt eine singuläre Kollineation zwischen $\widetilde{P}^2$ und der projektiv metrischen Ebene I^2. Die Bildpunkte dieser Kollineation liegen auf einer Geraden $\widetilde{f}$ wobei der, auf dieser Geraden gelegene, zum Vektor E_2 gehörige, Punkt $\widetilde{F}$ ausgezeichnet ist. Man kann sich daher in natürlicher Weise diese projektive Ebene $\widetilde{P}^2$ als isotrope Ebene metrisiert denken. Man hat dafür den Punkt $\widetilde{F}$ und die Gerade $\widetilde{f}$ als Absolutgebilde dieser isotropen Ebene zu wählen.

Wir werden nun die Urbilder der Bildpunkte näher untersuchen und erhalten den

Satz 3. *Die Urbilder eines Punktes $\widetilde{P} \in \widetilde{f}$ sind für $\widetilde{P} = \widetilde{F}$ die Ferngerade f in I^2 und für $\widetilde{P} \neq \widetilde{F}$ eine isotrope Gerade i; dabei ist $\Phi^{-1}(\widetilde{F}) = f$ die Fixpunktmenge der einparametrigen isotropen Schiebungsgruppe* $\exp(t\vec{f})$, *wo $\widetilde{F} = \mathbb{R}\vec{f}$ ist, und $\Phi^{-1}(\widetilde{P}) = i(\widetilde{P} \neq \widetilde{F})$ ist die Fixpunktmenge der einparametrigen Scherungsgruppe* $\exp(t\vec{p})$ *mit $\widetilde{P} = \mathbb{R}\vec{p}$.*

Beweis. Ein Punkt der Geraden $\widetilde{f}$ kann durch einen Vektor $\vec{p} = \lambda E_2 + \mu E_3$ dargestellt werden. Sein Urbild bei Φ^{-1} ist für $\mu = 0$ die projektive Gerade f bzw. für $\mu \neq 0$ die projektive Gerade $(\mu : -\lambda : t)$, wobei t einen laufenden Parameter bezeichnet. Andererseits ist $epx(t\vec{p})$ gegeben durch (2.33) und es erweist sich als Fixpunktmenge dieser einparametrigen Untergruppen bei $\mu = 0$ die Ferngerade f und bei $\mu = 0$ die projektive Gerade $(\mu : -\lambda : t)$.

◊

Bemerkung. Für alle anderen Punkte $\widetilde{P}$ der projektiven Ebene $\widetilde{P}^2(\widetilde{P} \notin f, \vec{p} \neq \lambda E_2)$ ist die zugehörige Fixpunktmenge in I^2 der bei jeder isotropen Bewegung fest bleibende absolute Punkt der projektiv metrischen Ebene I^2. Wenn $\vec{p} = \lambda E_2$ gilt, dann ist die zugehörige Fixpunktmenge die Ferngerade $f \in I^2$ (die zugehörigen einparametrigen Untergruppen sind nichtisotrope Schiebungen).

3.2. $\mathfrak{o}(3)$ bzw. $\mathfrak{o}(2,1)$

Es hat sich gezeigt, daß die Abbildung Φ im isotropen Fall sehr nützlich war, um die Beziehungen zwischen den Vektoren der Lie Algebra und den Fixpunktskonfigurationen der projektiv metrischen Ebene I^2 zu durchleuchten. Im Falle der klassischen dreidimensionalen Drehungsgruppen sind die Verhältnisse wesentlich einfacher: Wenn wir wieder $\mathfrak{g}/\mathbb{R}$ mit $\widetilde{P}^2$ bezeichnen, so folgt unmittelbar aus Lemma 1 und dem nachfolgenden Korollar, daß $\widetilde{P}^2$ dieselbe metrische Struktur hat wie die jeweilige projektiv metrische Ausgangsebene. Die Abbildung Φ ist eine Kollineation, welche die jeweilige metrische Struktur erhält.

A) Im Falle der elliptischen Bewegungen $SO(3)$ kann ein Punkt $\widetilde{P} \in \widetilde{P}^2$ über Φ mit dem Fixpunkt der einparametrigen Drehungsgruppe $\exp(t\vec{p})$ identifiziert werden.

B) Im Falle der hyperbolischen Bewegungen $SO(2,1)$ ordnet Φ einem Vektor $\vec{x}$ aus V^3 das Lie Algebra Element X nach Definition 1 zu. Wir bestimmen nun die zu $\exp[t\Phi(\vec{x})]$ gehörige Fixpunktkonfiguration. Die Fixpunkte der einparametrigen Untergruppen werden durch die Eigenvektoren von $\Phi(\vec{x})$ bestimmt. Man berechnet leicht als Eigenwerte von $\Phi(\vec{x})$: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2/3} = \pm\sqrt{||\vec{x}||^2}$. Der zu $\lambda = 0$ gehörende Eigenvektor stimmt genau mit dem Ausgangsvektor überein. Um die weiteren Eigenvektoren zu untersuchen, können wir o.B.d.A. $||\vec{x}||^2 = 1$ wählen und $\vec{x}$ als den Basisvektor $(0:1:0)^t$ betrachten. Dann erhalten wir die Eigenwerte $\lambda_{2/3} = \pm 1$ und die zugehörigen Eigenvektoren $(1:0:\pm 1)$ sind isotrop. Wir können daher sagen: Φ^{-1} ordnet einem Punkt $\widetilde{P}$ aus $\widetilde{P}^2$ den nicht auf dem absoluten Kegelschnitt gelegenen Fixpunkt von $\exp(t\vec{x})$ zu. Wenn dieser Fixpunkt nicht existiert, dann gibt es einen eindeutig bestimmten Fixpunkt auf dem absoluten Kegelschnitt. Dieser Punkt wird dann durch Φ^{-1} dem Punkt aus $\widetilde{P}^2$ zugeordnet.

3.3. $\mathfrak{e}(2)$ bzw. $\mathfrak{e}(1,1)$

A) Ein analoger Prozeß liefert für die euklidischen Bewegungen: Es sei $(x,y,z)^t$ ein Punkt aus E^2. Das durch Φ zugeordnete Lie Algebra Element $\vec{p}$ hat nun einen reellen Eigenwert $\lambda = 0$. Ist $z \neq 0$, dann ist der entsprechende Eigenvektor $(x,y,z)^t$ und der zu diesem Vektor gehörende Punkt ist der einzige eigentliche Fixpunkt der einparametrigen Drehungsgruppe $\exp(t\vec{p})$. Ist jedoch $z = 0$, dann ist $\exp(t\vec{p})$ eine einparametrige Schiebungsgruppe in Richtung $(-y : x : 0)$ und der Fixpunkt $(x : y : 0)$ ist, als der zur Schiebrichtung orthogonale Fixpunkt ausgezeichnet.

B) Im pseudoeuklidischen Fall sind die isotropen Fernpunkte bei jeder Bewegung fix und ein analoger Prozeß wie im euklidischen Fall liefert: Φ^{-1} ordnet einem Punkt $\widetilde{P}$ aus $\widetilde{P}^2$ den nicht auf der absoluten Geraden gelegenen Fixpunkt von $\exp(t\vec{p})$ zu. Wenn dieser Punkt nicht existiert, dann ist $\exp(t\vec{p})$ eine einparametrige Schiebungsgruppe in Richtung $(-y : -x : 0)$ und $(x : y : 0)$ ist der zur Schiebrichtung orthogonale Fernpunkt.

Literaturverzeichnis

[1] BLASCHKE, W.: Ebene Kinematik, Oldenburg München, 1956.

[2] FRANK, H.: Zur ebenen hyperbolischen Kinematik, *Elem. d. Math.* **26** (1971), 121-131.

[3] GIERING, O.: Vorlesungen über höhere Geometrie, Vieweg-Verlag, Braunschweig Wiesbaden, 1982.

[4] GARNIER, R.: Cours de Cinématique, Tome III, Paris, 1951.

[5] HUSTY, M.: Zur Kinematik winkeltreuer Ähnlichkeiten der isotropen Ebene, Habilschrift Leoben (1988), 1 – 94.

[6] HUSTY, M. und NAGY, P.: Über die Blaschkesche kovariante Ableitung und die kinematische Abbildung, Note di Mathematica, Lecce (1990), (im Druck)..

[7] JACOBSON, N.: Lie Algebras, Wiley & Sons, New York-London, 1962.

[8] KARGER, A.: Lieovy Groupy a Kinematická Geometrie v Roviné, *Časopis pro péstováni mat.* **93** (1968), 186-200.

[9] KARGER, A. und NOVAK, J.: Space Kinematics and Lie Groups, Gordon and Breach, New York-London-Paris-Montreux-Tokio, 1985.

[10] MILNOR, J.: Curvatures of left invariant metrics on Lie groups, *Advances in Math.* **21** (1975), 293-329.

[11] MÜLLER, H.R.: Kinematik, *Göschen Bd.* **584/584a**, Berlin, 1963.

[12] RÖSCHEL, O.: Zur Kinematik der isotropen Ebene I, *Journ. of Geom.* **21** (1983), 146-156.

[13] RÖSCHEL, O.: Zur Kinematik der isotropen Ebene II, *Journ. of Geom.* **24** (1985), 112-122.

[14] SACHS, H.: Ebene isotrope Geometrie, Vieweg-Verlag, Braunschweig Wiesbaden, 1987.

[15] TÖLKE, J.: Kinematik der Hyperbolischen Ebene I-III, *J. reine angew. Math.* **265** (1974), 145-153; **267** (1974), 143-150; **273** (1975), 99-108.

[16] ЯГЛОМ, И.М.: Проективные мероопределения на плоскости и комплексные числа, Труды семинара по векторному и тензорному анализу при МГУ **7** (1949), 274 – 318.