Mathematica Pannonica
1/1 (1990), 33 – 47

ÜBER VERALLGEMEINERTE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN VON ACZÉL-JABOTINSKY IM KOMPLEXEN (Parameterabhängigkeit und holomorphe Fortsetzung von Integralen)

Ludwig **Reich**

Institut für Mathematik, Universität, A-8010 Graz, Brandhofgasse 18, Österreich.

Herrn Professor Dr. Helmut Florian zum fünfundsechzigsten Geburtstag am 30. April 1989 gewidmet.

Received April 1989

AMS Subject Classification: 34 A 20, 34 A 10, 30 D 05

Keywords: Differential equations in the complex domain, Continuous depence of solutions on parameters, Functional equations in the complex domain

Abstract: We consider differential equations of the form

(1) $$\frac{dw}{dz} = \frac{\delta w^m(1+\delta_1 w+\delta_2 w^2+\ldots)}{\gamma z^n(1+\gamma_1 z+\gamma_2 z^2+\ldots)}$$

where $\delta \neq 0, \gamma \neq 0, m, n \geq 1$, and where the power series in the numerator and denominator on the right hand side converge. We are looking for integrals

(2) $$w(z) = \rho z + c_2 z^2 + \ldots$$

which "enter the singularity (0,0) holomorphically". Firstly, it is proved, that there exist formal integrals of (1) if and only if certain algebraic relations for the coefficients γ_i, δ_j are satisfied, and if $m = n$. But then each formal integral (2) is also convergent, hence a locally analytic solution. Moreover, there exists a continuum of solutions of (1) if this equation is solvable in the above sense, since the coefficient $c_m(c_1 = \rho)$ if $m = 1)$ may be chosen arbitrarily. It is shown that the functions $(z, c_m) \mapsto w(z, c_m)$ are holomorphic in regions $|c_m| < \eta$, $|z| < \delta(\eta)$. Here $w(z, c_m)$ denotes the unique integral (2) with the given coefficient c_m, $\eta > 0$ is arbitrary, $\delta(\eta) > 0$ depending on η. Applications are given to the third Aczél-Jabotinsky equation in iteration theory and to holomorphic continuation of integrals of (1) into the singularity (0,0).

1. Einleitung

Bei der Beschreibung von Familien vertauschbarer konvergenter und formaler Potenzreihen und der Normalformen solcher Familien gegenüber simultaner Konjugation spielen die sogenannte ("dritte") Differentialgleichung von Aczél-Jabotinsky und eine Verallgemeinerung derselben eine Rolle (vgl. [1], [2], [3], [4], [5], sowie für das System der sogenannten Aczél-Jabotinskyschen Funktionaldifferentialgleichungen im allgemeinen [6], [7], [8]).

Es sind dies (spezielle) Differentialgleichungen der Form

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\delta w^m(1 + \delta_1 w + \delta_2 w^2 + \ldots)}{\gamma z^m(1 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \ldots)}, \tag{1}$$

wobei $\gamma, \delta \neq 0$, $m, n, \geq 1$, und die auftretenden Potenzreihen $1 + \delta_1 w + + \ldots, 1 + \gamma_1 w + \ldots$ konvergent seien. Bei dem Problem der vertauschbaren Reihen interessiert man sich für konvergente Reihenlösungen von (1) der Form

$$w(z) = \rho z + c_2 z^2 + \ldots, \rho \neq 0. \tag{2}$$

Da auf den Anfangswert $w = 0$ für $z = 0$ bezüglich (1) aber der Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Cauchy oder die klassische Methode der Separation der Variablen nicht direkt angewendet werden kann, müssen hier bei Existenzfragen und bei der Untersuchung der Parameterabhängigkeit modifizierte Wege beschritten werden. So wird z.B. in [2] und in [4] die Differentialgleichung (1) auf einen Spezialfall der Briot-Bouquetschen Differentialgleichung transformiert, der mittels der Majorantenmethode untersucht werden kann.

Wir wollen hier eine Modifikation der Methode der Variablenseparation darstellen, die in der "Singularität" (0,0) Gültigkeit hat. Die Existenz der holomorphen Integrale (2) ergibt sich, wenn überhaupt formale Integrale exisitieren, aus dem Hauptsatz über implizite Funktionen im Komplexen (§2). Die genauere Untersuchung der Abhängigkeit der Lösungen (2) von inneren Parametern ist im Hinblick auf die ursprüngliche, eigangs erwähnte Frage der maximalen Familien vertauschbarer Potenzreihen wichtig und erfordert eine kleine Verschärfung des Satzes über die impliziten Funktionen in §3.

Schließlich werden wir der Frage nachgehen, welche Integrale von (1), die nach dem Satz von Cauchy durch Anfangswerte (z_0, w_0) mit $z_0 \cdot w_0 \neq 0$ eindeutig festgelegt sind, holomorph in die Singularität (0,0) einmünden. Leider kann ich in diesem Punkt kein abschließendes Resultat vorlegen.

2. Die Existenz holomorpher Integrale

Wir wollen in diesem Paragraphen notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angeben, daß eine Differentialgleichung (1) Integrale der Form (2) besitzt. Wir beginnen mit formalen (algebraischen) Vorbereitungen, die man hier am bestem im Körper $\mathbb{C} \ll z \gg$ der formalen Laurentreihen mit endlichem Hauptteil, dem Quotientenkörper des Ringes $\mathbb{C}[\![z]\!]$ der formalen Potenzreihen, durchführt. (1) ist, wenn $w(z)$ die Form (2) hat, äquivalent mit folgenden Relationen in $\mathbb{C} \ll z \gg$:

$$\frac{1}{\delta} w^{-m}(1 + \delta_1 w + \delta_2 w^2 + \ldots)^{-1} \frac{dw}{dz} = \frac{1}{\gamma} z^{-n}(1 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \ldots)^{-1},$$

oder nach Berechnung der Reziproken $(1 + \delta_1 w + \ldots)^{-1}$ und $(1 + \gamma_1 z + + \ldots)^{-1}$ mittels der geometrischen Reihe und Substitution:

$$\frac{1}{\delta} w^{-m}(1 + P_1(\delta_1) w + P_2(\delta_1, \delta_2) w^2 + \ldots) \frac{dw}{dz} =$$

$$= \frac{1}{\gamma} z^{-n}(1 + P_1(\gamma_1) z + P_2(\gamma_1, \gamma_2) z^2 + \ldots)$$

mit Polynomen $P_1, P_2 \ldots$. Wir setzen $P_0 = 1$. Die Laurentreihen $w^{\nu-m}\frac{dw}{dz}$, $\nu \geq 0$, bilden eine summierbare Familie, da $ord\{w(z)^{\nu-m}\frac{dw}{dz}\} = \nu - m$ und wir finden also die zu (1) äquivalente Relation in $\mathbb{C} \ll z \gg$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma} P_\nu(\delta_1, \ldots, \delta_\nu) w^{\nu-m} \frac{dw}{dz} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma} P_\nu(\gamma_1, \ldots, \gamma_\nu) z^{\nu-n} \tag{3}$$

mit

$$w(z) = \rho z + c_2 z^2 + \ldots, \rho \neq 0.$$

Ist $L(z)$ eine formale Laurentreihe, so ist der Koeffizient von z^{-1} in $\frac{d}{dz}L(z) = L'(z)$ Null, $res\{L'(z)\} = 0$. Nun gilt $w^\lambda \frac{dw}{dz} = \left(\frac{1}{\lambda+1} w^{\lambda+1}\right)$, wenn nur $\lambda \neq -1$ ($\lambda \in \mathbb{Z}$), also

$$res\{w^{\nu-m} \frac{dw}{dz}\} = 0$$

für $\nu \neq m-1$, $\nu \geq 0$, und daher

$$res\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu} P_\nu(\delta_1, \ldots, \delta_\nu) w^{\nu-m} \frac{dw}{dz}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\gamma} P_{m-1}\ (\delta_1, \ldots, \delta_{m-1}) res \left(\frac{1}{w(z)} \frac{dw}{dz}\right).$$

Da wir auf der rechten Seite von (3)

$$res\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\delta} P_\nu\ (\gamma_1, \ldots, \gamma_\nu)\ z^{\nu-n}\right\} = \frac{1}{\gamma} P_{n-1}\ (\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1})$$

finden, so ergibt sich

$$\frac{1}{\gamma} P_{m-1}\ (\delta_1, \ldots, \delta_{m-1})\ res\left\{\frac{1}{w} \frac{dw}{dz}\right\} = \frac{1}{\delta} P_{n-1}\ (\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}).$$

Da

$$w^{-1} \frac{dw}{dz} = (\rho z + c_2 z^2 + \ldots)^{-1} (\rho + 2c_2 z + \ldots) = \frac{1}{z} + Q(z)$$

mit $Q(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$, so folgt

$$\frac{1}{\gamma} P_{m-1}(\delta_1, \ldots, \delta_{m-1}) = \frac{1}{\delta} P_{n-1}(\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}). \tag{4}$$

Wegen $P_0 \equiv 1$ und wegen

$$w^{\nu-m} \frac{dw}{dz} = \rho^{\nu-m+1} z^{\nu-m} + R(z)$$

mit $ord\ R(z) > \nu - m$, folgt durch Vergleich der Ordnungen der linken und rechten Seiten in (3)

$$m = n \tag{5}$$

und somit aus (4)

$$\frac{1}{\gamma} P_{m-1}(\delta_1, \ldots, \delta_{m-1}) = \frac{1}{\delta} P_{m-1}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{m-1}). \tag{6}$$

Der Vergleich der niedrigsten Potenzen von z auf den beiden Seiten von (3) ergibt unter Verwendung des Ansatzes (2) und mit $P_0 \equiv 1$

$$\frac{1}{\gamma} \rho^{m-1} = \frac{1}{\delta}, \tag{7}$$

d.h. ρ ist eine, wie wir sehen werden, beliebige, (m-1)-te Wurzel aus γ/δ. Wenn also $m = 1$, so kann $\rho \neq 0$ beliebig sein, es ist dann aber

$$\gamma = \delta \quad (\text{\textit{für} } m = 1) \tag{8}$$

notwendigerweise.

Wie schon festgestellt, ist jede Laurentreihe $w^{\nu-m} \frac{dw}{dz}$ für $\nu - m \neq -1$ die Ableitung einer anderen, nämlich der Laurentreihe $\frac{1}{\nu-m+1} w^{\nu-m+1}$. Um den Fall $\nu - m = -1$ zu untersuchen, setzen wir

$$w(z) = \rho z\,(1 + \omega(z)), \tag{9}$$

mit $\omega(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$, $ord\ \omega \geq 1$. Dann ist

$$w^{-1} \frac{dw}{dz} = \frac{1}{z} + (1 + \omega(z))^{-1} \frac{d\omega}{dz}. \tag{10}$$

Setzen wir (9) und (10) in (3) ein, so finden wir, da sich $\frac{1}{z}$ wegen (5) und (6) weghebt:

$$\sum_{\nu\neq m-1}^{\infty} \frac{1}{\gamma} P_\nu\ (\delta_1,\ldots,\delta_\nu) \left[\frac{1}{\nu-m+1}(\rho z(1+\omega(z))^{\nu-m+1}\right]' +$$
$$+ P_{m-1}(\delta_1,\ldots,\delta_{m-1}) \frac{\omega'(z)}{1+\omega(z)} =$$
$$= \sum_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq m-1}}^{\infty} \frac{1}{\delta} P_\nu\ (\gamma_1\ldots,\gamma_n u) \left(\frac{z^{\nu-m+1}}{\nu-m+1}\right)'.$$

Es ist aber, bei Verwendung der Logarithmusreihe $ln(1+x)$

$$\frac{\omega'(z)}{1+\omega(z)} = [ln(1+\omega(z))]'.$$

Da
$$\left(\tfrac{1}{\nu-m+1}(\rho z(1+\omega(z))^{\nu-m+1}\right)_{\substack{\nu\geq 0\\ \nu\neq m-1}}$$

eine summierbare Familie ist, so sieht man leicht ein, daß sich Summation und Derivation vertauschen lassen, und man findet

$$(11)\quad t + \sum_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq m-1}}^{\infty} \frac{1}{\gamma} P_\nu\ (\delta_1,\ldots,\delta_\nu) \left[\frac{1}{\nu-m+1}(\rho z(1+\omega(z))^{\nu-m+1}\right] +$$
$$+P_{m-1}\ (\delta_1,\ldots,\delta_{m-1}) ln(1+\omega(z)) = \sum_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq m-1}} \frac{1}{\delta} P_\nu\ (\gamma_1,\ldots,\gamma_\nu) \frac{z^{\nu-m+1}}{\nu-m+1}$$

mit einer Integrationskonstanten $t \in \mathbb{C}$.

Es sei zunächst $m=1$. Die Bedingung (6) besagt hier $\delta=\gamma$. Dann haben wir

$$(12)\quad t + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma} P_\nu(\delta_1,\ldots,\delta_\nu) \left[\frac{1}{\nu}\rho^\nu z^\nu (1+\omega(z))^\nu\right] + \frac{1}{\nu} ln(1+\omega(z)) =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma} P_\nu(\gamma_1,\ldots,\gamma_\nu) \frac{z^\nu}{\nu},$$

und es ist wegen $ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$ notwendigerweise $t = 0$. Wir erhalten weiters aus (11)

$$\omega(z) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma} P_\gamma(\delta_1, \ldots, \delta_\nu) \left[\frac{1}{\gamma}\rho^\nu z^\nu (1+\omega(z))^\nu\right] + \tag{13}$$

$$+ \left(\frac{\omega^2(z)}{2} - \frac{\omega^3(z)}{3} + \ldots\right) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma} P_\nu(\gamma_1, \ldots, \gamma_\nu)\frac{z^\nu}{\nu};$$

und der Hauptsatz über implizite Funktionen ergibt die Existenz eines durch (12) eindeutig bestimmten $\omega(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ mit $ord\ \omega \geq 1$. Dies ist sogar konvergent, da die Reihen auf der rechten Seite nach Voraussetzung bzw. auf Grund ihrer Erstehung aus konvergenten Reihen konvergent sind.

Sodann sei $m > 1$. Entwickeln wir $(1+\omega(z))^{\nu-m+1}$ für $\nu < m-1$ nach der Binomialreihe, für $\nu \geq m-1$ nach dem binomischen Lehrsatz und setzen wir für $ln(1+\omega(z))$ definitionsgemäß die logarithmische Reihe, und multiplizieren wir (11) mit z^{m-1}, so ergibt sich die Relation

$$tz^{m-1} + \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu\neq m-1}}^{\infty} \tfrac{1}{\gamma} P_\nu(\delta_1, \ldots, \delta_\nu) \left[\tfrac{1}{\nu-m+1}\rho^{\nu-m+1} z^\nu (1+\omega(z))^{\nu-m+1}\right] +$$

$$+\frac{1}{\gamma} P_{m-1}(\delta_1 \ldots, \delta_{m-1}) z^{m-1} ln(1+\omega(z)) = \tag{14}$$

$$= \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu\neq m-1}}^{\infty} \frac{1}{\gamma} P_\nu(\gamma_1, \ldots, \gamma_\nu) \frac{z^\nu}{\nu-m+1}$$

Wegen $m > 1$ hat das Absolutglied auf der linken Seite von (14) wegen $P_0 = 1$ den Wert $\frac{1}{\gamma}\rho^{-m+1}$, auf der rechten Seite steht $\frac{1}{\delta}$, so daß es sich in dieser Relation weghebt. Der Term $\omega(z)$ tritt nur auf der linken Seite auf, und sein Koeffizient ist $\frac{1}{\gamma}\frac{-m+1}{-m+1}\rho^{-m+1} = \frac{1}{\delta} \neq 0$. Wir können (13) also nach $\omega(z)$ auflösen, und für jedes $t \in \mathbb{C}$ den Hauptsatz über implizite Funktionen anwenden. Da alle auftretenden Reihen konvergieren, ist (bei festem t und ρ) das eindeutig bestimmte $\omega(z)$ mit $ord\omega \geq 1$ auch konvergent. Berechnen wir die Koeffizienten von $\omega(z)$ explizit, so sehen wir, daß der Koeffizient von z^{m-1} in t affin ist, und daher, ebenso wie t, als freier Parameter gewählt werden kann. Dies trifft daher auch für den Koeffizienten von z^m in $w(z)$ zu. Wir fassen zusammen in

Satz 1.
a) *Eine Differentialgleichung* (1) *mit* $\gamma \neq 0$, $\delta \neq 0, m, n \geq 1$, *besitzt genau dann ein holomorphes Integral* (2),

$$w(x) = \rho z + c_2 z^2 + \ldots + c_m z^m + \ldots,$$

wenn

$$m = n \tag{5}$$

und mit gewissen Polynomen P_{m-1}

$$\frac{1}{\gamma} P_{m-1}(\delta_1, \ldots, \delta_{m-1}) = \frac{1}{\delta} P_{m-1}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{m-1}) \tag{6}$$

gilt.
b) *Sind* (5) *und* (6) *erfüllt, so ist, wenn* $m > 1$ *notwendigerweise*

$$\rho = \sqrt[m-1]{\frac{\gamma}{\delta}};$$

wenn $m = 1$, *so ist* $\rho \neq 0$ *beliebig.*
Zu jedem $c_m \in \mathbb{C}(m > 1)$ *bzw.* $\rho \in \mathbb{C}$ $(m = 1)$ *gibt es genau ein Integral*

$$w(z) = \rho z + c_2 z^2 + \ldots + c_m z^m + \ldots$$

von (1). Die Koeffizienten c_ν *sind Polynome in* ρ *und in* c_m.

Speziell sind die Differentialgleichungen von Aczél-Jabotinsky von der Form (1). In ihrem Fall sind die Bedingungen (5) und (6) erfüllt, wie leicht nachzurechnen, und daher ist Satz 1 auf sie anwendbar.

3. Parameterabhängigkeit

Wir wollen nun die Abhängigkeit vom Parameter $c_m (m > 1)$ und vom Parameter $\rho (m = 1)$ genauer untersuchen. Dazu benötigen wir eine kleine Verschärfung des Satzes über die impliziten Funktionen im Komplexen.

Satz 2. *Vorgelegt sie die Gleichung*

$$w(z, u_1, \ldots, u_N) = \sum_{\substack{(\alpha,\beta)\neq(1,0)\\ \alpha+\beta\geq 1}} d_{\alpha\beta\gamma_1,\ldots,\gamma_N} w^\alpha z^\beta u_1^{\gamma_1} \ldots u_N^{\gamma_N}. \tag{15}$$

Zu jedem $\eta > 0$ gebe es ein $\delta_0(\eta) > 0$, so daß die Potenzreihe auf der rechten Seite von (15) für $|w| < \delta_0(\eta)$, $|z| < \delta_0(\eta)$, $|u_j| < \eta$, $(j = 1, .., N)$ konvergiere. Dann gilt:
Zu jedem $\eta > 0$ gibt es ein $\delta(\eta) > 0$, so daß die gemäß dem Hautpsatz über implizite Funktionen eindeutig bestimmte Lösung $w(z, u_1, \ldots, u_N)$ von (15) mit $|u_j| < \eta(j = 1, \ldots, N)$ holomorph ist.

Beweis. Der Hauptsatz über implizite Funktionen im Komplexen behauptet die Existenz genau einer formalen und sogar konvergenten Potenzreihe

$$w(z, u_1, \ldots, u_N) = \sum_{\alpha\geq 1} c_{\alpha\gamma_1,\ldots,\gamma_N} z^\alpha u_1^{\gamma_1} \ldots u_N^{\gamma_N},$$

welche (15) erfüllt. Die Berechnung dieser (formalen) Reihe $w(z, u_1, \ldots, u_N)$ kann auf zwei Arten erfolgen. Man kann erstens die Koeffizienten $c_{\alpha\gamma_1\ldots\gamma_N}$ aus einer mehrstufigen Rekursion (z.B. nach der lexikographischen Ordnung der Multiindizes) berechnen. Man kann aber zweitens die Reihe auf der rechten Seite von (15)

$$\sum_{\substack{(\alpha,\beta)\neq(1,0)\\ \alpha+\beta\geq 1}} d_{\alpha\beta\gamma_1\ldots\gamma_N} w^\alpha z^\beta u_1^{\gamma_1} \ldots u_N^{\gamma_N} =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} \left(\sum_{\gamma} d_{\alpha\beta\gamma_1\ldots\gamma_N} u_1^{\gamma_1} \ldots u_N^{\gamma_N} \right) w^\alpha z^\beta := \sum_{\substack{(\alpha,\beta)\neq(1,0)\\ \beta\geq 1}} F_{\alpha\beta}(u) w^\alpha z^\beta$$

mit $F_{\alpha\beta}(u) \in \mathbb{C}[\![u_1 \ldots, u_N]\!]$ und

$$w(z) = \sum_{\delta\geq 1} c_\delta(u) z^\delta, c_\delta(u) \in \mathbb{C}[\![u_1, \ldots u_N]\!],$$

schreiben und die Koeffizienten $c_\delta(u)$ rekursiv bestimmen. Man sieht leicht ein, daß die $c_\delta(u)$ Polynome mit positiven Koeffizienten in den formalen Reihen $F_{\alpha\beta}(u)$ mit $\alpha+\beta\le\delta$ sind:

$$c_\delta(u) = Q_\delta(F_{\alpha\beta}(u)),\ \delta = 1,2,\dots. \tag{16}$$

Diese Umordnung ist auch im Sinne der Analysis durchführbar, da die auftretenden Reihen innerhalb gewisser Polyzylinder absolut konvergieren. Nach Voraussetzung sind die Reihen $F_{\alpha\beta}(u)$ für $|u_\gamma| < \eta$ mit beliebigem $\eta > 0$ konvergent, wir wählen $\eta = \eta_0 > 0$ fest. Dies gilt auch für die "kleinsten" Majoranten

$$F^*_{\alpha\beta}(u) = \sum_\gamma |d_{\alpha\beta\gamma_1}\dots{}_{\gamma_N}|u_1^{\gamma_1}\dots u_N^{\gamma_N}.$$

Betrachten wir das majorante implizite Problem

$$W(z,u) = \sum F^*_{\alpha\beta}(u)w^\alpha z^\beta \tag{17}$$

mit $W(0,u)\equiv 0$, so ist

$$W(z,u) = \sum_{\delta\ge 1} C^*_\delta(u)z^\delta$$

ebenfalls konvergent, und $W(z,u)$ ist eine Majorante von $w(z,u)$, ebenso wie $C^*_\delta(u)$ von $c_\delta(u)$, für $\delta = 1,2,\dots$, was aus der Relation

$$C^*_\delta(u) = Q_\delta(F^*_{\alpha\beta}(u)) = \sum c^*_{\delta\gamma_1\dots\gamma_N}u_1^{\gamma_1}\dots u_N^{\gamma_N} \tag{18}$$

folgt, da die Q_δ positive Koeffizienten haben. Schließlich untersuchen wir auch noch das "spezialisierte" implizite Problem. Wir setzen $u_1^0 = = \dots = u_N^0 = \eta_0$, und lösen

$$\phi(z) = \sum F^*_{\alpha\beta}(u^0)\phi^\alpha(z)z^\beta\phi(z) = \sum_{\nu\ge 1}\varphi_\nu z^\nu. \tag{19}$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen ist $\phi(z)$ wieder konvergent, etwa für $|z| < \sigma$, und es gilt, auch hier wegen der absoluten Konvergenz

$$\varphi_\delta = Q_\nu(F^*_{\alpha\beta}(u)) = \sum c^*_{\delta\gamma_1\dots\gamma_N}(u_1^0)^{\gamma_1}\dots(u_N^0)^{\gamma_N}.$$

Wähle x_0 mit $o < x_0 < \sigma$ beliebig. Dann ist

$$\phi(x_0) = \sum_{\nu \geq 1} Q_\nu(F^*_{\alpha\beta}(u^0))x_0^\nu$$

eine konvergente Reihe mit nichtnegativen Gliedern, und daher nach dem Umordnungssatz

$$\phi(x_0) = \sum_{\nu,\gamma} c^*_{\nu\gamma_1\ldots\gamma_N}(u_1^0)^{\gamma_1}\ldots(u_N^0)^{\gamma_N}x_0^\nu,$$

weil die gleichen Umordnungen wie bei den formalen Reihen möglich sind. Da

$$|c_{\delta\gamma_1\ldots\gamma_N}| \leq c^*_{\delta\gamma_1\ldots\gamma_N},$$

so ist für alle komplexen $v_1, \ldots v_N$, z_0 mit $|v_\gamma| < |u_\gamma^0| = \eta_0$, $|z_0| < \sigma$:

$$w(z_0, v) = \sum_{\delta,\gamma} c_{\delta\gamma_1\ldots\gamma_N} v_1^{\gamma_1}\ldots v_N^{\gamma_N} z_0^\delta$$

absolut konvergent. Da hier $\eta_0 > 0$ beliebig war und σ (in Abhängigkeit von η_0) passend gewählt werden konnte, ist damit der Satz bewiesen.
Wir kommen nun zur Anwendung dieses Satzes auf die holomorphen Integrale der Differentialgleichungen (1). Eine solche Differentialgleichung ist, wenn $m = 1$, zu (13) äquivalent; wenn $m > 1$ so ist sie äquivalent mit (14). Bei (13) und (14) tritt die Bedingung $ord_z\omega(z) \geq 1$ hinzu. Im Falle $m = 1$ ist $\rho \in \mathbb{C}$ beliebig wählbar, hingegen, wenn $m > 1$, $t \in \mathbb{C}$ beliebig, und ρ ist eine der endlich vielen Bestimmungen von $\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\frac{1}{m-1}}$. Wenden wir uns (14) zu. Da t nur im Koeffizienten von z^{m-1} auftritt, so gilt offensichtlich: Ist $\eta > 0$ beliebig, so gibt es ein $\delta_0(\eta)$, sodaß alle in (14) auftretenden Reihen in z und ω für $|t| < \eta$, $|z|$, $|\omega| < \delta_0(\eta)$ konvergieren, in diesem Fall ist sogar δ_0 unabhängig von η wählbar. Somit ist Satz 2 anwendbar, und es ergibt sich, daß die Lösung $\omega(t,z)$ mit $\omega(t,0) = 0$ für $|t| < \eta$, $|z| < \delta(\eta)$ holomorph sind, wobei $\eta > 0$ beliebig, $\delta(\eta) > 0$ in Abhängigkeit von η gewählt werden kann.
Sodann sei $m = 1$, d.h. (1) ist zu (13) äquivalent. Hier tritt der Parameter $\rho \in \mathbb{C}$ stets in Potenzen $(\rho z)^\nu (\nu \geq 1)$ auf. Ist daher $\eta > 0$ beliebig gegeben, so gibt es ein $\delta_0(\eta) > 0$, sodaß die in (13) auftretenden

Reihen in z und ω für $|\rho| < \eta$, $|z|$, $|\omega| < \delta(\eta)$ konvergieren, wobei im allgemeinen $\delta_0(\eta)$ von η abhängen, ja für $\eta \to \infty$ gegen 0 gehen wird. Satz 2 ist daher auch hier anwendbar, und es folgt, daß die Integrale $\omega(\rho, z)$ mit $\omega(0, \rho) \equiv 0$ für $|\rho| < \eta$, $|z| < \delta(\eta)$ mit einem geeigneten $\delta(\eta) > 0$ holomorph sind.

Zusammenfassend ergibt sich

Satz 3. a) *Hat eine Differentialgleichung* (1) *mit* $m > 1$ *Integrale der Form*

$$w(z, c_m) = \rho z + \ldots + c_m z^m + \ldots,$$

so gilt (bei festem $\rho \in \mathbb{C}$*): Zu jedem* $\eta > 0$ *gibt ein* $\delta(\eta) > 0$*, sodaß die Abbildung*

$$(z, c_m) \;\to\; w(z, c_m)$$

für $|z| < \delta(\eta)$, $|c_m| < \eta$ *holomorph ist.*

b) *Hat eine Differentialgleichung* (1) *mit* $m = 1$ *Integrale der Form*

$$w(z, \rho) = \rho z + c_2 z^2 + \ldots \quad (\rho \in \mathbb{C}),$$

so gilt: Zu jedem $\eta > 0$ *gibt es ein* $\delta(\eta) > 0$*, sodaß die Abbildung*

$$(z, \rho) \mapsto w(z, \rho)$$

für $|z| < \delta(\eta)$, $|\rho| < \eta$ *holomorph ist.*

Speziell gilt dieser Satz also für die Differentialgleichungen von Aczél-Jabotinsky, die in [1], [2], [3], [4], [5] untersucht und auf die Gruppe der biholomorphen Transformationen einer autonomen Differentialgleichung in sich sowie auf Familien formaler und konvergenter vertauschbarer Potenzreihen angewendet wurden. Die formalen Untersuchungen in [1] lassen sich ebenfalls auf die impliziten Probleme (13) und (14) zurückführen, da wir diese Beziehungen hier mit rein algebraischen Überlegungen hergeleitet haben.

Analoge Resultate zu den Sätzen 1 und 3 gelten, wie in [2] und [5] ausgeführt wurde, auch für diejenigen Briot-Bouquetschen Differentialgleichungen, welche ein Kontinuum von Integralen besitzen, die, wie es L. Bieberbach ausdrückt, holomorph in die Singularität (0,0) einmünden.

4. Holomorphe Fortsetzung von Integralen in die Singularität der Differentialgleichung

Die in $z = 0$ holomorphen Integrale von (1) oder der vorhin genannten Briot-Bouquetschen Differentialgleichungen können für $z_0 \neq 0$, aber in hinreichend kleiner Umgebung von 0, auch nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Cauchy durch ihren Anfangswert $y(z_0)$ festgelegt werden, da die rechte Seite in $(z_0, y(z_0))$ holomorph ist. Man kann nun umgekehrt fragen, für welche Paare (z_0, y_0), $(z_0 \neq 0)$ an denen die rechte Seite von (1) holomorph ist, gemäß dem Satz von Cauchy Integrale $y(z; z_0, y_0)$ mit $y(z_0; z_0, y_0) = y_0$ bestimmt werden, die sich nach $z = 0$ holomorph fortsetzen lassen. Der Satz 3 über die Abhängigkeit vom Parameter c_m (bzw. ρ) liefert das Resultat, daß dies, für hinreichend kleines z_0, bei einer sehr großen, nämlich nichtleeren offenen Menge von Anfangswerten y_0 der Fall ist. Es gilt

Satz 4. *Gegeben sei eine Differentialgleichung* (1) *unter den Voraussetzungen von Satz 1. Dann gilt für alle $z_0 \neq 0$, die hinreichend nahe an $z = 0$ liegen: Es gibt ein Gebiet G_{z_0}, sodaß für alle $y_0 \in G_{z_0}$ die durch $y(z_0; z_0, y_0) = y_0$ gemäß dem Satz von Cauchy festgelegten Integrale $y(z; z_0, y_0)$ von* (1) *als Lösung von* (1) *holomorph nach $z = 0$ fortsetzbar sind. Es gibt für $m > 1$ genau ein c_m bzw. für $m = 1$ genau ein ρ, sodaß in der Bezeichnungsweise von Satz 3*

$$y(z; z_0, y_0) = w(z, c_m) \text{ } \textit{für } m > 1$$

bzw.

$$y(z, z_0, y_0) = w(z, \rho) \text{ } \textit{für } m = 1.$$

Beweis. Wir betrachten hier der Kürze halber nur den Fall $m > 1$, da $m = 1$ ganz ähnlich untersucht werden kann. Es sei $\eta > 0$ beliebig und $\delta(\eta) > 0$ gemäß Satz 3 gewählt, es sei $z_0 \neq 0$ und $|z_0| < \delta(\eta)$; ferner $|c_m| < \eta$. Nach Satz 3 ist die Abbildung

$$\Theta_{z_0} : c_m \;\rightarrow\; y_0 = \rho z_0 + \ldots + c_m z_0^m + \sum_{\nu \geq m+1} Q_\nu(c_m) z_0^\nu$$

für $|c_m| < \eta$ holomorph. Sie ist nicht konstant. Denn wäre für u, v mit $|u|, |v| < \eta$ und $u \neq v \Theta_{z_0}(u) = \Theta_{z_0}(v)$, so hätten die Integrale $w(z, u)$

und $w(z,v)$ von (1) an z_0 den gleichen Wert $w(z_0,u) = w(z_0,v) = y_0$, es ist aber $w(z,u) \neq w(z,v)$, da die Taylorreihen dieser Funktionen bei z^m verschiedene Koeffizienten u und v haben. Andererseits existiert nach dem Satz vom Cauchy genau ein in z_0 holomorphes Integral $y(z,z_0,y_0)$ von (1) mit dem Anfangswert y_0; also ist in einer Umgebung von z_0 $w(z,u) = w(z,v) = y(z;z_0,y_0)$, dann nach dem Identitätssatz und durch holomorphe Fortsetzung auch $w(z,u) = w(z,v)$ in Umgebung von $z = 0$, im Widerspruch zu $u \neq v$; also ist Θ_{z_0} injektiv und nicht konstant. Nach dem Satz von der Gebietstreue ist also $\Theta_{z_0}(\{c_m| \, |c_m| < \eta\})$ ein Gebiet G_{z_0}. Für alle $y_1 \in G_{z_0}$ gibt es genau ein v_1, für das $|v_1| < \eta$ und $\Theta_{z_0}(v_1) = y_1$, d.h.

$$y_1 = \rho z_0 + \ldots + v_1 z_0^m + \sum_{\nu \geq m+1} Q_\nu(v_1) z_0^\nu.$$

$w(z,v_1) = \rho z + \ldots + v_1 z^m + \sum_{\nu \geq m+1} Q_\nu(v_1) z^\nu$ ist ein in $z = 0$ holomorphes Integral von (1) mit $w(z_0,v_1) = y_1$. Das lokale Integral $y(z;z_0,y_1)$ stimmt in Umgebung von z_0 mit $w(z,v_1)$ überein, und ist daher nach $z = 0$ als Lösung von (1) holomorph fortsetzbar. Damit ist Satz 4 bewiesen.

Satz 4 gilt auch für Briot-Bouquetsche Differentialgleichungen mit unendlich vielen in die Singularität mündenden Integralen.

Literatur

[1] REICH, L.: On a differential equation arising in iteration theory in rings of formal power series in one variable. In: Iteration Theory and its Functional Equations (Eds. R. Liedl, L. Reich, Gy. Targonski), *Lecture Notes in Math.*, **1163**, 135 – 148, Springer-Verlag Berlin 1986.

[2] REICH, L.: Holomorphe Lösungen der Differentialgleichung von E. Jabotinsky. *Sitzungsberichte der Österr. Akademie der Wissenschaften, Mathem.-Naturw. Klasse, Abt. 11*, **145**, 157 – 166 (1986).

[3] REICH, L.: On families of commuting formal power series. In: Selected Topics on Functional Equations, *Berichte der Mathematisch-statistischen Sektion in der Forschungsgesellschaft Joanneum-Graz, Bericht* **294**, 1 – 18 (1988).

[4] PERKO, R.: Some remarks on a generalization of the Jabotinsky equation. In: Selected Topics on Functional equations, *Berichte der Mathematisch-statistischen Sektion in der Forschungsgesellschaft Joanneum-Graz, Bericht* **293**, 1 – 10 (1988).

[5] REICH, L.: Die Differentialgleichungen von Aczél-Jabotinsky, von Briot-Bouquet und maximale Familien konvergenter vertauschbarer Potenzreihen. In: Ausgewählte Beiträge zur Komplexen Analysis (Hsg. C. Withalm) Akademie-Verlag Berlin (In Vorbereitung).

[6] ACZÉL, J. and GRONAU, D.: Iteration, Translation, Commuting and Differential Equations. In: Selected topics in Functional Equations, *Berichte der Mathematisch-statistischen Sektion in der Forschungsgesellschaft Joanneum-Graz, Bericht* . **285**, 1 – 6 (1988).

[7] ACZÉL, J. and GRONAU, D.: Some differential equations related to iteration theory. *Can. J. Math.* **40** (1988), 695 – 717.

[8] TARGONSKI, Gy.: New directions and open problems in iteration theory. *Berichte der Mathematisch-statistischen Sektion im Forschungszentrum Graz,* **229** (1984).